



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Н. Черемных, Однонаправленное термогравитационное движение вязкой жидкости в плоском канале при заданном расходе,  
*Прикл. мех. техн. физ.*, 2018, том 59, выпуск 3, 36–42

<https://www.mathnet.ru/pmtf571>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.174

20 мая 2025 г., 00:01:09



УДК 532.61.096

## ОДНОНАПРАВЛЕННОЕ ТЕРМОГРАВИТАЦИОННОЕ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ ПРИ ЗАДАННОМ РАСХОДЕ

Е. Н. Черемных

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск, Россия  
Сибирский федеральный университет, 660036 Красноярск, Россия  
E-mail: elena\_cher@icm.krasn.ru

Рассматривается начально-краевая задача, описывающая однонаправленное термогравитационное движение жидкости в плоском канале в случае твердых неподвижных верхней и нижней стенок, на которых задано распределение температур, и в случае теплоизолированной верхней стенки. Движение вызвано совместным действием продольного градиента температуры и заданного нестационарного расхода. Начально-краевая задача является обратной относительно градиента давления вдоль канала. Получено точное стационарное решение. Найдено в явном виде решение нестационарной задачи в изображениях по Лапласу и представлены результаты численных расчетов.

Ключевые слова: уравнения Обербека — Буссинеска, конвекция, численные эксперименты.

DOI: 10.15372/PMTF20180304

**Постановка задачи.** Для описания термогравитационного движения вязкой несжимаемой жидкости используются уравнения Обербека — Буссинеска

$$\mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \nu \Delta \mathbf{v} - \beta \theta \mathbf{g}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \theta_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = \chi \Delta \theta, \quad (1)$$

где  $\mathbf{v}$  — вектор скорости;  $\mathbf{g}$  — ускорение свободного падения;  $p$  — отклонение давления от гидростатического значения;  $\theta$  — отклонение температуры от среднего значения;  $\rho$  — средняя плотность жидкости;  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости;  $\beta$  — коэффициент объемного расширения;  $\chi$  — температуропроводность. Положительные величины  $\rho$ ,  $\nu$ ,  $\chi$ ,  $\beta$  и вектор  $\mathbf{g}$  полагаются постоянными.

Предположим, что движение является плоским однонаправленным. Тогда  $\mathbf{v} = (u(x, y, t), 0)$ ,  $\mathbf{g} = (0, -g)$  и уравнения (1) существенно упрощаются:

$$u_x = 0, \quad u_t = \nu u_{yy} - \rho^{-1} p_x, \quad p_y = \rho g \beta \theta, \quad \theta_t + u \theta_x = \chi (\theta_{xx} + \theta_{yy}). \quad (2)$$

Для случая стационарных плоских течений система (2) изучена в работе [1]. Показано, что функция  $u$  есть кубический полином, остальные искомые функции могут быть представлены в виде  $\theta = -Ax + T(y)$ ,  $p = -A\rho g x y + q(y)$ , где  $T$ ,  $q$  — полиномы пятой и шестой степени соответственно. В работе [2] установлено, что решение Бириха является инвариантным решением системы (1) относительно группы с основными операторами

$\partial_x - A(\partial_\theta + \rho g \beta y \partial_p)$ ,  $\partial_t$ ,  $\partial_z$  ( $A = \text{const}$ ), допускаемой этой системой. В данной работе задача о совместности системы уравнений (2) решается в общем виде.

Из первых трех уравнений (2) следует, что функции  $p$  и  $\theta$  линейно зависят от переменной  $x$ . Следуя работе [3], положим

$$u = u(y, t), \quad \theta = -A(y, t)x + T(y, t), \quad p = -B(y, t)x + q(y, t). \quad (3)$$

Подставляя (3) в уравнения (2) и “расщепляя” по  $x$ , получаем

$$A_t = \chi A_{yy}, \quad B_y = \rho g \beta A, \quad u_t = \nu u_{yy} + B/\rho, \quad T_t = \chi T_{yy} + Au, \quad q_y = \rho g \beta T. \quad (4)$$

Уравнения (4) решаются последовательно в области  $D = \{y, t: 0 < y < h, t > 0\}$ . С использованием начальных и граничных условий находится единственное решение первого уравнения (4). Зная функцию  $A$  и интегрируя второе уравнение системы (4), находим функцию  $B$ . В результате система для определения функций  $u$ ,  $T$ ,  $q$  становится замкнутой.

В качестве характерных масштабов длины, времени, функций  $A(y, t)$ ,  $u(y, t)$ ,  $C(t)$  введем величины  $h$ ,  $h^2/\nu$ ,  $\tilde{A}$ ,  $\nu/h$ ,  $\rho\nu^2/h^3$  соответственно ( $\tilde{A} = \max_{t \geq 0} |A_2(t) - A_1(t)| > 0$  при  $A_1(t) = A(0, t)$ ,  $A_2(t) = A(h, t)$  или  $\tilde{A} = \max_k \max_t |A_k(t)| > 0$ ,  $k = 1, 2$  при  $A_1(t) = A_2(t)$ ).

Запишем уравнения для функций  $A(y, t)$  и  $u(y, t)$  в безразмерном виде

$$A_t(y, t) = \frac{1}{\text{Pr}} A_{yy}(y, t); \quad (5)$$

$$u_t(y, t) = u_{yy}(y, t) + \text{Gr} \int_0^y A(z, t) dz + C(t), \quad (6)$$

где  $\text{Pr} = \nu/\chi$  — число Прандтля;  $\text{Gr} = g\beta\tilde{A}h^4/\nu^2$  — число Грасгофа.

Так как стенки  $y = 0$ ,  $y = 1$  твердые и неподвижные, то на них выполнены условия прилипания

$$u(0, t) = u(1, t) = 0. \quad (7)$$

Кроме того, на нижней и верхней стенках задано распределение температуры

$$A(0, t) = A_1(t), \quad A(1, t) = A_2(t). \quad (8)$$

В данной работе рассматривается также случай, когда верхняя стенка теплоизолирована:

$$A(0, t) = A_1(t), \quad A_y(1, t) = 0. \quad (9)$$

Начальные условия задаются следующим образом:

$$A(y, 0) = A_0(y); \quad (10)$$

$$u(y, 0) = u_0(y). \quad (11)$$

В уравнении (6) функция  $C(t)$  получена в результате интегрирования второго уравнения (4), является слагаемым в линейной зависимости давления от переменной  $x$  и не зависит от конвективного процесса. Функцию  $C(t)$  можно определить из условия заданного расхода

$$\int_0^1 u(y, t) dy = q(t). \quad (12)$$

Для того чтобы получить решения задач (5)–(11), необходимо задать условия согласования

$$u_0(0) = u_0(1) = 0, \quad \int_0^1 u_0(y) dy = q(0), \quad (13)$$

$$A_0(0) = A_1(0), \quad A_0(1) = A_2(0) \quad (A_{0y}(1) = 0).$$

Постановка задачи (6), (7), (11), (12) приведена в работе [3]. Однозначная разрешимость этой задачи также показана в работе [3] путем сведения к операторному уравнению для  $C(t)$ .

**Стационарное решение.** Стационарное решение задачи (5)–(8), (12) имеет вид

$$A^s(y) = A_1^s(1 - y) + A_2^s y; \quad (14)$$

$$u^s(y) = \frac{\text{Gr}}{120} (5(A_1^s - A_2^s)y^4 - 20A_1^s y^3 + 3(7A_1^s + 3A_2^s)y^2 - (6A_1^s + 4A_2^s)y) - 6q^s y(y - 1); \quad (15)$$

$$C^s = \frac{\text{Gr}}{20} (7A_1^s + 3A_2^s) - 12q^s, \quad (16)$$

где  $A_1^s = A^s(0)$ ;  $A_2^s = A^s(1)$ ;  $q^s = \int_0^1 u^s(y) dy$ . Полагая в (15)  $q^s = 0$  (условие замкнутости потока) и  $A_1^s = A_2^s = A$ , получим решение, совпадающее с решением, найденным в работе [1].

Запишем стационарное решение задачи (5)–(7), (9), (12)

$$A^s = A_1^s; \quad (17)$$

$$u^s(y) = -\text{Gr} (2y^3 - 3y^2 + y)/12 + 6q^s y(1 - y); \quad (18)$$

$$C^s = 12q^s - \text{Gr} A_1^s/2. \quad (19)$$

Число Грасгофа характеризует влияние термогравитационных сил, а безразмерный параметр  $q^s$  — влияние сил инерции. Поэтому при  $|q^s| \gg \text{Gr}$  в слое преобладают силы инерции и профиль скорости является параболическим (течение Пуазейля). При  $|q^s| \ll \text{Gr}$  преобладают термогравитационные силы и возникает зона возвратного течения (рис. 1).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Используя методику априорных оценок [4], можно показать, что решения начально-краевых задач (5)–(8), (10)–(12) и (5)–(7), (9)–(12) при условии  $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = q^s$  и условии сходимости интегралов

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty |A_1^s - A_1(t)| e^{\delta_1 t} dt, & \int_0^\infty |A_2^s - A_2(t)| e^{\delta_1 t} dt, & \int_0^\infty |A_{1t}(t)| e^{\delta t} dt, & \int_0^\infty |A_{1t}(t)| e^{\delta_1 t} dt, \\ & \int_0^\infty |A_{1tt}(t)| e^{\delta t} dt, & \int_0^\infty |A_{kt}(t)| e^{\delta_2 t} dt, & \int_0^\infty |A_{2t}(t)| e^{\delta_1 t} dt, & \int_0^\infty |A_{2tt}(t)| e^{\delta_2 t} dt, \\ & & \int_0^\infty |q_t(t)| e^{\delta_1 t} dt, & \int_0^\infty |q_{tt}(t)| e^{\delta_1 t} dt, & \end{aligned}$$

где  $\delta = 2\chi/h^2$ ;  $\delta_1 = \pi^2\nu/h^2$ ;  $\delta_2 = \chi\pi^2/h^2$ ;  $t \rightarrow \infty$ , стремятся к соответствующим стационарным решениям (14)–(16) и (15)–(19).

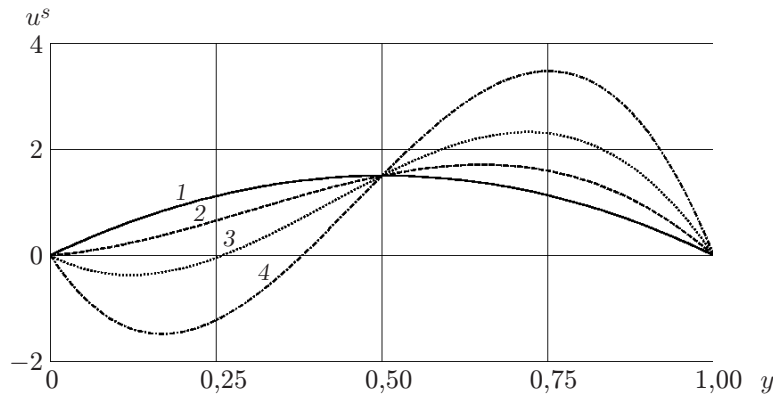


Рис. 1. Стационарный профиль безразмерной скорости (16) при  $q^s = 1$  и различных значениях числа Грасгофа:  
 1 —  $Gr = 1$ , 2 —  $Gr = 60$ , 3 —  $Gr = 150$ , 4 —  $Gr = 300$

**Нестационарное течение.** Для описания нестационарного термогравитационного течения вязкой жидкости применим преобразование Лапласа при решении задач (5)–(12). В результате получаем краевую задачу для изображений  $\hat{A}(y, p)$ ,  $\hat{u}(y, p)$  функций  $A(y, t)$  и  $u(y, t)$ :

$$\hat{A}_{yy}(y, p) - p \text{Pr} \hat{A}(y, p) = -\text{Pr} A_0(y), \tag{20}$$

$$\hat{u}_{yy}(y, p) - p \hat{u}(y, p) = -\left(u_0(y) + \text{Gr} \int_0^y \hat{A}(z, p) dz + \hat{C}(p)\right);$$

$$\hat{u}(0, p) = \hat{u}(1, p) = 0, \quad \int_0^1 \hat{u}(y, p) dy = \hat{q}(p), \tag{21}$$

$$\hat{A}(0, p) = \hat{A}_1(p), \quad \hat{A}(1, p) = \hat{A}_2(p) \quad (\hat{A}_y(1, p) = 0).$$

При выводе уравнений (20) использованы начальные данные (10), (11). В (21)  $\hat{A}_1(p)$ ,  $\hat{A}_2(p)$ ,  $\hat{q}(p)$  — изображения функций  $A_1(t)$ ,  $A_2(t)$ ,  $q(t)$  соответственно (см. (8), (9), (12)).

Если на верхней стенке ( $y = 1$ ) задано распределение температуры, общее решение первого уравнения (20) с учетом граничных условий (21) имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{A}(y, p) = & \frac{1}{\text{sh} \sqrt{p \text{Pr}}} \left[ \hat{A}_1(p) \text{sh}(\sqrt{p \text{Pr}} (1 - y)) + \text{sh}(\sqrt{p \text{Pr}} y) \left( \hat{A}_2(p) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{p}} \int_0^1 A_0(z) \text{sh}(\sqrt{p \text{Pr}} (1 - z)) dz \right) \right] - \sqrt{\frac{\text{Pr}}{p}} \int_0^y A_0(z) \text{sh}(\sqrt{p \text{Pr}} (y - z)) dz, \end{aligned} \tag{22}$$

если верхняя стенка теплоизолирована, — вид

$$\begin{aligned} \hat{A}(y, p) = & \frac{1}{\text{ch} \sqrt{p \text{Pr}}} \left( \hat{A}_1(p) \text{ch}(\sqrt{p \text{Pr}} (1 - y)) + \frac{\sqrt{\text{Pr}} \text{sh}(\sqrt{p \text{Pr}} y)}{\sqrt{p}} \times \right. \\ & \left. \times \int_0^1 A_0(z) \text{ch}(\sqrt{p \text{Pr}} (1 - z)) dz \right) - \sqrt{\frac{\text{Pr}}{p}} \int_0^y A_0(z) \text{sh}(\sqrt{p \text{Pr}} (y - z)) dz. \end{aligned} \tag{23}$$

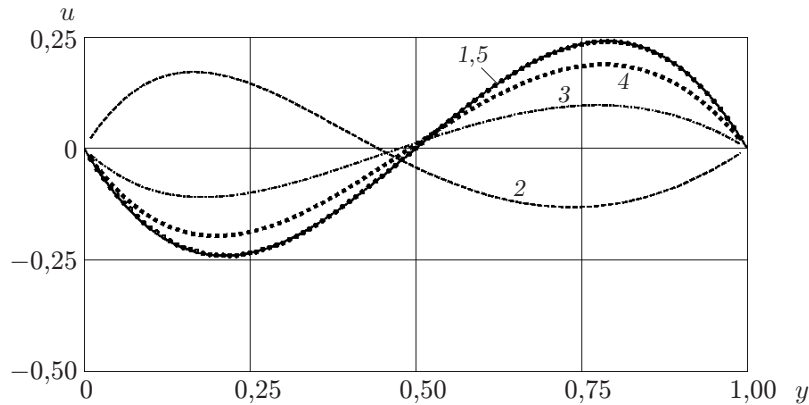


Рис. 2. Профиль безразмерной скорости при  $A_1(t) = 1 - 5e^{-0,01} \sin(0,1t)$ :  
1 — стационарное решение, 2 —  $t = 15$ , 3 —  $t = 100$ , 4 —  $t = 165$ , 5 —  $t = 400$

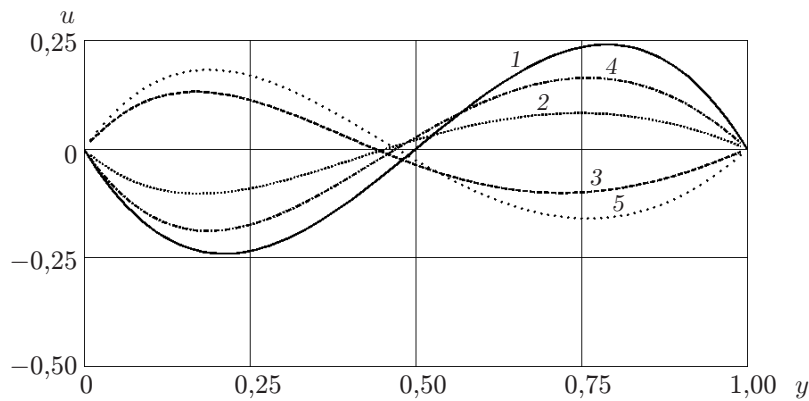


Рис. 3. Профиль безразмерной скорости при  $A_1(t) = 2 \sin(0,05t)$ :  
1 — стационарное решение, 2 —  $t = 20$ , 3 —  $t = 100$ , 4 —  $t = 170$ , 5 —  $t = 235$

Общее решение второго уравнения (20) имеет вид

$$\hat{u}(y, p) = m \operatorname{sh}(\sqrt{p} y) - \frac{1}{\sqrt{p}} \int_0^y f(z, p) \operatorname{sh}(\sqrt{p}(y-z)) dz + \frac{\hat{C}(p)}{p} (1 - \operatorname{ch}(\sqrt{p} y)),$$

$$\hat{C}(p) = \frac{p\sqrt{p}}{m_1} \left( \hat{q}(p) + \frac{(1 - \operatorname{ch} \sqrt{p})I}{p \operatorname{sh} \sqrt{p}} + \frac{I_1}{\sqrt{p}} \right),$$
(24)

где

$$f(y, p) = u_0(y) + \operatorname{Gr} \int_0^y \hat{A}(z, p) dz,$$

$$m = \frac{1}{\sqrt{p} \operatorname{sh} \sqrt{p}} \left( I - \frac{\hat{C}(p)(1 - \operatorname{ch} \sqrt{p})}{\sqrt{p}} \right), \quad m_1 = \sqrt{p} - 2 \frac{\operatorname{ch} \sqrt{p} - 1}{\operatorname{sh} \sqrt{p}},$$

$$I = \int_0^1 f(z, p) \operatorname{sh}(\sqrt{p}(1-z)) dz, \quad I_1 = \int_0^1 \int_0^y f(z, p) \operatorname{sh}(\sqrt{p}(y-z)) dz dy.$$

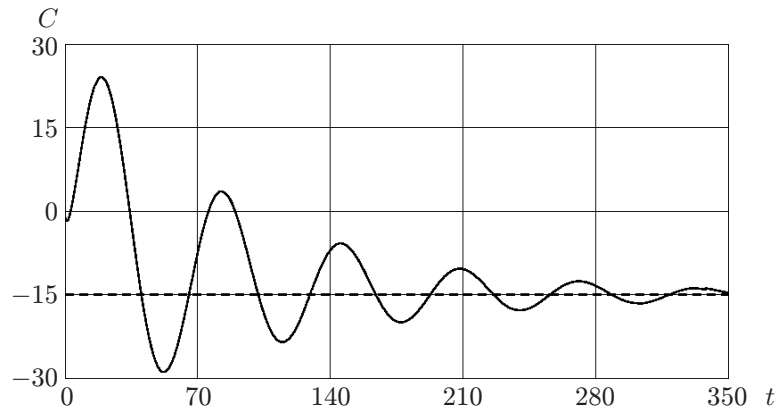


Рис. 4. Безразмерная функция  $C(t)$  при  $A_1(t) = 1 - 5 e^{-0,01} \sin(0,1t)$ ,  $Gr = 30$  (штриховая линия — стационарное решение  $C^s$ )

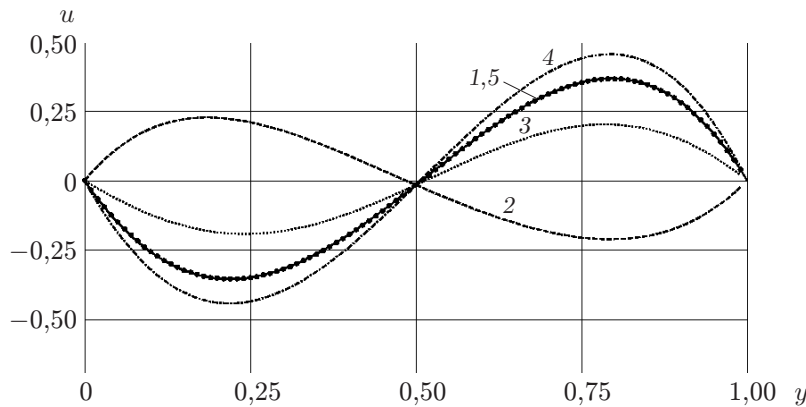


Рис. 5. Профиль безразмерной скорости при  $A_1(t) = 1 - e^{-0,01} \sin(0,1t)$ ,  $A_2(t) = 2 - e^{-0,01} \sin(0,1t)$ :  
 1 — стационарное решение, 2 —  $t = 15$ , 3 —  $t = 80$ , 4 —  $t = 190$ , 5 —  $t = 400$

Предположим, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} A_k(t) = A_k^s$  и  $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = q^s$ . С использованием формул (22)–(24) можно доказать предельные равенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(y, t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \hat{A}(y, p) = A^s(y), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(y, t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \hat{u}(y, p) = u^s(y),$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \hat{C}(p) = C^s,$$

где функции  $A^s(y)$ ,  $u^s(y)$  и  $C^s$  задаются формулами (14)–(16) или (17)–(19) в зависимости от граничных условий на верхней стенке.

Применим метод численного обращения преобразования Лапласа для формул (22)–(24). Расчеты проводились для жидкого силикона, имеющего следующие параметры:  $\rho = 0,86 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $\nu = 18,49 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\chi = 1,21 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\beta = 0,7 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$ . Рассмотрен случай, когда  $q(t) = q^s = 0$  (расход равен нулю). На рис. 2, 3 показаны профили безразмерной скорости  $u(y, t)$ , в случае когда верхняя стенка теплоизолирована. В случае, представленном на рис. 3, при  $t \rightarrow \infty$  предела функции  $A_1(t)$  не существует и решение не выходит на стационарный режим. На рис. 4 показана зависимость  $C(t)$  в случае  $A_1(t) = 1 - 5 e^{-0,01t} \sin(0,1t)$ . Видно, что с увеличением времени решение стремится к константе  $C^s = -15$  (см. (19)).

На рис. 5 представлен профиль безразмерной скорости, в случае когда на верхней стенке заданы распределение температуры  $A_1(t) = 1 - 5e^{-0,01t} \sin(0,1t)$  и  $A_2(t) = 2 - 5e^{-0,01t} \sin(0,1t)$ . Видно, что с увеличением времени решение стремится к стационарному решению (15).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Бирих Р. В.** О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. 1966. № 3. С. 69–72.
2. **Катков В. Л.** Точные решения некоторых задач конвекции // Прикл. математика и механика. 1968. Т. 32, № 3. С. 482–487.
3. **Пухначев В. В.** Нестационарные аналоги решения Бириха // Изв. Алт. гос. ун-та. 2011. № 1/2. С. 62–69.
4. **Андреев В. К., Черемных Е. Н.** Совместное ползущее движение трех вязких жидкостей в плоском слое: априорные оценки и сходимость к стационарному режиму // Сиб. журн. индустр. математики. 2016. Т. 19, № 1. С. 3–17.

*Поступила в редакцию 10/III 2017 г.,  
в окончательном варианте — 14/VI 2017 г.*

---