В. Н. Чубариков, О кратных рациональных тригонометрических суммах над полем алгебраических чисел,
Чебышевский сб., 2021, том 22, выпуск 4, 306–323

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 4.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-306-323

О кратных рациональных тригонометрических суммах над полем алгебраических чисел

В. Н. Чубариков

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: chubarik2009@live.ru

Аннотация

В работе описаны основные свойства полиномиальных сравнений по модулю идеала в кольце целых алгебраического числового поля, найдены оценки полных рациональных тригонометрических сумм от многочлена над алгебраическим полем, получены оценки сумм характеров Дирихле по модулю, равному степени простого идеала в алгебраическом поле, даны оценки кратных полных рациональных тригонометрических сумм от многочленов над алгебраическим полем.

Ключевые слова: тригонометрические суммы, метод И. М. Виноградова, метод Хуа Локена, кольцо целых в алгебраическом числовом поле, полные рациональные тригонометрические суммы над алгебраическим числовым полем, характеры Дирихле в алгебраических числовых полях, формула А. Г. Постникова для характеров Дирихле в алгебраическом поле.

Библиография: 37 названий.

Для цитирования:
В. Н. Чубариков. О кратных рациональных тригонометрических суммах над полем алгебраических чисел // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 306–323.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 4.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-306-323

On multiple rational trigonometric sums over a field of algebraic numbers

V. N. Chubarikov

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: chubarik2009@live.ru

Abstract

The paper describes the basic properties of polynomial comparisons modulo an ideal in the ring of integers of an algebraic number field, estimates of total rational trigonometric sums from a polynomial over an algebraic field are found, estimates of sums of Dirichlet characters modulo the degree of a prime ideal in an algebraic field are obtained, estimates of multiples of total rational trigonometric sums from polynomials over an algebraic field are given.

Keywords: trigonometric sums, I. M. Vinogradov method, Hua Lo-ken method, ring of integers in an algebraic number field, complete rational trigonometric sums over an algebraic number field, Dirichlet characters in algebraic number fields, A. G. Postnikov formula for Dirichlet characters in an algebraic field.

Bibliography: 37 titles.

For citation:
V. N. Chubarikov, 2021, "On multiple rational trigonometric sums over a field of algebraic numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 306–323.

1. Введение

Настоящая статья посвящена светлой памяти академика И.М.Виноградова (14.09.1891 – 20.03.1983) и была подготовлена к 130-летию со дня его рождения [35]-[37].

Рациональные тригонометрические суммы вида

$$S = S(q; f(x)) = \sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i \frac{f(x)}{q}},$$

где $q \geq 1, f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x, (a_n, \ldots, a_1, q) = 1$, сами по себе имеют ярко выраженный “алгебраический” аспект, поскольку тесно связаны с кольцом вычетов по модулю q.

Первым примером такого рода взаимосвязи явились суммы Гаусса [25]

$$\sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i \frac{x^2}{q}} = \frac{1+i^{-q}}{1+i^{-1}}\sqrt{q}.$$

В 1940 г. Хуа Ло-кен нашел неулучшаемую оценку [29]

$$S(q; f(x)) \ll_n q^{1-\frac{1}{n}+\varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая постоянная. В дальнейшем, Хуа Ло-кен, В.И.Нечаев в этой оценке убрали величину ε, другие уточнения были получены С. Б. Стечкиным и Чен Джин-руном.

В 1942 г. Хуа Л. К. и С. Х. Мин обобщили этот результат на случай многочленов от двух переменных, которые не приводятся к многочлену степени k от одной переменной, доказав, что

$$\sum_{x=1}^{p}\sum_{y=1}^{p} e^{2\pi i \frac{f(x,y)}{p}} \ll p^{2-\frac{2}{n}},$$

где p — простое число и

$$f(x,y) \sum_{\substack{k=0 \\ 1\le k+m\le n}}^{n}\sum_{m=0}^{n} a_{k,m}x^k y^m$$

многочлен с коэффициентами простыми в совокупности с p. Существенно новые оценки для полных сумм по простому модулю с многочленом от одной и нескольких переменных были получены А.Вейлем и П.Делинем. Элементарный метод оценки таких сумм был развит А. Г. Постниковым, С. А. Степановым, Н. М. Коробовым, Д. А. Митькиным и др.

Неулучшаемые оценки полных кратных рациональных тригонометрических сумм в 1976 г. были получены автором статьи [32],[33]. Они имеют вид

$$S = S(q; f(x_1,\dots,x_r)) = \sum_{x_1=1}^{q}\cdots\sum_{x_r=1}^{q} e^{2\pi \frac{f(x_1,\dots,x_r)}{q}} \ll_{r,n} q^{r-\frac{1}{n}}(\tau(q))^{r-1},$$

где постоянная в знаке $\ll_{r,n}$ зависит от r и n,

$$f(x_1,\dots,x_r) = \sum_{t_1=0}^{n}\cdots\sum_{t_r=0}^{n} a(t_1,\dots,t_r)x_1^{t_1}\dots x_r^{t_r}, a(0,\dots,0)=0,$$

и коэффициенты $a(t_1,\dots,t_r)$ просты в совокупности с q.

Мощному развитию методов исследования рациональных тригонометрических сумм послужило создание и систематическое изучение “метода круга” Харди – Литтлвуда – Рамануджана [26]–[28] в аддитивной теории чисел и, в первую очередь, в проблеме Варинга о представлении натуральных чисел в виде суммы ограниченного числа степеней неотрицательных целых чисел. Существенным звеном в их исследованиях по проблеме Варинга играют оценки сумм Г.Вейля, найденные им в 1916 г. в работе о равномерном распределении последовательностей по модулю единица. В 1934 г. И. М. Виноградов принципиально усилил результат Харди – Литтлвуда, создав новый мощный метод в аналитической теории чисел [1]–[24].

В частности, в 1952 г. Хуа Ло-кен [29] доказал, что особый ряд

$$\sigma = \sigma(k) = \sum_{q_1=1}^{+\infty}\cdots\sum_{q_n=1}^{+\infty}\ \sum_{\substack{h_1=1 \\ (h_1,q_1)=1}}^{q_1}\ \dots \sum_{\substack{h_n=1 \\ (h_n,q_n)=1}}^{q_n} 1\times$$

$$\times\left|(q_1\dots q_n)^{-1}\sum_{x=1}^{q_1\dots q_n} e^{2\pi i(\frac{h_n}{q_n}x^n+\dots+\frac{h_1}{q_1}x)}\right|^{2k}$$

сходится при $2k > \frac{n(n+1)}{2}+2$ и расходится при $2k \le \frac{n(n+1)}{2}+2$. Ряд σ отвечает за “арифметическую природу” в главном члене асимптотической формулы для числа решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1+\dots+x_k = y_1+\dots+y_k, \\ \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_1^n+\dots+x_k^n = y_1^n+\dots+y_k^n, \end{cases}$$

в натуральных числах, не превосходящих любой наперед заданной границы.

В 1978 г. Г. И. Архипов, А. А. Карацуба и В. Н. Чубариков [32], [33] доказали, что при $1 \leq l \leq \dots \leq n, l + \dots + n < \frac{n(n+1)}{2}$ для “выщербленной системы” уравнений

$$\begin{cases} x_1^l + \dots + x_k^l = y_1^l + \dots + y_k^l, \\ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_1^n + \dots + x_k^n = y_1^n + \dots + y_k^n, \end{cases}$$

в натуральных числах, не превосходящих любой наперед заданной границы, особый ряд

$$\sigma' = \sigma'(k) = \sum_{q_l=1}^{+\infty} \dots \sum_{q_n=1}^{+\infty} \sum_{\substack{h_l=1 \\ (h_l,q_l)=1}}^{q_l} \dots \sum_{\substack{h_n=1 \\ (h_n,q_n)=1}}^{q_n} 1 \times$$

$$\times \left| (q_l \dots q_n)^{-1} \sum_{x=1}^{q_l \dots q_n} e^{2\pi i (\frac{h_n}{q_n} x^n + \dots + \frac{h_l}{q_l} x^l)} \right|^{2k};$$

сходится при $2k > l + \dots + n + 1$ и расходится при $2k \leq l + \dots + n + 1$.

Весьма полезной в аддитивной теории чисел оказалась формула Хуа Ло-кена [29] при $P < q$ для неполных рациональных тригонометрических сумм вида

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i \frac{hx^n}{q}} = \frac{P}{q} \sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i \frac{hx^n}{q}} + (q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

где $(h,q) = 1$ и $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая постоянная.

Формула Постникова [31] позволяет свести оценку сумм характеров Дирихле к рациональным тригонометрическим суммам. Пусть $p \geq 3$ — простое число, n, m и s — натуральные числа, $s < n, n-s \leq sm < n+s-1$ и $\operatorname{ind} \nu$ — индекс вычета ν по модулю p^n. Тогда справедлива формула

$$\frac{\operatorname{ind}(1+p^s u)}{p-1} \equiv a_1 p^s u + \frac{1}{2} a_2 (p^s u)^2 + \dots + \frac{1}{m} a_m (p^s u)^m \pmod{p^{n-1}},$$

где $(a_k, p) = 1, k = k_1 p^{\alpha_k}, (k_1, p) = 1, 1 \leq k \leq m$, и $\frac{1}{k} = p^{-\alpha_k} \bar{k_1}, k_1 \bar{k_1} \equiv 1 \pmod{p^{n-1}}$.

В настоящей работе продолжены исследования Хуа Ло-кена [29],[30] по оценкам рациональных тригонометрических сумм и сумм характеров Дирихле в алгебраических числовых полях.

2. Полиномиальные сравнения по модулю идеала в кольце целых алгебраического числового поля

Пусть k, n — натуральные числа. Рассмотрим поле алгебраических чисел $\mathbf{K}$ степени n над полем рациональных чисел $\mathbf{Q}$. Пусть $\operatorname{tr}(\alpha) = \alpha^{(1)} + \dots + \alpha^{(n)} \in \mathbf{Q}, N(\alpha) = \prod_{s=1}^{n} \alpha^{(s)}$ — след и норма элемента $\alpha \in \mathbf{K}$ и $\alpha^{(s)}, 1 \leq s \leq n$, — его сопряжённые. Обозначим через $\mathbf{J}$ кольцо целых поля $\mathbf{K}$.

Система $\mathbf{a}$ чисел поля $\mathbf{K}$ называется идеалом, если

1) для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbf{a}$ и для любых целых $\lambda, \mu \in \mathbf{J}$ имеем $\lambda\alpha + \mu\beta \in \mathbf{a}$;

2) существует целое ν такое, что для любого $\alpha \in \mathbf{a}$ число $\nu\alpha \in \mathbf{J}$ является целым.

Идеалы, содержащие только целые числа, называются целыми, все остальные идеалы называются дробными.

Пусть задан дробный идеал $\mathbf{f}$ и целый идеал $\mathbf{b}$. Очевидно, $\mathbf{f}|\mathbf{fb}$. Разобьем множество элементов идеала $\mathbf{f}$ на классы вычетов, отвечающие модулю $\mathbf{fb}$. Число различных классов вычетов будет равно норме $N(\mathbf{b})$ идеала $\mathbf{b}$. В каждом классе возьмем один элемент. Множество всех таких элементов образует *полную систему вычетов идеала* $\mathbf{f}$ *по модулю идеала* $\mathbf{fb}$.

Пусть далее идеал δ обозначает дифференту поля $\mathbf{K}$ над $\mathbf{Q}$, и пусть D — дискриминант поля $\mathbf{K}$, так что норма $N(\delta) = D$, причём

$$\delta^{-1} = \{\rho \in \mathbf{K} \mid \forall \alpha \in \mathbf{K} \text{ имеем } \operatorname{tr}(\rho\alpha) \in \mathbf{Z}\},$$

т.е.

$$E(\rho\alpha) = e^{2\pi i \operatorname{tr}(\rho\alpha)} = 1.$$

Заметим, что для квадратичного поля $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$ при $d \equiv 1 \pmod 4$ базис кольца целых $\mathbf{J} \subset \mathbf{K}$ имеет вид $\{1, \frac{1}{2}(1+\sqrt{d})\}$, дифферента $\sqrt{d}\mathbf{J}$, дискриминант $D = d$; а при $d \equiv 2, 3 \pmod 4$ базис представляет собой $\{1, \sqrt{d}\}$, дифферента равна $2\sqrt{d}\mathbf{J}$ и дискриминант равен $D = 4d$.

Нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения, доказательства которых по существу повторяют вывод соотетствующих утверждений из [32], [33].

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ *— целый идеал в поле* $\mathbf{K}$, *и пусть* $\wp$ *— простой идеал, причём* $\wp \nmid \mathbf{a}$. *Тогда число решений сравнения*

$$f(\xi) = \alpha_m\xi^m + \cdots + \alpha_1\xi + \alpha_0 \equiv 0 \pmod{\wp}$$

с учётом кратности, не превосходит m.

Лемма 2. *Пусть* $\wp$ *— простой идеал, и пусть* $f(x)$ *— многочлен с целыми коэффициентами по модулю* $\wp$. *Пусть, далее,* $x = a$ *— корень кратности* m *сравнения* $f(x) \equiv 0 \pmod{\wp}$. *Пусть, наконец,* λ *— целое число, делящееся на* $\wp$, *но не делящееся на* $\wp^2$, *и пусть* v *будет наибольшее целое такое, что* $\wp^v$ *делит все коэффициенты многочлена*

$$f(\lambda x + a) - f(a).$$

Положим

$$h(x) \equiv \lambda^{-v}(f(\lambda x + a) - f(a)) \pmod{\wp}.$$

Тогда $v \le m$ *и число решений сравнения* $h(x) \equiv 0 \pmod{\wp}$ *не превосходит* m.

3. Полные рациональные тригонометрические суммы от многочлена над алгебраическим полем

Положим

$$\exp(x) = e^x, e(x) = \exp(2\pi i x), E(\alpha) = e(\operatorname{tr}(\alpha)).$$

Наконец, пусть задан дробный идеал $\mathbf{a} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbf{K}$. Тогда найдутся единственные целые взаимно простые идеалы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{q}$ такие, что

$$\mathbf{a}\delta = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{q}}.$$

Для данного идеала $\mathbf{a} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ определим многочлен $f(x) = \alpha_1 x + \cdots + \alpha_k x^k$ степени k с коэффициентами из поля $\mathbf{K}$ и полную рациональную тригонометрическую сумму

$$S(f(x), \mathbf{q}) = \sum_{x(\mathbf{q})} e^{2\pi i \operatorname{tr}(f(x))} = \sum_{x(\mathbf{q})} E(f(x)),$$

где вычет $x = x(\mathbf{q})$ пробегает полную систему вычетов по модулю идеала $\mathbf{q}$.

Лемма 3. *Пусть* $\mathbf{q}$ — *целый идеал,* $\alpha \in \mathbf{J}$ — *целое число, и пусть* $\xi \in \mathbf{J}$ *пробегает полную систему вычетов* $(\mathbf{q}\delta)^{-1}$ *по модулю* δ^{-1}. *Тогда*

$$\sum_{\xi} E(\alpha\xi) = \sum_{\xi} e^{2\pi i\,\mathrm{tr}(\alpha\xi)} = \begin{cases} N(\mathbf{q}), & \text{если} \quad \mathbf{q}|\alpha, \\ 0, & \text{если} \quad \mathbf{q}\nmid\alpha. \end{cases}$$

Доказательство. см., например, [34], Lemma 2.5, p.16-17.

Лемма 4. *Пусть* $\mathbf{a}, \mathbf{q}, \mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}$ — *целые идеалы,*

$$\mathbf{q} = \mathbf{q_1}\mathbf{q_2}, (\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}) = \mathbf{1}, \mathbf{a} = \{\alpha_k, \ldots, \alpha_1\},$$

$$f(\xi) = \alpha_k\xi^k + \cdots + \alpha_1\xi, \mathbf{aq}\delta = \mathbf{r}, (\mathbf{r}, \mathbf{q}) = \mathbf{1}.$$

Тогда найдутся многочлены

$$f_s(\xi) = \alpha_{s,k}\xi^k + \cdots + \alpha_{s,1}\xi, \mathbf{a_s} = \{\alpha_{s,k}, \ldots, \alpha_{s,1}\}, s = 1, 2,$$

степени k, *с идеалами* $\mathbf{a_1}\mathbf{q_1}\delta = \mathbf{r_1}, \mathbf{a_2}\mathbf{q_2}\delta = \mathbf{r_2}$, *взаимно простыми соответственно с* $\mathbf{q_1}$ *и* $\mathbf{q_2}$, *такие, что*

$$S(f(\xi), \mathbf{q}) = S(f_1(\xi), \mathbf{q_1})S(f_2(\xi), \mathbf{q_2})$$

Доказательство. см. [34], Lemma 2.4, p.16.

Пусть $\mathbf{a} = \{\alpha_k, \ldots, \alpha_1\}$ — дробный идеал и $\mathbf{a}\delta = \mathbf{r}/\wp^l, (\mathbf{r}, \wp) = 1$.

Рассмотрим полную тригонометрическую сумму от многочлена

$$f(x) = \alpha_k x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \cdots + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x,\ \alpha_k, \ldots, \alpha_1 \in \mathbf{K},$$

по модулю $\wp^l$ вида

$$S(f(x), \wp^l) = \sum_{x(\wp^l)} e^{2\pi i\,\mathrm{tr}(f(x))},$$

где $\wp$ — простой идеал, $l \geq 1$ — натуральное число и $x = x(\wp)$ пробегает полную систему вычетов по модулю $\wp^l$.

Обозначим через $\mathbf{b}$ идеал

$$\mathbf{b} = \{k\alpha_k, (k-1)\alpha_{k-1}, \ldots, 2\alpha_2, \alpha_1\}.$$

Имеем, что $\mathbf{a} \mid \mathbf{b}$. Пусть, как и раньше, t обозначает наивысшую степень идеала $\wp$, делящую $\mathbf{ba}^{-1}$.

Рассмотрим сначала случай $l \geq 2(t+1)$. Каждый вычет $x = x(\wp^l)$ единственным способом представим в виде

$$x = y + \wp^{l-t-1}z,$$

где $y = y(\wp^{l-t-1})$ и $z = z(\wp^{t+1})$ — некоторые вычеты из соответствующих полных систем вычетов по модулям $\wp^{l-t-1}$ и $\wp^{t+1}$.

Пусть теперь $\nu = \nu(\wp)$ пробегает полную систему вычетов по модулю $\wp$. Тогда имеем

$$S(f, \wp^l) = \sum_{y(\wp^{l-t-1})} \sum_{z(\wp^{t+1})} e^{2\pi i\,\mathrm{tr}(f(y+\wp^{l-t-1}z))} = \sum_{\nu(\wp)} S_{\nu(\wp)},$$

где

$$S_\nu = \sum_{\substack{y(\wp^{l-t-1}) \\ y\equiv\nu \pmod{\wp}}} \sum_{z(\wp^{t+1})} e^{2\pi i\,\mathrm{tr}(f(y+\wp^{l-t-1}z))}.$$

Используя разложение многочлена $f(y+\wp^{l-t-1}z)$ по формуле Тейлора, получим

$$f(y+\wp^{l-t-1}z)=\sum_{s=0}^{k}\frac{f^s(y)}{s!}\left(\wp^{l-t-1}z\right)^{l-s}\equiv$$

$$\equiv f(y)+\wp^{l-t-1}zf'(y)\pmod{\wp^{l-t}}.$$

Лемма 5. *Пусть $\wp$ — простой идеал, $\nu\in\wp$ — вычет по модулю $\wp$, пусть $\wp^t\|\mathbf{b}, l\geq 2t+2$, и пусть, также, ν не является корнем сравнения $\wp^{l-t}f'(\nu)\equiv 0\pmod{\wp}$. Тогда*

$$S_\nu=0.$$

Доказательство. Имеем

$$S_\nu=\sum_{\substack{y(\wp^{l-t-1})\\ y\equiv\nu\pmod{\wp}}}\ \sum_{z(\wp^{t+1})}e^{2\pi i\,\mathrm{tr}(f(y)+\wp^{l-t-1}zf'(y))}.$$

Отсюда, применяя лемму 1 к внутренней сумме, находим

$$\sum_{z(\wp^{t+1})}e^{2\pi i\,\mathrm{tr}(\wp^{l-t}f'(\nu)\wp^{-1}z)}=0.$$

Стало быть, $S_\nu=0$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть $\wp$ — простой идеал, $\nu\in\wp$ — вычет по модулю $\wp$, пусть $\wp^t\|\mathbf{b}, l\geq 2t+2$, и пусть, также, ν является корнем сравнения*

$$\wp^{l-t}f'(\nu)\equiv 0\pmod{\wp}.\qquad(1)$$

Пусть, далее, показатель $u=u(\nu)$ определяется из соотношений

$$f(\wp y+\nu)-f(\nu)=\wp^u f_1(y)=\wp^u\sum_{s=1}^{k}a_{1,s}y^s,\quad \mathbf{a_1}=\{a_{1,n},\ldots,a_{1,1}\},\wp\not|\mathbf{a_1}.$$

Тогда

$$S(f;\wp^l)={\sum_\nu}'N(\wp^{u-1})E(f(\nu))S(f_1;\wp^{l-u}),$$

где штрих в знаке суммирования по ν означает, что вычеты ν пробегают решения сравнения (1) из полной системы вычетов по модулю $\wp$.

Доказательство. Положим

$$f(y+\nu)-f(\nu)=\tilde{f}(y)=\sum_{s=0}^{k}\tilde{a}_sy^s,$$

где коэффициенты многочлена $\tilde{f}(y)$ определяютя соотношениями

$$\tilde{a}_n=a_n,$$
$$\tilde{a}_{n-1}=a_{n-1}+\binom{n}{1}a_n\nu,$$
$$\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots$$
$$\tilde{a}_s=a_s+\binom{s+1}{s}a_{s+1}\nu+\cdots+\binom{n}{s}a_n\nu^{n-s},$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$\tilde{a}_1 = a_1 + \binom{2}{1} a_2\nu + \dots + \binom{n}{1} a_n\nu^{n-1}.$

Отсюда находим $\wp^t \| \{n\tilde{a}_n, (n-1)\tilde{a}_{n-1}, \dots, 2\tilde{a}_2, \tilde{a}_1\}$.

Определим показатель $u = u(\nu)$ из соотношений делимости идеалов

$$\wp^u \| \{\wp^n \tilde{a}_n, \wp^{n-1}(n-1)\tilde{a}_{n-1} \dots, \wp^2 \tilde{a}_2, \wp\tilde{a}_1\}.$$

Далее по условию леммы имеем

$$f(\wp y + \nu) - f(\nu) = \wp^u f_1(y) = \wp^u \sum_{s=1}^{k} a_{1,s} y^s, \quad \mathbf{a_1} = \{a_{1,n}, \dots, a_{1,1}\}, \wp \not| \mathbf{a_1}.$$

Следовательно,

$$S_\nu = S_\nu(f; \wp^l) = \sum_{\substack{x(\wp^l) \\ x \equiv \nu \pmod \wp}} E(f(x)) =$$

$$= \sum_{\substack{y(\wp^{l-t-1}) \\ y \equiv \nu \pmod \wp}} E(f(y)) \sum_{z(\wp^{t+1})} E(f(y + z\wp^{l-t-1}) - f(y)) =$$

$$= \sum_{\substack{y(\wp^{l-t-1}) \\ y \equiv \nu \pmod \wp}} E(f(y)) \sum_{z(\wp^{t+1})} E(\wp^{l-t-1} f'(y) z) = N(\wp^{t+1}) \sum_{\substack{y(\wp^{l-t-1}) \\ y \equiv \nu \pmod \wp}} E(f(y)) =$$

$$= N(\wp^{t+1}) E(f(\nu)) \sum_{y(\wp^{l-t-2})} E(f(y\wp + \nu) - f(\nu)) =$$

$$= N(\wp^{t+1}) E(f(\nu)) \sum_{y(\wp^{l-t-2})} E(\wp^u f_1(y)) = N(\wp^{u-1}) E(f(\nu)) S(f_1; \wp^{l-u}).$$

Лемма доказана.

Положим

$$f_0(x) = f(x) = \sum_{j=1}^{k} a_k x^k, \mathbf{a_0} = \{a_k, \dots, a_1\}, \mathbf{b_0} = \{ka_k, \dots, 2a_2, a_1\}.$$

Определим показатель t_0 из условия $\wp^{t_0} \| \mathbf{b_0}$. Пусть вычеты $x = \nu_{0,q}$ из полной системы вычетов по модулю $\wp$ пробегают все решения сравнения

$$\wp^{l-t_0} f_0'(x) \equiv 0 \pmod \wp.$$

Их количество не превосходит степени k многочлена $f_0(x)$. Для каждого корня $\nu_{0,q}$ определим показатель $u = u_{0,q}$ из соотношений

$$f_0(\wp y + \nu_{0,q}) - f_0(\nu_{0,q}) = \wp^u f_1(y) = \wp^u \sum_{r=1}^{k} a_{1,r} y^r,$$

$$\mathbf{a_1} = \{a_{1,k}, \dots, a_{1,1}\}, \wp \not| \mathbf{a_1}, l_1 = l - u.$$

Пусть определены многочлены $f_0(x), \dots, f_{s-1}(x), s \geq 1$ и соответствующие им корни $\nu_{r,q}, 0 \leq r \leq s-1$, и показатели $u = u_{r,q}$.

Имеем

$$f_{s-1}(x)=\sum_{j=1}^{k}a_{s-1,k}x^k, \mathbf{a_{s-1}}=\{a_{s-1,k},\ldots,a_{s-1,1}\}, \mathbf{b_{s-1}}=\{ka_{s-1,k},\ldots,2a_{s-1,2},a_{s-1,1}\}.$$

Показатель t_{s-1} задается условием $\wp^{t_{s-1}}\|\mathbf{b_{s-1}}$. Вычеты $x=\nu_{s-1,q}$ из полной системы вычетов по модулю $\wp$ пробегают все решения сравнения

$$\wp^{l_{s-1}-t_{s-1}}f'_{s-1}(x)\equiv 0 \pmod{\wp}.$$

Для каждого корня $\nu_{s-1,q}$ определим показатель $u=u_{s,q}$ из соотношений

$$f_{s-1}(\wp y+\nu_{s-1,q})-f_{s-1}(\nu_{s-1,q})=\wp^u f_s(y)=\wp^u\sum_{r=1}^{k}a_{s,r}y^r,$$

$$\mathbf{a_s}=\{a_{s,k},\ldots,a_{s,1}\}, \wp\not|\mathbf{a_s}.$$

Для каждого набора корней $\nu_{0,q_0},\nu_{1,q_1},\ldots,\nu_{h,q_h}$ находим набор показателей

$$\{u_0,u_1,\ldots,u_h\}=\{u_{0,q_0},u_{1,q_1},\ldots,u_{h,q_h}\},$$

где длина набора h определяется неравенствами

$$l-u_0-u_1-\cdots-u_{h-1}>2w+1, l-u_0-u_1-\cdots-u_h\leq 2w+1,$$

причем w находится как максимум показателей v таких, что $\wp^v\|m$ по всем $m\leq k$. Отсюда, в частности, следует, что $t_0\leq w$.

Лемма 7. *Количество наборов показателей $\{u_0,u_1,\ldots,u_h\}=\{u_{0,q_0},u_{1,q_1},\ldots,u_{h,q_h}\}$ не превосходит степени k многочлена $f(x)$.*

Доказательство. аналогично [32],[33], гл. II.

Лемма 8. *Имеем*

$$k\geq u_0\geq u_1\geq\cdots\geq u_h\geq 2.$$

Доказательство. аналогично [32],[33], гл. II.

Из этих вспомогательных утверждений получим следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $\wp$ — простой идеал, $\nu_s\in\wp$ — вычет по модулю $\wp$, пусть $\wp^{t_s}\|\mathbf{b_s}, l\geq 2t_s+2$, и пусть, также, ν_s является корнем сравнения*

$$\wp^{l_s-t_s}f'(\nu_s)\equiv 0 \pmod{\wp}. \tag{2}$$

Пусть, далее, показатель $u_s=u_s(\nu_s)$ определяется из соотношений

$$f_{s-1}(\wp y+\nu_s)-f_{s-1}(\nu_s)=\wp^{u_s}f_s(y)=\wp^{u_s}\sum_{r=1}^{k}a_{s,r}y^r,$$

$$\mathbf{a_s}=\{a_{s,k},\ldots,a_{s,1}\}, \wp\not|\mathbf{a_s}.$$

Тогда

$$S(f;\wp^l)=\sum_{\nu_1,\ldots,\nu_s}{}' N(\wp^{u_1+\cdots+u_s-s})E(f(\nu_1)+\cdots+\wp^{u_1+\cdots+u_s}f_s(\nu_s))\times$$

$$\times S(f_s;\wp^{l-u_1-\cdots-u_s}),$$

где штрих в знаке суммирования по $\nu_1,\ldots,\nu_s$ означает, что вычеты $\nu_1,\ldots,\nu_s$ пробегают решения сравнения (2) из полной системы вычетов по модулю $\wp$.

4. Характеры Дирихле по модулю, равному степени простого идеала, в алгебраическом поле

Пусть l — натуральное число, $\wp$ — простой идеал с нормой, не делящейся на 2, и пусть g — первообразный корень по модулю $\wp$. Тогда найдется вычет t из полной системы вычетов по модулю $\wp$ такой, что $g_1 = g + t\wp$ является первообразным корнем по модулю $\wp^l$, причем

$$(g + t\wp)^{N\wp - 1} = 1 + b\wp,\ (b, \wp) = 1. \tag{4}$$

Пусть μ — любой вычет по модулю $\wp^l$ с условием $(\mu, \wp) = 1$. Обозначим символом $\operatorname{ind}\mu = \operatorname{ind}_{g_1}\mu$ индекс вычета μ по модулю $\wp^l$ при основании g_1, т.е. натуральное число $\gamma = \operatorname{ind}\mu$ такое, что

$$g_1^{\gamma} \equiv \mu \pmod{\wp^l},$$

причем можно считать, что $1 \le \gamma \le N\wp^{l-1}(N\wp - 1) = \Phi(\wp^l)$.

Определим теперь характер Дирихле χ по модулю, равному степени $l \ge 1$ простого идеала $\wp$ с нормой, не делящейся на 2. Функция $\chi(t)$, определенная на полной системе вычетов по модулю $\wp^l$ при любом целом m следующей формулой

$$\chi(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad (\mathrm{t}, \wp) \ne 1, \\ E(\frac{\operatorname{ind} t}{\Phi(\wp^l)}), & \text{если} \quad (\mathrm{t}, \wp) = 1, \end{cases}$$

называется характером Дирихле по модулю $\wp^l$. Если $(m, \wp) = 1$, то характер называется примитивным.

Лемма 9. *Пусть $\wp$ — простой идеал, $\wp \not| 2, \chi$ — характер Дирихле по модулю $\wp^l$, $\nu \in \wp$ — вычет по модулю $\wp$. Тогда*

$$\sum_{\nu(\wp)} \chi(1 + \nu\wp^{l-1}) = 0.$$

Доказательство. Пусть $\gamma = \operatorname{ind}_{g_1}(1 + \nu\wp^{\alpha-1})$ по модулю $\wp^\alpha$. Тогда из равенства (4) находим, что $\gamma = (N(\wp) - 1)\gamma_1$, т.е.

$$(1 + \wp b)^{\gamma_1} \equiv 1 + \nu\wp^{\alpha-1} \pmod{\wp^\alpha}.$$

Следовательно, $\gamma_1 = \nu b_1 \wp^{\alpha-1}, bb_1 \equiv 1 \pmod{\wp}$.

Отсюда для примитивного характера χ при некотором целом рациональном $(m, \wp) = 1$ имеем

$$\sum_{\nu(\wp)} \chi(1 + \nu\wp^{\alpha-1}) = \sum_{\nu(\wp)} E(\frac{m\nu b_1}{\wp}) = 0.$$

Лемма доказана.

Для данного идеала $\mathbf{a} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ определим многочлен $f(x) = \alpha_1 x + \dots + \alpha_k x^k$ степени k с коэффициентами из кольца целых $\mathbf{J}$ и полную сумму характеров Дирихле по модулю, равному степени $l \ge 1$ простого идеала $\wp$. Имеем

$$S(f(x), \wp^l; \chi) = \sum_{x(\wp^l)} \chi(f(x)),$$

где вычеты $x = x(\mathbf{q})$ пробегает полную систему вычетов по модулю идеала $\mathbf{q}$. Положим, как и раньше, $\mathbf{b} = \{na_n, (n-1)a_{n-1}, \dots, 2a_2, a_1\}$.

Рассмотрим сначала случай $l \ge 2(t+1)$. Каждый вычет $x = x(\wp^l)$ единственным способом представим в виде

$$x = y + \wp^{l-t-1} z,$$

где $y = y(\wp^{l-t-1})$ и $z = z(\wp^{t+1})$ — некоторые вычеты из соответствующих полных систем вычетов по модулям $\wp^{l-t-1}$ и $\wp^{t+1}$, причем вычет x пробегает полную систему вычетов по модулю $\wp^l$ тогда и только тогда, когда независимо y пробегает полную систему вычетов по модулю $\wp^{l-t-1}$ и z — полную систему вычетов по модулю $\wp^{t+1}$.

Пусть теперь $\nu = \nu(\wp)$ пробегает полную систему вычетов по модулю $\wp$. Тогда имеем

$$S(f, \wp^l; \chi) = \sum_{y(\wp^{l-t-1})} \sum_{z(\wp^{t+1})} \chi(f(y + \wp^{l-t-1}z)) = \sum_{\nu(\wp)} S_{\nu(\wp)},$$

где

$$S_\nu = \sum_{\substack{y(\wp^{l-t-1}) \\ y \equiv \nu \pmod{\wp}}} \sum_{z(\wp^{t+1})} \chi(f(y + \wp^{l-t-1}z)).$$

Используя разложение многочлена $f(y + \wp^{l-t-1}z)$ по формуле Тейлора, получим

$$f(y + \wp^{l-t-1}z) = \sum_{s=0}^{k} \frac{f^s(y)}{s!} \left(\wp^{l-t-1}z\right)^{l-s} \equiv$$

$$\equiv f(y) + \wp^{l-t-1}zf'(y) \pmod{\wp^{l-t}}.$$

Лемма 10. *Пусть $\wp$ — простой идеал, $\nu \in \wp$ — вычет по модулю $\wp$, пусть $\wp^t \| \mathbf{b}, l \geq 2t+2$, и пусть, также, ν не является корнем сравнения $\wp^{-t}f'(\nu) \equiv 0 \pmod{\wp}$. Тогда*

$$S_\nu = 0.$$

Доказательство. Очевидно, утверждение леммы справедливо при $f(\nu) \equiv 0 \pmod{\wp}$. Поэтому предположим, что $f(\nu) \not\equiv 0 \pmod{\wp}$. Имеем

$$S_\nu = \sum_{\substack{y(\wp^{l-t-1}) \\ y \equiv \nu \pmod{\wp}}} \sum_{z(\wp^{t+1})} \chi(f(y) + \wp^{l-t-1}zf'(y)).$$

Отсюда, применяя лемму 10 к внутренней сумме, находим

$$\sum_{z(\wp^{t+1})} \chi(f(\nu) + \wp^{l-t-1}f'(\nu)z) = 0.$$

Следовательно, $S_\nu = 0$. Лемма доказана.

Лемма 11. *Пусть $\wp$ — простой идеал, $\nu \in \wp$ — вычет по модулю $\wp$, пусть $\wp^t \| \mathbf{b}, l \geq 2t+2$, и пусть, также, ν является корнем сравнения*

$$\wp^{l-t}f'(\nu) \equiv 0 \pmod{\wp}. \tag{3}$$

Пусть, далее, показатель $u = u(\nu)$ определяется из соотношений

$$f(\wp y + \nu) - f(\nu) = \wp^u f_1(y) = \wp^u \sum_{s=1}^{k} a_{1,s}y^s, \quad \mathbf{a_1} = \{a_{1,n}, \ldots, a_{1,1}\}, \wp \not| \mathbf{a_1}.$$

Тогда

$$S(f; \wp^l; \chi) = \sum_{\nu}{}' N(\wp^{u-1}) \sum_{y(\wp^{l-u})} \chi(f(\nu) + \wp^u f_1(y)),$$

где штрих в знаке суммирования по ν означает, что вычеты ν пробегают только решения сравнения (3) из полной системы вычетов по модулю $\wp$.

Доказательство. Положим

$$f(y+\nu)-f(\nu)=\tilde{f}(y)=\sum_{s=0}^{k}\tilde{a}_s y^s,$$

где коэффициенты многочлена $\tilde{f}(y)$ определяютя соотношениями

$$\begin{aligned}
&\tilde{a}_n=a_n,\\
&\tilde{a}_{n-1}=a_{n-1}+\binom{n}{1}a_n\nu,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \dots\quad \dots\quad \dots\quad \dots\\
&\tilde{a}_s=a_s+\binom{s+1}{s}a_{s+1}\nu+\dots+\binom{n}{s}a_n\nu^{n-s},\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \dots\quad \dots\quad \dots\quad \dots\\
&\tilde{a}_1=a_1+\binom{2}{1}a_2\nu+\dots+\binom{n}{1}a_n\nu^{n-1}.
\end{aligned}$$

Отсюда находим $\wp^t\|\{n\tilde{a}_n,(n-1)\tilde{a}_{n-1},\dots,2\tilde{a}_2,\tilde{a}_1\}$.

Определим показатель $u=u(\nu)$ из соотношений делимости идеалов

$$\wp^u\|\{\wp^n\tilde{a}_n,\wp^{n-1}(n-1)\tilde{a}_{n-1}\dots,\wp^2\tilde{a}_2,\wp\tilde{a}_1\}.$$

Далее по условию леммы имеем

$$f(\wp y+\nu)-f(\nu)=\wp^u f_1(y)=\wp^u\sum_{s=1}^{k}a_{1,s}y^s,\quad \mathbf{a_1}=\{a_{1,n},\dots,a_{1,1}\},\wp\not|\mathbf{a_1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
S_\nu=S_\nu(f;\wp^l)=&\sum_{\substack{x(\wp^l)\\ x\equiv\nu \pmod{\wp}}}\chi(f(x))=\\
=&\sum_{\substack{y(\wp^{l-t-1})\\ y\equiv\nu \pmod{\wp}}}\ \sum_{z(\wp^{t+1})}\chi(f(y)+(f(y+z\wp^{l-t-1})-f(y)))=\\
=&\sum_{\substack{y(\wp^{l-t-1})\\ y\equiv\nu \pmod{\wp}}}\ \sum_{z(\wp^{t+1})}\chi(f(y)+\wp^{l-t-1}f'(y)z)=\\
=&N(\wp^{t+1})\sum_{\substack{y(\wp^{l-t-1})\\ y\equiv\nu \pmod{\wp}}}\chi(f(y))=\\
=&N(\wp^{t+1})\sum_{y(\wp^{l-t-2})}\chi(f(\nu)+(f(y\wp+\nu)-f(\nu)))=\\
=&N(\wp^{t+1})\sum_{y(\wp^{l-t-2})}\chi(f(\nu)+\wp^u f_1(y))=N(\wp^{u-1})\sum_{y(\wp^{l-u})}\chi(f(\nu)+\wp^u f_1(y)).
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Отсюда выводится следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $\wp$ — простой идеал, $\nu_s \in \wp$ — вычет по модулю $\wp$, пусть $\wp^{t_s}\|\mathbf{b_s}, l \geq 2t_s+2$, и пусть, также, ν_s является корнем сравнения*

$$\wp^{l_s-t_s}f'(\nu_s) \equiv 0 \pmod{\wp}. \tag{5}$$

Пусть, далее, $f_0(x)=f(x)$, показатель $u_s=u_s(\nu_s), s\geq 1$, определяется из соотношений

$$f_{s-1}(\wp y+\nu_s)-f_{s-1}(\nu_s)=\wp^{u_s}f_s(y)=\wp^{u_s}\sum_{r=1}^{k}a_{s,r}y^r,$$

$$\mathbf{a_s}=\{a_{s,k},\ldots,a_{s,1}\}, \wp \not|\mathbf{a_s}.$$

Тогда

$$S(f;\wp^l)=\sum_{\nu_1,\ldots,\nu_s}{}' N(\wp^{u_1+\cdots+u_s-s})\times$$

$$\times\sum_{y(\wp^{l-u_1-\cdots-u_s})}\chi(f(\nu_1)+\cdots+\wp^{u_1+\cdots+u_{s-1}}f_{s-1}(\nu_{s-1})+\wp^{u_1+\cdots+u_s}f_s(y)),$$

где штрих в знаке суммирования по $\nu_1,\ldots,\nu_s$ означает, что вычеты $\nu_1,\ldots,\nu_s$ пробегают решения сравнения (5) из полной системы вычетов по модулю $\wp$.

5. Кратные полные рациональные тригонометрические суммы от многочлена над алгебраическим полем

Данные утверждения подобны соответствующим резельтатам [32], [33] гл. II, поэтому их вывод мы опускаем.

Лемма 12. *Пусть $\mathbf{a},\mathbf{q},\mathbf{q_1},\mathbf{q_2}$ — целые идеалы,*

$$\mathbf{q}=\mathbf{q_1}\mathbf{q_2}, (\mathbf{q_1},\mathbf{q_2})=\mathbf{1},$$

$$F(x_1,\ldots,x_r)=\sum_{t_1=0}^{n}\cdots\sum_{t_r=0}^{n}\alpha(t_1,\ldots,t_r)x_1^{t_1}\ldots x_r^{t_r}, F(0,\ldots,0)=0,$$

$$\mathbf{a}=\{\alpha(t_1,\ldots,t_r)\mid 0\leq t_1,\ldots,t_r\leq n, t_1+\cdots+t_r\geq 1\},$$

$$\mathbf{a}\mathbf{q}\delta=\mathbf{b},(\mathbf{b},\mathbf{q})=\mathbf{1}.$$

Тогда справедливо равенство

$$S(F(x_1,\ldots,x_r),\mathbf{q})=$$

$$=S(\mathbf{q_2}^{-1}F(\mathbf{q_2}x_1,\ldots,\mathbf{q_2}x_r),\mathbf{q_1})S(\mathbf{q_1}^{-1}F(\mathbf{q_1}x_1,\ldots,\mathbf{q_1}x_r),\mathbf{q_2}).$$

Лемма 13. *Пусть $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ — многочлен с целыми коэффициентами из $\mathbf{J},\mathbf{a}=\{a_0,a_1,\ldots,a_n\}$ — целый идеал в $\mathbf{J}, \wp$ — простой идеал, причем $\wp \not| a$, и пусть $N_\wp(\alpha,\beta)$ — число решений сравнения*

$$f(x)\equiv 0 \pmod{\wp^\beta}, \beta\leq\alpha,$$

а неизвестная x пробегает полную систему вычетов по модулю $\wp^\alpha$.

Тогда имеем

$$N_\wp(\alpha,\beta)\leq c(N(\wp))^{\alpha-\frac{\beta}{n}},$$

где $c=c(n)$ — постоянная из теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть $n \geq 2, r, \alpha \geq 1$ — натуральные числа,*

$$F = F(x_1, \dots, x_r) = \sum_{t_1=0}^{n} \cdots \sum_{t_r=0}^{n} \alpha(t_1, \dots, t_r) x_1^{t_1} \dots x_r^{t_r}, F(0, \dots, 0) = 0,$$

$$\mathbf{a} = \{\alpha(t_1, \dots, t_r) \mid 0 \leq t_1, \dots, t_r \leq n, t_1 + \dots + t_r \geq 1\}, \wp$$

— простой идеал,

$$\mathbf{a}\wp^{\alpha}\delta = \mathbf{b}, (\mathbf{b}, \wp) = \mathbf{1}.$$

Тогда имеем

$$|S(F, \wp^{\alpha})| \leq c(n, r)(N\wp)^{r\alpha - \frac{\alpha}{n}}(\alpha + 1)^{r-1}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов, И. М., Новый способ для получения асимптотических выражений арифметических функций // Изв. РАН, 1917, **41,** $No.16$, с.1347–1378.

2. Виноградов, И. М., О среднем значении числа классов чисто коренных форм отрицательного определителя // Сообщ. Харьк. мат. о-ва, 1918, вып.1, $No.1-2$, с.10–38.

3. Vinogradov, I. M., Sur la distribution des résidues et des non-résidues des puissances // Журн. Физ.-мат. о-ва при Перм. ун-те. 1918, вып. 1, с.94–98.

4. Виноградов, И. М., Элементарное доказательство одной общей теоремы аналитической теории чисел // Изв. РАН, 1925, **19,** $No.16-17$, с.785–796. Рез. на франц. яз.

5. Виноградов, И. М., О распределении индексов // Докл. АН СССР-А, 1926, $No.4$, с.73–76.

6. Vinogradov, I. M., On the bound of the least non-residues of n-th powers // Trans. Am. math. Soc. 1927, **29,** $No.1$, p.218–226.

7. Winogradow, J. M., Sur un théorème général de Waring // Матем. сборник. 1924, **31,** с.490–507.

8. Виноградов, И. М., К вопросу о распределении дробных долей значений функций одного переменного // Журн. Ленингр. физ.-мат. о-ва. 1926, bf 1, вып. 1, с.56–65. Рез. на франц. яз.

9. Виноградов, И. М., О распределении дробных долей значений функций двух переменных // Изв. Ленингр. политехн. ин-та. 1927, bf 30, с.31–52. Рез. на франц. яз.

10. Виноградов, И. М., О теореме Варинга // Изв. АН СССР. ОФМН, 1928, $No.4$, с.393–400.

11. Виноградов, И. М., Новое решение проблемы Варинга // Докл. АН СССР. 1934, **2** $No.6$, с.337–341. Текст на рус. и рез. на англ. яз.

12. Виноградов, И. М., О некоторых новых проблемах теории чисел // Докл. АН СССР. 1934, **3** $No.1$, с.1–6. Текст на рус. и англ. яз.

13. Виноградов, И. М., Новая оценка $G(n)$ в проблеме Варинга // Докл. АН СССР. 1934, **4** $No.5-6$, с.249–253. Текст на рус. и англ. яз.

14. Виноградов, И. М., О верхней границе $G(n)$ в проблеме Варинга // Изв. АН СССР. ОМЕН, 1934, $No.10$, с.1455–1469. Рез. на англ. яз.

15. Виноградов, И. М., Новые оценки сумм Вейля // Докл. АН СССР. 1935, **3** $No.5$, с.195–198.

16. Виноградов, И. М., Представление нечетного числа суммой трех простых чисел // Докл. АН СССР. 1937, **15** $No.6-7$, с.291–294.

17. Виноградов, И. М., Оценки некоторых простейших тригонометрических сумм с простыми числами // Изв. АН СССР. Сер. мат., 1939, $No.4$, с.371–398. Рез. на англ. яз.

18. Виноградов, И. М., Некоторые проблемы аналитической теории чисел. — В кн.: Труды Третьего Всесоюзного математического съезда. Москва, июнь–июль 1956 г. Т.3. Обзорные доклады. М., Изд-во АН СССР, 1958, с.3–13.

19. Виноградов, И. М., К вопросу о распределении дробных частей значений многочлена // Изв. АН СССР. Сер. мат., 1961, **25,** $No.6$, с.749–754.

20. Виноградов, И. М., Карацуба, А. А., Метод тригонометрических сумм в теории чисел // Труды матем. ин-та АН СССР., 1984, **168,** с.4–30.

21. Виноградов, И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел. — М.: Наука, 1980, 144 с.

22. Виноградов, И. М., Особые варианты метода тригонометрических сумм. — М.: Наука, 1976, 120 с.

23. Виноградов, И. М., Основы теории чисел. — Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2005, 176 с.

24. Vinogradov, I. M., Selected Works, N.-Y., Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 1985, pp.401.

25. Gauss, K. F., Disquisitiones arithmeticae, Leipzig, Fleischer, 1801.

26. Hardy, G. H., Littlwood, J. E., Some problems of "Partitio Numerorum":III. On the expression of a number as a sum of primes // Acta Math. 1923, **44,** 1–70.

27. Hardy, G. H., Littlwood, J. E., Some problems of "Partitio Numerorum":VI. Further researches in Waring's problem // Math. Z. 1925, **23,** 1–37.

28. Landau, E., Vorlesungen über Zahlentheorie, Erster Band. Leipzig, S. Hirzel, 1927.

29. Hua Loo-Keng. Selected Papers. — N.-Y., Heidelberg, Berlin, 1983. pp.888.

30. Hua Loo-Keng. Some results in the additive prime number theory // Quart. J. Math. Oxford. 1938. V.9. P.68-80.

31. Постников, А. Г., О сумме характеров по модулю, равному степени простого числа // Изв. АН СССР, сер. матем. 1955, **19,** вып. 1, с.11–16.

32. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. — М.: Наука. Гл. ред.физ.-мат. лит. 1987, 368 с.

33. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. Trigonometric sums in number theory and analysis. De Gruyter expositions in mathematics; 39 — Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2004, pp. 554.

34. Wang Yuan. Diophantine Equations and Inequalities in Algebraic Number Fields. — Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991. pp.168.

35. Марджанишвили, К. К., Иван Матвеевич Виноградов (к восьмидесятилетию со дня рождения) // Усп. мат. наук, 1971, **26,** вып. 6, с.3–6.

36. Cassels, J. W. S., Vaughan, R. C., Ivan Matveevich Vinogradov (obituary) // Bull. London Math. Soc., 1985, **17,** 584–600.

37. Шафаревич, И. Р., Патриарх отечественной математики // Вестник АН СССР, 1991, No.9, с.96–100.

REFERENCES

1. Vinogradov, I. M., 1917, A new method for obtaining asymptotic expressions of arithmetic functions, Izv. RAS, **41,** No.16, c.1347–1378.

2. Vinogradov, I. M., 1918, On the average value of the number of classes of purely indigenous forms of the negative determinant, Message. Kharkiv. mat. o-va, issue 1, $No.1-2$, pp. 10–38.

3. Vinogradov, I. M., 1918, Sur la distribution des résidues et des non-résidues des puissances, Journal of Physics-mat. o-va at Perm. University, issue 1, pp. 94–98.

4. Vinogradov, I. M., 1925, An elementary proof of a general theorem of analytic number theory, Izv. RAS, **19,** $No.16-17$, pp. 785–796. Res. in French lang.

5. Vinogradov, I. M., 1926, About the distribution of indexes, Dokl. USSR Academy OF Sciences, No.4, pp. 73–76.

6. Vinogradov, I. M., 1927, On the bound of the least non-residues of n-th powers, Trans. Am. math. Soc., **29,** No.1, pp. 218–226.

7. Vinogradov, I. M., 1924, Sur un théorème général de Waring, Math. collection., **31,** pp. 490–507.

8. Vinogradov, I. M., 1926, On the question of the distribution of fractional fractions of the values of functions of one variable, Journal. Leningr. phys.-mat. o-va., bf 1, issue. 1, pp. 56–65. Res. in French lang.

9. Vinogradov, I. M., 1927, On the distribution of fractional fractions of the values of functions of two variables, Izv. Leningr. Polytechnic institute, bf 30, pp. 31–52. Res. in French lang.

10. Vinogradov, I. M., 1928, On Waring's theorem, Izv. AN USSR. OFMN, No.4, pp. 393–400.

11. Vinogradov, I. M., 1934, A new solution to the Waring problem, Dokl. USSR Academy of Sciences., **2** No.6, pp. 337–341. Text on russian language and rez. on english language.

12. Vinogradov, I. M., 1934, On some new problems of number theory, Dokl. USSR Academy of Sciences., **3** No.1, pp. 1–6. Text on russian language and rez. on english language.

13. Vinogradov, I. M., 1934, New assessment $G(n)$ in the Waring problem, Dokl. USSR Academy OF Sciences., **4** $No.5-6$, pp. 249–253. Text on russian language and rez. on english language.

14. Vinogradov, I. M., 1934, About the upper bound $G(n)$ in the Waring problem, Izv. of the USSR Academy of Sciences. OMEN, No.10, pp. 1455–1469. Rez. on english language.

15. Vinogradov, I. M., 1935, New estimates of Weyl sums, Dokl. USSR Academy OF Sciences., **3** No.5, pp. 195–198.

16. Vinogradov, I. M., 1937, Representation of an odd number by the sum of three primes, Dokl. USSR Academy OF Sciences, **15** $No.6-7$, pp. 291–294.

17. Vinogradov, I. M., 1939, Estimates of some simplest trigonometric sums with prime numbers, Izv. AN USSR. Ser. mat., $No.4$, pp. 371–398. Rez. on english language.

18. Vinogradov, I. M., 1958, Some problems of analytical number theory. — In: Proceedings of the Third All-Union Mathematical Congress. Moscow, June-July 1956, vol. 3. Review reports. M., Publishing House of the USSR Academy of Sciences, pp. 3–13.

19. Vinogradov, I. M., 1961, On the question of the distribution of fractional parts of the values of a polynomial, Izv. AN USSR. Ser. mat, **25,** $No.6$, pp. 749–754.

20. Vinogradov, I. M., Karatsuba, A. A., 1984, The method of trigonometric sums in number theory, Works of math. Institute of the USSR Academy of Sciences., **168,** pp. 4–30.

21. Vinogradov, I. M., 1980, The method of trigonometric sums in number theory. — M.: Science, pp. 144.

22. Vinogradov, I. M., 1976, Special variants of the trigonometric sums method. — M.: Science, pp. 120.

23. Vinogradov, I. M., 2005, Fundamentals of number theory. — Moscow-Izhevsk: SIC 'Regular and chaotic dynamics pp. 176.

24. Vinogradov, I. M., 1985, Selected Works, N.-Y., Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, pp. 401.

25. Gauss, K. F., 1801, Disquisitiones arithmeticae, Leipzig, Fleischer.

26. Hardy, G. H., Littlwood, J. E., 1923, Some problems of "Partitio Numerorum":III. On the expression of a number as a sum of primes, Acta Math., **44,** pp. 1–70.

27. Hardy, G. H., Littlwood, J. E., 1925, Some problems of "Partitio Numerorum":VI. Further researches in Waring's problem, Math. Z., **23,** pp. 1–37.

28. Landau, E., 1927, Vorlesungen über Zahlentheorie, Erster Band. Leipzig, S. Hirzel.

29. Hua Loo-Keng., 1983, Selected Papers. — N.-Y., Heidelberg, Berlin, pp. 888.

30. Hua Loo-Keng. 1938, Some results in the additive prime number theory, Quart. J. Math. Oxford. Vol. 9. pp. 68–80.

31. Postnikov, A., G., 1955, On the sum of characters modulo the power of a prime number, Izv. AN USSR, ser. matem., **19,** Vol. 1, pp. 11–16.

32. Arkhipov G. I., Karatsuba A. A., Chubarikov V. N., 1987, Theory of multiple trigonometric sums. — M.: Science. Gl. ed.phys.-mat. lit., pp. 368.

33. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A., 2004, Trigonometric sums in number theory and analysis. De Gruyter expositions in mathematics; 39 — Berlin, New York: Walter de Gruyter, pp. 554.

34. Wang Yuan., 1991, Diophantine Equations and Inequalities in Algebraic Number Fields. — Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, pp. 168.

35. Marjanishvili, K. K., 1971, Ivan Matveevich Vinogradov (to the eightieth anniversary of his birth, Usp. mat. nauk, **26,** Vol. 6, pp. 3–6.

36. Cassels, J. W. S., Vaughan, R. C., 1985, Ivan Matveevich Vinogradov (obituary), Bull. London Math. Soc., **17,** pp. 584–600.

37. Shafarevich, I. R., 1991, Patriarch of Russian Mathematics, Bulletin of the USSR Academy of Sciences, *No*.9, pp. 96–100.

Получено 29.08.2021 г.
Принято в печать 6.12.2021 г.