177-196, 200

УДК 512.774.2

БИРАЦИОНАЛЬНЫЕ АВТОМОРФИЗМЫ ДВОЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ С ОСОБЕННОСТЯМИ

А. В. Пухликов

СОДЕРЖАНИЕ

§ 0. Введение 178

§ 1. Двойные пространства с особенностями 178

§ 2. Максимальные особенности бирационального отображения 182

§ 3. Исключение максимальных циклов 184

§ 4. Исключение бесконечно близких максимальных особенностей 189

§ 5. Геометрия дискретных нормирований 194

Литература 196

23-8451

§ 0. Введение

Настоящая работа посвящена доказательству бирациональной жесткости двойных пространств индекса 1 произвольной размерности, имеющих особую точку. Свойство бирациональной жесткости ([2], [7] или § 1 ниже) характеризует бирациональную геометрию многообразия почти исчерпывающим образом: все бирациональные соответствия такого многообразия допускают очень простое описание. Единственный известный в настоящее время метод доказательства бирациональной жесткости — метод максимальных особенностей, идея которого восходит к Дж. Фано [5], [6]. На строгом и современном уровне в трехмерной ситуации он был развит В.А. Исковских и Ю.И. Маниным в [1].

В данной работе используется новый вариант метода, развитый автором в [2]. Необходимая техника вводится по ходу дела. В [2] были опущены доказательства некоторых технических утверждений. Один из пробелов изложения в [2] был восполнен в заметке [3], остальные восполняются в последнем разделе настоящей работы. Обратим внимание читателя на то обстоятельство, что в "технических" отступлениях мы пользуемся обозначениями, совершенно независимыми от основной части статьи.

После появления препринта Коллара [8] метод максимальных особенностей утратил монополию на доказательство нерациональности и нелинейчатости многомерных ($\geqslant 4$) многообразий Фано. Однако сила и точность результатов, получаемых с помощью этого метода, все еще вне конкуренции.

Основное поле предполагается алгебраически замкнутым.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 93-01-1539.

§ 1. Двойные пространства с особенностями

Рассмотрена подходящая неособая модель поля рациональных функций изучаемого многообразия. Сформулирован основной результат работы: бирациональная жесткость двойных пространств с особенностями.

1.1. Исходные данные. Предметом изучения в настоящей работе является многообразие V, двулистно накрывающее проективное пространство $\mathbb{P}^M$, $M \geqslant 3$, т.е. двойное накрытие

$$\sigma : V \to X = \mathbb{P}^M,$$

разветвленное над гиперповерхностью $W \subset X$ степени $2M$, имеющей единственную особенность — точку $x \in W$ кратности $\operatorname{mult}_x W = 2m$, $m \leqslant M-2$, причем касательный конус $T_x W$ определяет гладкую гиперповерхность степени $2m$ в проективном пространстве $\mathbb{P}(T_x\mathbb{P}^M) \cong \mathbb{P}^{M-1}$.

В размерности $M \geqslant 4$ на гиперповерхность W не накладывается никаких других ограничений; если же $M = 3$, то W выбирается настолько

общей, чтобы группа Пикара неособого многообразия V_0 — раздутия V в обыкновенной двойной точке $v = \sigma^{-1}(x)$ — была изоморфна $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (см. ниже).

1.2. Неособая модель поля $K(V)$.

Предложение 1. *Существует коммутативная диаграмма морфизмов*

$$\begin{array}{ccccc} V & \xleftarrow{\varphi_0} & V_0 & \supset & E \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow & & {\scriptstyle\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\sigma} \\ X & \xleftarrow{\bar\varphi_0} & X_0 & \supset & \overline{E}, \end{array}$$

в которой вертикальные стрелки — двойные накрытия, горизонтальные — бирациональные морфизмы, точнее, $\bar\varphi_0$ — раздутие точки x, $\overline{E} = \bar\varphi_0^{-1}(x) \subset X_0$ —исключительный дивизор, $\overline{E} \cong \mathbb{P}(T_x\mathbb{P}^M)$. Единственная точка неопределенности рационального отображения φ_0^{-1} есть $v = \sigma^{-1}(x)$, $\sigma : V_0 \to X_0$ разветвлено над собственным прообразом W_0 гиперповерхности W на X_0, так что $\sigma : E \to \overline{E} = \mathbb{P}^{M-1}$ разветвлено над гладкой гиперповерхностью $W_0 \cap \overline{E}$ степени $2m$. Более того,

$$\operatorname{Pic} V_0 = \mathbb{Z}\sigma^*\mathcal{O}_X(1) \oplus \mathbb{Z}\mathcal{O}(E)$$

всегда для $M \geqslant 4$ и для $M = 3$ при общем выборе гиперповерхности W.

Доказательство. Необходимо установить только существование диаграммы. Выберем систему локальных параметров $(z_1, \dots, z_M)$ в точке x. Пусть W задается в x уравнением $f(z) = 0$, где $f(z) = f_{2m}(z) + \dots$ начинается с однородного слагаемого степени $2m$. Тогда в точке v многообразие V локально может быть задано уравнением $y^2 = f(z)$ в системе локальных параметров $(y, z_1, \dots, z_M)$ многообразия $X \times \mathbb{A}^1_y$. Раздувая точку x внизу, точку v вверху, получим в стандартной карте $U_i = (z_i \neq 0)$ новое уравнение для накрывающеего многообразия:

$$y^2 = z_i^{2m-2} f_{2m}(z_1, \dots, z_i = 1, \dots, z_M) + z_i^{2m-1}(\dots).$$

Легко видеть, что направление $(1 : 0 : \dots : 0)$ не является касательным к V в точке v, так что после сделанных раздутий собственный прообраз $V^{(1)}$ многообразия V продолжает двулистно накрывать базу — многообразие X_0. Если $m = 1$, то нетрудно проверить, что $V^{(1)}$ неособо и его можно взять в качестве V_0. Если же $m \geqslant 2$, то $\sigma^{-1}(\overline{E}) \subset V^{(1)}$ целиком состоит из двойных точек. Само подмногообразие двойных точек $\sigma^{-1}(\overline{E})$ неособо (оно изоморфно $\overline{E} \cong \mathbb{P}^{M-1}$). В аффинной карте U_i $\sigma^{-1}(\overline{E})$ зада-

ется уравнениями $y = z_i = 0$. Осуществим последовательность раздутий

$$\begin{array}{ccccccc} V^{(1)} & \longleftarrow & V^{(2)} & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & V^{(m)} \\ \cup & & \cup & & & & \cup \\ E^{(1)} & \longleftarrow & E^{(2)} & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & E^{(m)}, \end{array}$$

где $E^{(1)} = \sigma^{-1}(\overline{E})$ и каждый раз раздувается дивизор Вейля $E^{(i)}$ — теоретико-множественный прообраз $E^{(i-1)}$ относительно предыдущего раздутия. Легко проверяется, что $E^{(i)}$, $i \leqslant m-1$, целиком состоит из двойных точек многообразия $V^{(i)}$, которое локально может быть задано уравнением

$$y^2 = z_j^{2m-2i} f_{2m}(z_1, \dots, z_j = 1, \dots) + \dots$$

в карте U_j. Многообразие $V^{(m)}$ уже неособо, задается в карте U_j уравнением

$$y^2 = f_{2m}(z_1, \dots, z_j = 1, \dots, z_M) + z_j(\dots)$$

и, таким образом, двулистно накрывает X_0. Остальные утверждения стандартны. Предложение доказано.

Класс дивизора в группе Пикара или численной группе неособого многообразия мы будем, как правило, обозначать соответствующей строчной буквой: класс E — через e, класс "гиперплоского сечения" H — глобального сечения пучка $\sigma^* \mathcal{O}_X(1)$ — через h и т.д.

Предложение 2. *Канонический класс многообразия V_0 есть*

$$K(V_0) = -h + (M - m - 1)e.$$

Доказательство очевидно.

1.3. Бирациональная жесткость двойных пространств. Напомним [2], что пробное многообразие — это пара (V', H'), где V' — неособое проективное многообразие, H' — такой дивизор на V', что линейная система $|H'|$ свободна, а каноническое присоединение к H' обрывается уже на втором шаге: $|H' + iK_{V'}| = \varnothing$ при $i \geqslant 2$, $K_{V'}$ — канонический дивизор многообразия V'. Многообразие W называется *бирационально жестким* [2], [7], если для любого пробного многообразия (V', H') и любого бирационального отображения $\chi\colon W \dashrightarrow V'$ существует такой бирациональный автоморфизм, $\chi^* \in \operatorname{Bir} W$, что собственный прообраз линейной системы $|H'|$ относительно подкрученного отображения $\chi \circ \chi^* : W \dashrightarrow V'$ есть подсистема антиканонической линейной системы $|-K_W|$, и не существует бирационального отображения $\chi\colon W \dashrightarrow V'$, если $|H' + K_{V'}| = \varnothing$. Наконец, многообразие W называется *бирационально сверхжестким*, если оно бирационально жесткое и вдобавок $\operatorname{Bir} W = \operatorname{Aut} W$. Основной результат работы —

Теорема 1. *Многообразие V, описанное в п 1.1, является бирационально сверхжестким.*

Следствие 1. *Группа бирациональных автоморфизмов многообразия V конечна, в общем случае изоморфна группе Галуа $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ двойного накрытия $\sigma : V \to X$.*

Следствие 2. *Два многообразия V_1 и V_2 описанного в п. 1.1 типа бирационально эквивалентны тогда и только тогда, когда они изоморфны, т.е. когда соответствующие гиперповерхности ветвления W_1 и W_2 в $\mathbb{P}^M$ проективно эквивалентны.*

Следствие 3. *Многообразие V бирационально не эквивалентно никакому гладкому многообразию Фано той же размерности со свободной антиканонической линейной системой. В частности, V бирационально не эквивалентно гладкому полному пересечению Фано.*

Следствие 4. *Многообразие V не имеет структуры (рационального) расслоения на коники (т.е. не является бирационально линейчатым) и, вообще, на многообразия Фано меньшей размерности. Например, при $M = 3$ на V нет пучка поверхностей Дель Пеццо.*

Следствие 5. *Многообразие V не рационально.*

Для доказательства следствий 1–5 достаточно применить теорему 1 к подходящему пробному многообразию. Например, в ситуации следствия 1 положим $V' = V_0$, H' — дивизор нулей сечения пучка $\sigma^*\mathcal{O}_X(1)$. В ситуации следствия 5 положим $V' = \mathbb{P}^M$, H' — гиперплоскость в $\mathbb{P}^M$. В ситуации следствия 4 положим V' — расслоение на многообразия Фано меньшей размерности, H' — поднятый с базы очень обильный дивизор и т.д. (см. [2], [7]).

Для доказательства теоремы зафиксируем пробное многообразие (V', H') и бирациональное отображение $\chi : V \dashrightarrow V'$ в предположении, что таковые существуют. Обозначим через $|\chi|$ собственный прообраз линейной системы $|H'|$ на V относительно χ, через $|\chi_0|$ — собственный прообраз $|H'|$ на V_0. Существуют единственные целые числа $n = n(\chi) \in \mathbb{Z}_+$ и $\nu_E(\chi) = \nu_E \in \mathbb{Z}_+$ такие, что

$$|\chi|_0 \subset |n(\chi)h - \nu_E(\chi)e|.$$

Для доказательства теоремы необходимо показать, что $n(\chi) \leqslant 1$, а если $|H' + K_{V'}| = \varnothing$, то $n(\chi) \leqslant 0$.

§ 2. Максимальные особенности бирационального отображения

Вводятся понятия максимальной особенности и максимального цикла бирационального отображения.

2.1. Дискретные нормирования. Кратности. Напомним кратко основные понятия языка дискретных нормирований в нужной нам форме. Более подробное изложение см. в [2]. Для алгебраического многообразия X (в пределах этого раздела забудем об обозначениях предыдущего параграфа) обозначим через $\mathcal{N}(X)$ множество дискретных нормирований поля рациональных функций $K(X)$, имеющих на X центр, не содержащийся целиком в подмногообразии особых точек $\operatorname{Sing} X$. Центр нормирования $\nu \in \mathcal{N}(X)$ обозначим через $Z(X, \nu)$.

Реализацией нормирования $\nu \in \mathcal{N}(X)$ назовем любую тройку $(\tilde{X}, \varphi, H)$, где $\varphi : \tilde{X} \to X$ — бирациональный морфизм, $H \not\subset \operatorname{Sing} \tilde{X}$ — простой дивизор Вейля, такую, что $\nu_H = \operatorname{ord}_H = \nu$. Обозначение: $(\tilde{X}, \varphi, H) \in \nu$.

Для пучка идеалов $J \subset \mathcal{O}_X$ назовем число

$$\operatorname{mult}_H \varphi^* J,$$

где $(\tilde{X}, \varphi, H) \in \nu$, *кратностью нормирования* относительно пучка J и обозначим через $\nu(J)$. Очевидно, это число не зависит от выбора реализации. Если $J = \mathcal{O}(-\mathcal{D})$, где $\mathcal{D} \subset X$ — дивизор Вейля, то пишем $\nu(\mathcal{D})$.

Для линейной системы $|\lambda|$ дивизоров Картье на X обозначим через $J(|\lambda|)$ пучок идеалов базисной подсхемы системы $|\lambda|$, и положим

$$\nu(|\lambda|) = \nu(J(|\lambda|)).$$

Будем называть это число *кратностью* ν относительно линейной системы $|\lambda|$.

Пусть $(\tilde{X}, \varphi, H) \in \nu$. Для открытого по Зарисскому подмножества $U \subset \tilde{X} \setminus \operatorname{Sing} \tilde{X}$, $U \cap H \neq \varnothing$, имеем вложение обратимых пучков

$$\varphi^* \omega_{\varphi(U)} \hookrightarrow \omega_U,$$

из которого подкручиванием получаем пучок идеалов

$$K(X, \varphi) = \omega_U^* \otimes \varphi^* \omega_{\varphi(U)} \hookrightarrow \mathcal{O}_U.$$

Назовем *канонической кратностью* $\nu \in \mathcal{N}(X)$ число

$$K(X, \nu) = \operatorname{mult}_{U \cap H} K(X, \varphi).$$

Очевидно, это число не зависит от выбора U.

Например, если $B \subset X$, $B \not\subset \operatorname{Sing} X$ — неприводимое подмногообразие, то, очевидно,

$$K(X, \nu_B = \operatorname{mult}_B(\cdot)) = \operatorname{codim} B - 1.$$

2.2. Максимальные особенности и максимальные циклы. Вернемся в ситуацию § 1. Положим $\chi_0 = \chi \circ \varphi_0 \colon V_0 \dashrightarrow V'$.

Определение 1. *Максимальной особенностью* отображения χ (или линейной системы $|\chi|$) назовем нормирование $\nu \in \mathcal{N}(V_0)$, удовлетворяющее неравенству Нётера – Фано – Исковских

$$\nu(E)\nu_E + \nu(|\chi_0|) > n(\chi)\left(K(V_0,\nu) + (M-m-1)\nu(E)\right).$$

Теорема 2. *Если выполнено любое из двух условий:* (*а*) $n(\chi) \geqslant 2$, (*б*) $|H' + K_{V'}| = \varnothing$, *то* χ *имеет максимальную особенность.*

Доказательство. Для неособого многообразия Фано V с $\operatorname{Pic} V = \mathbb{Z}(K_V)$ теорема была доказана в [2]. Рассуждения представляют собой переведенное на инвариантный язык дискретных нормирований классическое доказательство [1], [6], использовавшее разрешение особенностей. А именно, рассмотрим диаграмму вида

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{V} \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ V_0 \arrow[rr, dashed, "\chi_0"] & & V', \end{tikzcd}$$

где φ, ψ — бирациональные морфизмы. Возьмем открытые по Зарисскому подмножества $Q \subset \widetilde{V}$ и $W \subset V'$ такие, что $\operatorname{codim} V' \setminus W \geqslant 2$, $\psi \colon Q \to W$ — изоморфизм. Пусть $|\psi|$ — собственный прообраз $|H'|$ на $\widetilde{V}$, $\operatorname{Bs}|\psi| = \varnothing$. Пусть $F \in |\chi_0|$ — общий дивизор, $\widetilde{F} \in |\psi|$ — его собственный прообраз на $\widetilde{V}$.

Очевидно, $|\widetilde{F}|_Q + iK_Q| = \varnothing$ при $i \geqslant 2$, а если выполнено (б), то и при $i = 1$. Теперь имеем на Q:

$$\mathcal{O}\left(\widetilde{F}|_Q\right) \otimes \omega_Q^n = \left(\mathcal{O}\left(\widetilde{F}|_Q\right) \otimes \varphi^*\sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^M}(-n)\right) \otimes$$
$$\otimes \left(\omega_Q^* \otimes \varphi^*\sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^M}(-1)\right)^{*\otimes n}.$$

Поскольку у выписанного обратимого пучка нет глобальных сечений, а сомножители этого тензорного произведения суть обратимый пучок идеалов на Q и двойственный к такому пучку, соответственно, существует простой дивизор $T \subset Q$ такой, что

$$\operatorname{mult}_T \varphi^*\left(\mathcal{O}(-\nu_E E) \otimes J\left(|\chi|_Q\right)\right)$$

строго больше, чем

$$n \operatorname{mult}_T \left(\varphi^*\mathcal{O}(-E)^{\otimes(M-m+1)} \otimes K\left(Q, \varphi|_Q\right)\right).$$

Нормирование, реализуемое тройкой (Q, φ, T), удовлетворяет поэтому неравенству Нётера – Фано – Исковских. Доказательство закончено.

Определение 2. Неприводимый цикл $B \subset V$ назовем *максимальным* для χ (или $|\chi|$), если и только если выполняется одна из двух возможностей:

(i) $B = x$ — особая точка и $\nu_E(\chi) > (M - m - 1)n \geqslant n$,

(ii) $B \neq x$ и дискретное нормирование $\nu_B = \operatorname{mult}_B$ — максимальная особенность.

Очевидно, (ii) означает, что $\operatorname{mult}_B |\chi| > (\operatorname{codim} B - 1)n$.

2.3. Структура доказательства теоремы 1. Для доказательства теоремы 1 достаточно, ввиду теоремы 2, установить, что линейная система $|\chi|$ не может обладать максимальными особенностями. Сделаем это в два приема: в § 3 будет показано, что $|\chi|$ не может обладать максимальным циклом и, более того, $\operatorname{mult}_C |\chi| \leqslant n$ для любой кривой $C \subset V$. В § 4 будет показано, что $|\chi|$ не может обладать максимальной особенностью $\nu \in \mathcal{N}(V_0)$ такой, что либо $\nu \in \mathcal{N}(V)$ и $Z(V, \nu)$ — точка, отличная от x, либо $Z(V_0, \nu) \subset E$. Этим доказательство теоремы 1 будет завершено.

§ 3. Исключение максимальных циклов

Показано, что кратность кривой относительно линейной системы $|\chi|$ не может превосходить n. В частности, $|\chi|$ не имеет максимальных циклов.

3.1. Исключение максимальных циклов.

Предложение 3. (i) $\nu_E \leqslant n$;

(ii) *Для любой точки $y \in V$, отличной от x, имеет место неравенство*

$$\operatorname{mult}_y |\chi| \leqslant \sqrt{2}n.$$

Доказательство. (i) Пусть $\overline{L} \subset \mathbb{P}^M$ — общая прямая, содержащая точку $x \in W$. Ее прообраз $L \subset V$ не содержится в $\operatorname{Bs}|\chi|$, а собственный прообраз последней кривой $\tilde{L} \subset V_0$ вообще не пересекается с $\operatorname{Bs}|\chi_0|$. Имеем очевидное неравенство $\left((nh - \nu_E e) \cdot \tilde{l}\right) \geqslant 0$, причем $(h \cdot \tilde{l}) = 2$ и $(e \cdot \tilde{l}) = 2$, откуда и следует (i).

Это уже было доказано в [4], ибо наличие особой точки в этом случае ничего не меняет. Напомним: следует взять общую плоскость $\overline{P} \subset \mathbb{P}^M$, содержащую $\sigma(y)$ (и не содержащую x), и ограничить линейную систему $|\chi|$ на неособую поверхность $P = \sigma^{-1}(\overline{P})$. Эта линейная система кривых не имеет неподвижных компонент, ее самопересечение есть $2n^2$, причем пересечение двух общих ее членов содержит точку y с кратностью не меньшей, чем ν_y^2, где $\nu_y = \nu_y(|\chi|) = \operatorname{mult}_y |\chi|$. Этим предложение доказано.

Следствие 6. *Если $B \subset V$ — максимальный цикл, то* $\dim B \geqslant 1$.

3.2. Построение пробной поверхности. Пусть $C \subset V$ — некоторая кривая.

Теорема 3. *Имеет место неравенство* $\operatorname{mult}_C |\chi| \leqslant n$.

Следствие 7. *Система $|\chi|$ не может обладать максимальным циклом.*

Доказательство теоремы. Рассмотрим три возможности:

1) $\sigma : C \to \overline{C} \not\subset W$ — бирациональное отображение, т.е. кривая $\sigma^{-1}(\overline{C})$ распадается на две различные компоненты, одна из которых — кривая C;
2) $\sigma : C \to \overline{C} \not\subset W$ — двойное накрытие, т.е. $C = \sigma^{-1}(\overline{C})$;
3) $\sigma : C \to \overline{C} \subset W$ — изоморфизм.

Исключим возможность $\operatorname{mult}_C |\chi| > n$ в этих трех случаях по порядку. Положим $d = \deg \overline{C}$.

Случай 1). Пусть Z — нормализация кривой C, $\nu : Z \to \overline{C} \subset \mathbb{P}^M$. Выберем общую точку $a \in \mathbb{P}^M$, и пусть $\alpha : \tilde{X} \to X = \mathbb{P}^M$ — ее раздутие, а $\pi : \tilde{X} \to \mathbb{P}^{M-1}$ — проекция из точки a. Рассмотрим пару морфизмов

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, "\pi \circ \alpha^{-1} \circ \nu"'] & & \tilde{X} \arrow[dl, "\pi"] \\ & \mathbb{P}^{M-1} & \end{tikzcd}$$

и образуем расслоенное произведение $\overline{S} = Z \times_{\mathbb{P}^{M-1}} \tilde{X}$. Это неособая поверхность — $\mathbb{P}^1$-расслоение над гладкой кривой Z. Очевидно, ее образ $\operatorname{pr}_X(\overline{S}) \subset \mathbb{P}^M$ есть конус с вершиной a и базой $\overline{C}$. Следующие факты очевидны: $\operatorname{Pic} \overline{S} = \mathbb{Z}a \oplus \operatorname{pr}_Z^* \operatorname{Pic} Z$, где $a \in \operatorname{Pic} \overline{S}$ — класс кривой $A \subset \overline{S}$ — сечения, порожденного точкой $a \in \mathbb{P}^M$. Далее, $\operatorname{Num} \overline{S} = \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}l$, где l — класс слоя морфизма $p_Z : \overline{S} \to Z$, причем $(a \cdot a) = -d$, $d = \deg \overline{C}$, $(a \cdot l) = 1$, $(l \cdot l) = 0$. Канонический класс

$$K(\overline{S}) = -2a + \operatorname{pr}_Z^* K_Z - [\operatorname{pr}_Z^* \mathcal{O}_Z(1)] \in \operatorname{Pic} \overline{S},$$

а его образ в $\operatorname{Num} \overline{S}$, который мы обозначили тем же символом, есть $K(\overline{S}) = -2a + (2g-2-d)l$, g — род кривой Z. Класс "гиперплоского сечения", т.е. сечения пучка $\operatorname{pr}_X^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^M}(1)$ в $\operatorname{Num} \overline{S}$ есть $h = a + [\operatorname{pr}_Z^* \mathcal{O}_Z(1)] = a + dl$.

Далее, если $z_\lambda \in Z$, $\lambda \in \Lambda$, суть все ветви кривой $\overline{C}$ в точке x, т.е. $\nu^{-1}(x) = \{z_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, то, очевидно, этими точками (уже как точками на $Z \times_{\mathbb{P}^{M-1}} \alpha^{-1}(\overline{C}) \subset \overline{S}$) исчерпывается прообраз $\operatorname{pr}_X^{-1}(x)$. Точки z_λ лежат на естественном сечении $Z \times_{\mathbb{P}^{M-1}} \alpha^{-1}(\overline{C})$ $\mathbb{P}^1$-расслоения $\overline{S} \to Z$, которое мы снова обозначим буквой Z.

Рассмотрим кривую $R = \operatorname{pr}_X^{-1}(W) \subset \overline{S}$.

24-8451

Лемма 1. *Кривая R содержит все точки z_λ и неособа вне этих точек. В каждой точке z_λ имеем $\mathrm{mult}_{z_\lambda} R = 2m$, причем R имеет в z_λ ровно $2m$ различных касательных направлений, ни одно из которых не совпадает с касательной к слою $\mathrm{pr}_Z : \overline{S} \to Z$ (при достаточно общем выборе точки a).*

Доказательство. Очевидно, $z_\lambda \in R$. Неособость R вне z_λ, $\lambda \in \Lambda$, означает, что поверхность $\mathrm{pr}_X(\overline{S})$ пересекает W трансверсально вне x. Если это не так, то вершина конуса $\mathrm{pr}_X(\overline{S})$ — точка a — удовлетворяет следующему условию:

(+) существуют $q \in \overline{C}$ и $p \in W$ такие, что точка a лежит на прямой $\overline{pq}$, и (замкнутая в $\mathbb{P}^M$) касательная гиперплоскость T_pW содержит a и прямую $T_q\overline{C}$ (или одну из касательных к $\overline{C}$ в точке q прямых, если $q \in \overline{C}$ — особая точка).

Зафиксируем точку $q \in \overline{C}$ и обозначим через $B(q)$ множество "плохих" точек a, удовлетворяющих (+) и лежащих вне $W \cup \overline{C}$. Неособость R вне z_λ при общем выборе $a \in \mathbb{P}^M$ будет установлена, если покажем, что $\operatorname{codim} B(q) \leqslant 2$ для общей (в частности, неособой) точки $q \in \overline{C}$, ибо неравенство $\operatorname{codim} B(q) \leqslant 1$ для любой точки $q \in \overline{C}$ очевидно.

В самом деле, если точка удовлетворяет (+), то $\pi_q(a)$ лежит на дивизоре $\mathcal{D}_q \subset \mathbb{P}^{M-1}$ ветвления проекции $\pi_q : W \to \mathbb{P}^{M-1}$, где $\pi_q : \mathbb{P}^M \dashrightarrow \mathbb{P}^{M-1}$ — проекция из точки q и, более того, $\pi_q(T_q\overline{C}) \in T_{\pi_q(a)}\mathcal{D}_q$. Следовательно,

$$B(q) \subset \pi_q^{-1}\left(\{y \in \mathcal{D}_q |\ \pi_q(T_q(\overline{C})) \in T_y\mathcal{D}_q\}\right).$$

Последнее множество имеет коразмерность 2, потому что точка $\pi_q(T_q(\overline{C}))$ не может лежать сразу на всех касательных гиперплоскостях к гиперповерхности $\mathcal{D}_q \subset \mathbb{P}^{M-1}$. Этим первое предложение леммы доказано.

Остальные утверждения леммы очевидным образом выполняются при общем выборе точки a. Лемма доказана.

Раздуем конечное множество точек z_λ, $\lambda \in \Lambda$ на поверхности $\overline{S}$: $\varphi : \tilde{S} \to \overline{S}$, и пусть E_λ, $\lambda \in \Lambda$ — исключительные дивизоры. Класс собственного прообраза $\tilde{R}$ кривой R на $\tilde{S}$ есть

$$\tilde{r} = 2Mh - 2m\sum_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda.$$

Кривая $\tilde{R}$, очевидно, гладкая. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S} & \xrightarrow[\mathrm{pr}_{X_0}]{} & X_0 \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\bar{\varphi}_0} \\ \overline{S} & \xrightarrow[\mathrm{pr}_X]{} & X = \mathbb{P}^M, \end{array}$$

где pr_{X_0} замыкает ее до коммутативной. Образуем расслоенное произведение $S = \tilde{S} \times_{X_0} V_0$. Положим $\sigma : S \to \tilde{S}$ — двулистное накрытие, разветвленное над неособой кривой $\tilde{R}$. Поверхность S назовем *пробной поверхностью*.

Очевидно, pr_{V_0} — бирациональное отображение на образ. Рассмотрим линейную систему $|\xi|$ кривых на S, задающих рациональное отображение

$$\xi = \chi_0 \circ \mathrm{pr}_{V_0} : S \dashrightarrow V',$$

т.е. $|\xi|$ состоит из собственных прообразов дивизоров линейной системы $|H'|$ на S, или из прообразов дивизоров линейной системы $|\chi_0|$. Получили линейную систему кривых на неособой поверхности, имеющую ровно две неподвижные компоненты — кривые Z_1 и Z_2, $Z_1 \cup Z_2 = \mathrm{pr}_{\tilde{S}}^{-1}(\tilde{Z})$, где $\tilde{Z}$ — собственный прообраз сечения Z на $\tilde{S}$.

3.3. Вычисления на пробной поверхности: исключение случая 1). Обозначим класс кривой из системы $|\xi|$ через $h' \in \mathrm{Num}\, S$, классы кривых Z_1 и Z_2 — через z_1 и z_2 соответственно. Пусть $\nu_i = \mathrm{mult}_{Z_i} |\xi|$, $\nu_1 > n$, по предположению, $Z_1 = \mathrm{pr}_{V_0}^{-1}(\tilde{C})$, где $\tilde{C} \subset V_0$ — собственный прообраз кривой C на V_0. Обозначим $\#\Lambda$ через l. Имеем следующие пересечения на S:

$$(h' \cdot h') = 2\left(nh - \nu_E \sum_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda\right)^2_{\tilde{S}} = 2n^2 - 2\nu_E^2 l;$$

$$(h' \cdot z_i) = \left(\left(nh - \nu_E \sum_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda\right) \cdot \tilde{z}\right)_{\tilde{S}} = dn - l\nu_E;$$

$$(z_i \cdot z_i) = l(m-1) + d(1-M), \qquad (z_1 \cdot z_2) = Md - ml$$

(последние два результата получаются из очевидного равенства

$$(z_i \cdot (z_1 + z_2)) = (z_i \cdot \tilde{z}) = \left(\tilde{z} \cdot \left(h - \sum_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda\right)\right)_{\tilde{S}} = d - l$$

по формуле проекции и либо из формулы присоединения с учетом того, что K_S есть $\sigma^* K_{\overline{S}} + \frac{1}{2}\sigma^* \tilde{R}$, либо путем прямого вычисления пересечения $(z_1 \cdot z_2) = \frac{1}{2}(\tilde{z} \cdot \tilde{R})_{\tilde{S}}$)). Мы использовали таблицу умножения в $\mathrm{Num}\, \overline{S}$, вычисленную выше.

Отметим, что $d \geqslant l$ в точке x может собраться не более чем d ветвей кривой $\overline{C}$. Выше было установлено, что $\nu_E \leqslant n$. Поскольку $(h' - \nu_1 z_1 - \nu_2 z_2) \in \mathrm{Num}\, S$ — неотрицательный класс, получаем сле-

24*-8451

дующие неравенства:

$$\begin{aligned}
&\big((h' - \nu_1 z_1 - \nu_2 z_2)\cdot \sigma^* e_\lambda\big) = 2\nu_E - \nu_1 - \nu_2 \geqslant 0,\\
&\big((h' - \nu_1 z_1 - \nu_2 z_2)\cdot z_i\big) = dn - l\nu_E - \nu_i(l(m-1) + (1-M)d)\\
&\qquad\qquad - \nu_j(Md - ml) \geqslant 0, \qquad \{i,j\} = \{1,2\}.
\end{aligned}$$

Поскольку $l \leqslant d$, имеем $(z_1 \cdot z_2) > 0$, так что при замене ν_i на $2\nu_E - \nu_j$ в последнем неравенстве оно сохраняется:

$$dn - l\nu_E - (2\nu_E - \nu_j)(l(m-1) + (1-M)d) - \nu_j(Md - ml) \geqslant 0,$$

откуда элементарными вычислениями получаем:

$$dn + \nu_E((2M-2)d - (2m-1)l) - \nu_j((2M-1)d - (2m-1)l) \geqslant 0.$$

Очевидно, $2M - 2 \geqslant 2m - 1$, так что при замене ν_E на n неравенство снова сохранится и примет вид:

$$((2M-1)d - (2m-1)l)(n - \nu_j) \geqslant 0.$$

Поскольку левая скобка строго положительна, случай 1) исключен.

3.4. Исключение случая 2). Это совсем просто. Общая прямая $\overline{L} \subset \mathbb{P}^M$, пересекающая кривую $\overline{C}$, дает кривую $L = \sigma^{-1}(\overline{L})$, пересекающую C в двух точках. Линейная система $|\chi|$, ограниченная на L, дает линейный ряд степени $2n$ с двумя $\operatorname{mult}_C |\chi|$-кратными базисными точками. Этого не может быть, если $\operatorname{mult}_C |\chi| > n$, что и требовалось.

3.5. Исключение случая 3). Этот случай исключается так же, как и первый. Наметим лишь основные шаги. Строится поверхность $\overline{S}$, образ которой в $\mathbb{P}^M$ — снова конус с вершиной $a \in \mathbb{P}^M$ и базой $\overline{C}$. Далее, сечение Z — нормализация $\overline{C}$ — содержит точки z_λ, $\lambda \in \Lambda$, — прообразы точки x, и $\operatorname{pr}_X^{-1}(W) = Z \cup F$, где $Z \cap F = \{z_\lambda, \lambda \in \Lambda\} \cup \{z_\delta, \delta \in \Delta\}$, $\#\Delta = \mathcal{D}$, $\mathcal{D} = (2M-1)d - (2m-1)l$, $d = \deg \overline{C}$, $l = \#\Lambda$. Раздуем множество $Z \cap F$, тогда собственные прообразы $\tilde{Z}$ и $\tilde{F}$ не пересекаются. В качестве пробной поверхности S возьмем двойное накрытие раздутия, разветвленное над неособой кривой $\tilde{Z} \cup \tilde{F}$. Собственный прообраз $|\chi|_S$ линейной системы $|\chi|$ на S имеет единственную $\tilde{\nu} = \operatorname{mult}_C |\chi|$-кратную компоненту $\tilde{Z}$. Непосредственное вычисление индекса пересечения $\tilde{Z}$ со свободной кривой системы $|\chi|_S$ дает неравенство

$$dn - \frac{\tilde{\nu}}{2}(d + \mathcal{D}) \geqslant 0.$$

Легко видеть, что $\mathcal{D} \geqslant d$, откуда получаем $\tilde{\nu} \leqslant n$. Теорема 3 этим полностью доказана.

§ 4. Исключение бесконечно близких максимальных особенностей

Доказано, что линейная система $|\chi|$ не может иметь максимальных особенностей, стягивающихся на V в точку. Вместе с теоремами 2 и 3 это завершает доказательство теоремы 1.

4.1. Основная идея доказательства. Пусть $\nu \in \mathcal{N}(V_0)$ — максимальная особенность линейной системы $|\chi|$. Согласно теореме 3, $\varphi_0(Z(V_0,\nu))$ — точка, причем, если это точка v, то $Z(V_0,\nu) \neq E$. Доказательство теоремы 1 будет завершено, если мы покажем, что эта ситуация не может реализоваться.

На этой, основной, стадии доказательства в полную силу начинает работать конструкция пробной поверхности, уже использованная нами выше. Как и при исключении максимальных циклов, пробную поверхность необходимо строить возможно меньшей степени и в то же время цепляющей базисное множество линейной системы $|\chi|$ возможно "глубже". Ограничивая систему $|\chi|$ на пробную поверхность, получим линейную систему кривых, имеющую слишком много базисных точек, чтобы быть подвижной.

Такова схема нашего доказательства.

4.2. Техника дискретных нормирований. В данном разделе обозначения независимы от остальной части работы.

А) Разрешение дискретного нормирования.

Пусть $\nu \in \mathcal{N}(X)$, $B = Z(X,\nu)$, $\operatorname{codim} B \geqslant 2$, $\sigma_B : X(B) \to X$ — раздутие цикла B, $E(B) \subset X(B)$ — исключительный дивизор.

Предложение 4. *Реализуется одна из двух возможностей:*

(i) $\nu = \nu_B$,

(ii) $\nu \in \mathcal{N}(X(B))$, *и* $Z(X(B),\nu) \subset E(B)$ — *неприводимый цикл коразмерности* $\geqslant 2$ *и* $\sigma_B(Z(X(B),\nu)) = B$.

Доказательство очевидно.

Рассмотрим теперь последовательность бирациональных морфизмов:

$$\varphi_{i,i-1} : X_i \to X_{i-1}, \qquad i = 1, \dots, \tag{1}$$

где $X_0 = X$, $\varphi_{i,i-1}$ раздувает цикл $B_{i-1} = Z(X_{i-1},\nu)$ коразмерности $\geqslant 2$, с исключительным дивизором $E_i \subset X_i$. Для $i > j$ положим

$$\varphi_{i,j} = \varphi_{j+1,j} \circ \dots \circ \varphi_{i,i-1} : X_i \to X_j,$$

$\varphi_{i,i} = \mathrm{id}_{X_i}$. Собственный прообраз цикла на X_j, взятый на X_i ($i \geqslant j$), если он определен, обозначаем добавлением верхнего индекса i, например, $T^i \subset X_i$ для $T \subset X_j$.

Отметим (предложение 4), что $\varphi_{i,j}(B_i) = B_j$, $i \geqslant j$.

Теорема 4. *Последовательность* (1) *обрывается. Иными словами, существует такое* $K \in \mathbb{Z}_+$, *что*

$$(X_K, \varphi_{K,0}, E_K) \in \nu.$$

Доказательство теоремы вынесено в § 5.

Определение 3. Последовательность (1) назовем *разрешением* дискретного нормирования $\nu \in \mathcal{N}(X)$.

Разрешение не является инвариантом нормирования, а зависит от исходной модели X поля $K(X)$.

Конструкция разрешения позволяет определить на $\mathcal{N}(X)$ структуру частично упорядоченного множества и ориентированного графа, которые также зависят от X.

Определение 4. Для $\mu, \nu \in \mathcal{N}(X)$ положим

$$\nu \underset{X}{\leqslant} \mu,$$

если разрешение нормирования ν есть начальный отрезок разрешения μ. Далее, ν и μ соединены ориентированным ребром (стрелкой) из μ в ν:

$$\nu \underset{X}{\lessdot} \mu,$$

если $\nu \underset{X}{\leqslant} \mu$ и, в обозначениях последовательности (1) для разрешения μ, где $(X_L, \varphi_{L,0}, E_L) \in \nu$, $L < K$, имеем $B_{K-1} \subset E_L^{K-1}$.

Обозначим через $P(\mu, \nu)$ множество путей в ориентированном графе $\mathcal{N}(X)$ из μ в ν. Очевидно, $P(\mu, \nu) \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $\mu \underset{X}{\geqslant} \nu$. Положим

$$p(\mu, \nu) = \#P(\mu, \nu), \qquad p(\mu, \mu) = 1.$$

Введем также обозначение

$$s_k(X, \nu) = \sum_{\mu \in \mathcal{N}(X)} p(\nu, \mu)^k, \tag{2}$$

$k \in \mathbb{Z}_+$. Конечное вполне упорядоченное множество — подграф графа $\mathcal{N}(X)$, определяемый условием

$$\{\mu \in \mathcal{N}(X) |\ \mu \underset{X}{\leqslant} \nu\},$$

обозначим через $\mathcal{N}(X, \nu)$.

В обозначениях (1) для разрешения нормирования $\nu \in \mathcal{N}(X)$ положим для линейной системы $|\lambda|$ дивизоров Карьте на X: $|\lambda|^i$ — ее собственный прообраз на X_i, $m_i = \mathrm{mult}_{B_{i-1}} |\lambda|^{i-1}$, $\nu_i \in \mathcal{N}(X, \nu)$ — нормирование, реализуемое тройкой $(X_i, \varphi_{i,0}, E_i)$. Тогда

$$\nu(|\lambda|) = \sum_{i=1}^{k} p(\nu, \nu_i) m_i.$$

Кроме того, очевидно,

$$K(X,\nu)=\sum_{i=1}^{k}p(\nu,\nu_i)K(X_{i-1},\nu_i)=\sum_{i=1}^{k}p(\nu,\nu_i)(\operatorname{codim}B_{i-1}-1).$$

Б) Образ дискретного нормирования.

Пусть $\nu\in\mathcal{N}(X)$.

Определение 5. Морфизм многообразий $\pi : X \to Y$ назовем *ν-правильным*, если

(i) π доминантен;

(ii) $\pi(Z(X,\nu))\not\subset \operatorname{Sing}Y$,

(iii) дифференциал $d\pi$ сюръективен в общей точке $Z(X,\nu)$.

Зафиксируем ν-правильный морфизм $\pi\colon X\to Y$.

Теорема 5. *Существует единственное дискретное нормирование $\mu\in\mathcal{N}(Y)$ со следующими свойствами:*

(i) $Z(Y,\mu)=\pi(Z(X,\nu))$,

(ii) *для любой реализации $(\tilde{Y},\varphi,H)\in\mu$ морфизм $\mathrm{pr}_{\tilde{Y}}\colon X\times_Y\tilde{Y}\to\tilde{Y}$ ν-правильный, и $\mathrm{pr}_{\tilde{Y}}(Z(X\times_Y\tilde{Y},\nu))=H$.*

Нормирование μ назовем *образом* ν и будем обозначать через $\pi_*\nu$. Алгебраическое определение $\pi_*\nu$ очевидно: $\pi_*\nu\colon K(Y)\to\mathbb{Z}$ есть

$$\nu\circ\pi^*:\ K(Y)\xrightarrow[\pi^*]{}K(X)\xrightarrow[\nu]{}\mathbb{Z}.$$

Доказательство теоремы 5 содержится в § 5.

В) Рациональные кривые с предписанными ветвями.

Для плотного семейства кривых $C_t\subset X$, $t\in T$ (см. § 5) и бирационального морфизма $\varphi\colon\tilde{X}\to X$ определен собственный прообраз $\tilde{C}_t$, $t\in T$ (см. § 5).

Определение 6. Плотное семейство кривых C_t, $t\in T$, назовем *протыкающим* для дискретного нормирования $\nu\in\mathcal{N}(X)$, если для некоторой (и любой) реализации $(\tilde{X},\varphi,H)\in\nu$ алгебраическое множество $Y\subset H\times\tilde{T}$, определяемое условием

$$Y=\{(x,t)\in H\times\tilde{T}|\ x\in\tilde{C}_t\},$$

имеет компоненту Y_0, проекции которой на H и $\tilde{T}$ — плотные подмножества H и $\tilde{T}$, причем для общей точки соответствующее пересечение $\tilde{C}_t$ с H трансверсально.

Теорема 6. *Пусть $\nu\in\mathcal{N}(\mathbb{P}^M)$, $M\geqslant 2$. Для ν существует протыкающее семейство рациональных кривых степени, не превосходящей $s_1(\mathbb{P}^M,\nu)$.*

Доказательство теоремы приведено в [3].

4.3. Построение пробной поверхности. Вступают в силу все обозначения, связанные с изучаемым многообразием V. Положим также: $a \in \mathbb{P}^M$ — общая точка, $\beta\colon \tilde{X} \to X$ — ее раздутие, $\pi_a : \tilde{X} \to \mathbb{P}^{M-1}$ — проекция из точки a. Мы рассмотрим трудный случай $Z(\tilde{V}, \nu) \subset E$: если $\nu \in \mathcal{N}(V)$, то проходят все построения и вычисления с упрощениями. Пусть $\bar{x} = \beta(x) \in \mathbb{P}^{M-1}$, $\bar{\beta}\colon P \to \mathbb{P}^{M-1}$ — ее раздутие, $E(x) \subset P$ — исключительный дивизор. Пусть далее, $\overline{L} \subset \mathbb{P}^M$ — прямая, соединяющая a с x, $\tilde{L}$ — ее собственный прообраз на X_0, $L = \sigma^{-1}(\tilde{L}) \subset V_0$, $\sigma_L\colon \tilde{V} \to V_0$ — ее раздутие, $\pi : \tilde{V} \to P$ — композиция σ, $\bar{\varphi}_0$, β^{-1}, π_a и $\bar{\beta}^{-1}$, продолженная до регулярного отображения. Очевидно, при общем выборе a отображение π ν-правильное; оно расслаивает $\tilde{E}$ над $E(x) \cong \mathbb{P}^{M-1}$ на кривые — прообразы прямых на $\overline{E}$, проходящих через точку $\tilde{L} \cap \overline{E}$, относительно σ. Пусть

$$(Y, \varphi, \mathcal{D}) \in \pi_* \nu$$

— произвольная реализация нормирования $\pi_*\nu \in \mathcal{N}(P)$, $V^* = \tilde{V} \times_P Y$, $B = Z(V^*, \nu)$ — центр нормирования ν на V^*; проекцию pr_Y многообразия V^* на Y обозначим снова через π, так что $\pi(B) = \mathcal{D}$. Согласно теореме 6, существует плотное семейство рациональных кривых $(C_t, t \in T)$ на $\mathbb{P}^{M-1}$ степени, не превосходящей

$$s_1(\pi_*\nu, \mathbb{P}^{M-1}) = \pi_*\nu(E(\bar{x})) + s_1(P, \pi_*\nu)$$

и протыкающее для $\pi_*\nu$. Пусть $(C_t^*, t \in T)$ — собственный прообраз этого семейства на Y. Положим $S_t = \pi^{-1}(C_t^*) \subset V^*$.

Определение 7. Общую поверхность $S = S_t$ из построенного семейства назовем *пробной поверхностью* для ν.

Пусть $|\chi|^*$ — собственный прообраз линейной системы $|\chi|$ на V^*. Ограничение $|\chi|^*$ на S имеет, очевидно, базисное нормирование ν_S такое, что:

(i) $q = Z(S, \nu_S) \in B \cap S$ — неособая точка поверхности S,

(ii) $\mathcal{N}(S, \nu_S) \cong \mathcal{N}(V^*, \nu)$ как ориентированные графы,

(iii) $\nu_S(|\chi|^*|_S) = \nu(|\chi|)$.

Кроме того, $|\chi|^*|_S$ — линейная система кривых без неподвижных компонент для общей S.

Предложение 5. *Точка q входит в теоретико-схемное пересечение двух общих дивизоров линейной системы $|\chi|^*|_S$ с кратностью не меньшей, чем*

$$\frac{1}{s_2(S, \nu_S)} \nu^2(|\chi_0|).$$

Доказательство — прямое вычисление. Подробности см. в [2].

Поскольку пересечение двух общих кривых из линейной системы $|\chi|^*|_S$ есть, очевидно, нульмерная схема степени, не превосходящей

$$2n^2 s_1(\mathbb{P}^{M-1}, \pi_*\nu) - 2\nu_E^2 \pi_*\nu(E(\bar{x})),$$

получаем следующее неравенство:

$$2n^2 s_1(\mathbb{P}^{M-1}, \pi_*\nu) - 2\nu_E^2 \pi_*\nu(E(\bar{x})) \geqslant \frac{1}{s_2(S, \nu_S)} \nu^2(|\chi_0|).$$

4.4. Вычисления. Покажем, что этого не может быть. Прежде всего, вычислим каноническую кратность ν в терминах $\pi_*\nu$ и V^*:

$$K(V_0, \nu) = p(\nu, \nu_B) K(P, \pi_*\nu) + K(V^*, \nu).$$

Кроме того, имеем: $p(\nu, \nu_B) = p(\nu_S, \nu_q)$, $q = Z(S, \nu_S)$,

$$K(V^*, \nu) = s_1(V^*, \nu) = s_1(S, \nu_S) = K(S, \nu_S).$$

Далее, $\nu(E) \geqslant p(\nu, \nu_B)\pi_*\nu(E(\bar{x}))$. Окончательно, в силу теоремы 2, получаем неравенство

$$\begin{gathered} s_2(S, \nu_S)(2n^2 s_1(P, \pi_*\nu) + \pi_*\nu(E(\bar{x}))(2n^2 - 2\nu_E^2)) \geqslant \\ \geqslant (n(K(P, \pi_*\nu)p(\nu, \nu_B) + K(V^*, \nu)) + \\ +((M - m - 1)n - \nu_E)p(\nu, \nu_B)\pi_*\nu(E(\bar{x})))^2. \end{gathered}$$

В последней сумме первое слагаемое строго положительно, второе неотрицательно. Заметим теперь, что $s_2(S, \nu_S) \leqslant s_1(S, \nu_S)p(\nu, \nu_B)$ по построению, $s_1(P, \pi_*\nu) \leqslant K(P, \pi_*\nu)$, так что

$$2n^2 s_2(S, \nu_S) s_1(P, \pi_*\nu) \leqslant 2n^2 K(P, \pi_*\nu) p(\nu, \nu_B) K(V^*, \nu).$$

Отсюда получаем неравенство

$$\begin{gathered} s_2(S, \nu_S)\pi_*\nu(E(\bar{x}))(2n^2 - 2\nu_E^2) \geqslant \\ \geqslant n^2 K(P, \pi_*\nu)^2 p(\nu, \nu_B)^2 + K(V^*, \nu)^2 n^2 + \\ +2nK(V^*, \nu)((M - m - 1)n - \nu_E)p(\nu, \nu_B)\pi_*\nu(E(\bar{x})) + \\ +((M - m - 1)n - \nu_E)^2 p(\nu, \nu_B)^2 \pi_*\nu(E(\bar{x}))^2. \end{gathered} \tag{3}$$

Очевидно, $((M - m - 1)n - \nu_E) \geqslant n - \nu_E$. Далее,

$$(n^2 - \nu_E^2)\pi_*\nu(E(\bar{x}))s_2(S, \nu_S) \leqslant 2nK(V^*, \nu)(n - \nu_E)p(\nu, \nu_B)\pi_*\nu(E(\bar{x})).$$

В самом деле, $n + \nu_E \leqslant 2n$, а $s_2(S, \nu_S) \leqslant p(\nu, \nu_B)K(V^*, \nu)$, как было отмечено выше. Но тогда правая часть (3) строго больше чем левая! Этим завершается доказательство теоремы 1.

25-8451

§ 5. Геометрия дискретных нормирований

Даны элементарные доказательства теорем 4 и 5.

5.1. Алгебраические семейства циклов на многообразиях.

Определение 8. *Алгебраическим семейством k-циклов на многообразии X, $k \leqslant \dim X$*, называется объект, состоящий из:

(i) базы семейства — неприводимого многообразия B,

(ii) неприводимого подмногообразия $Z \subset B \times X$ такого, что для любого $b \in B$

$$\dim(Z \cap \{b\} \times X) = k.$$

Семейство будем записывать как $\Sigma = (B, Z)$.

Определение 9. Семейства $\Sigma_1 = (B_1, Z_1)$ и $\Sigma_2 = (B_2, Z_2)$ *эквивалентны*, если существуют открытые подмножества $U_i \subset B_i$ и изоморфизм $\varphi_{12} : U_1 \to U_2$ такие, что $(\varphi_{12}, \mathrm{id})$ определяет изоморфизм $Z_1 \cap U_1 \times X$ и $Z_2 \cap U_2 \times X$. Эквивалентные семейства различаться не будут.

Определение 10. *Носитель семейства* $\operatorname{supp} \Sigma$ есть замыкание множества $\mathrm{pr}_X(Z) \subset X$. Семейство *плотное*, если $\operatorname{supp} \Sigma = X$.

Очевидно, для плотного семейства, с учетом сделанного соглашения, определен его собственный прообраз относительно бирационального морфизма: он состоит из собственных прообразов тех членов семейства, для которых эта операция определена.

Определение 11. (i) Подмногообразие $W \subset X$ размерности $\leqslant k$ назовем *базисным* для алгебраического семейства k-циклов $\Sigma = (B, Z)$, если $W \subset Z_b = Z \cap \{b\} \times X$ для любого $b \in B$.

(ii) Подмногообразие $W \subset X$ коразмерности $\geqslant k+1$ назовем *цепляющим* для алгебраического семейства k-циклов $\Sigma = (B, Z)$, если $W \cap Z_b \neq \varnothing$ для любого $b \in B$.

Очевидно, точка $x \in X$ — цепляющая для Σ тогда и только тогда, когда она базисная точка.

Определение 12. Пусть $\Sigma = (B, Z)$ — семейство k-циклов на X, а $\Xi = (C, Q)$ — семейство l-циклов на B. *Композицией* $\Xi \circ \Sigma$ этих семейств назовем алгебраическое семейство циклов вида (C', R), где $C' \subset C$ — открытое плотное подмножество, а $R \subset C' \times X$ есть пересечение $\mathrm{pr}_{C \times X}(C \times Z \cap Q \times X)$ и $C' \times X$. Очевидно размерность циклов семейства $\Xi \circ \Sigma$ не превосходит $k + l$.

Теорема 7. *Пусть $\Sigma = (B, Z)$ — плотное алгебраическое семейство кривых на X, общий член которого неприводим. Тогда последовательность раздутий точек $\varphi_{i,i-1} : X_i \to X_{i-1}$, $X_0 = X$, $i \geqslant 1$, где*

каждое $\varphi_{i,i-1}$ раздувает базисную точку собственного прообраза Σ на X_{i-1}, обрывается.

Доказательство. Если две неприводимые кривые содержат бесконечную последовательность лежащих друг над другом бесконечно близких точек, то они совпадают, так как совпадают их разложения Тейлора – Пьюизо по локальному параметру ветви. Поскольку проективный предел системы непустых конечных множеств непуст, доказательство этим завершено.

5.2. Доказательство теоремы 4. Пусть $(\tilde{X}, \varphi, H) \in \nu$ — произвольная реализация нормирования $\nu \in \mathcal{N}(X)$. Рассмотрим плотное семейство неприводимых кривых $\Sigma = (C, Q)$ со следующими свойствами:

(i) ограничение $\Sigma\big|_H = (C', Q \cap C' \times H)$ есть плотное семейство 0-циклов на H, C' плотно в C,

(ii) не имеет цепляющих подмногообразий на $\tilde{X}$.

Очевидно, $\varphi_*\Sigma$ — плотное семейство неприводимых кривых на X, причем $B = Z(X, \nu) \subset X$ — цепляющий цикл для $\varphi_*\Sigma$ и, более того, $\Sigma\big|_B$ — плотное семейство 0-циклов на B.

В обозначениях п. 4.2 положим Σ^i — собственный прообраз семейства $\varphi_*\Sigma$ на X_i. Легко видеть, что циклы $B_i \subset X_i$ являются цепляющими для Σ^i. Поэтому для доказательства теоремы 4 достаточно установить, что семейство кривых $\varphi_*\Sigma$ не может иметь бесконечной последовательности лежащих друг над другом бесконечно близких цепляющих циклов.

Будем доказывать индукцией по $k \in \mathbb{Z}_+$ слеюующее утверждение: $(+_k)$ существует $K(k) \in \mathbb{Z}_+$ такое, что $\dim B_{K(k)} \geqslant k+1$.

Для $k = 0$ это следует из только что доказанной теоремы 7. Пусть для $l \leqslant k-1$ $(+_l)$ установлено. Докажем $(+_k)$.

Если $\dim B_{K(k-1)} \geqslant k+1$, то доказывать нечего. Значит, будем считать, что $B_{K(k-1)}$ — k-мерный цикл. Предположим, что для всех $i \geqslant K(k-1)$ $\dim B_i = k$, т.е. $\Sigma^{K(k-1)}$ имеет бесконечную последовательность лежащих друг над другом цепляющих циклов размерности k.

Рассмотрим достаточно общее семейство $\Xi = (D, T)$ алгебраических k-циклов на C. Тогда композиция $\Xi \circ \varphi_*\Sigma = \Lambda$ — плотное семейство $(k+1)$-циклов на X, причем его собственные прообразы Λ^i, $i \in \mathbb{Z}_+$, имеют циклы B_i уже базисными. Теперь возьмем общий цикл $Y \subset X_{K(k-1)}$ коразмерности k, трансверсально пересекающий $B_{K(k-1)}$ и такой, что ограничение $\Lambda^{K(k-1)}\big|_Y$ определено и является плотным семейством неприводимых кривых на Y. Полагая Y^i — собственный прообраз Y на X_i, $i \geqslant K(k-1)$, получим, что пересечение $Y^i \cap B_i$ нульмерно и непусто для всех $i \geqslant K(k-1)$, причем точки из $Y^i \cap B_i$ являются базисными для собственного прообраза алгебраического семейства кривых $\Lambda^{K(k-1)}\big|_Y$ на Y^i. Это противоречит теореме 7. Утверждение $(+_k)$ для любого $k \leqslant \dim X - 2$ и, тем самым, теорема 4 доказаны.

25*-8451

5.3. Доказательство теоремы 5. Очевидно, достаточно установить, что существует нормирование $\mu \in \mathcal{N}(Y)$ со свойствами (i) и (ii) для какой-нибудь специальной реализации μ. Рассмотрим произвольную реализацию $(\tilde{X}, \varphi, D) \in \nu$ и плотное семейство кривых $\Sigma = (C, Q)$ на $\tilde{X}$, описанное в начале п. 5.2. Его образ $\pi_*\varphi_*\Sigma$ на Y есть плотное семейство неприводимых кривых на Y. Раздуем последовательно его базисные точки, затем цепляющие циклы размерностей $1, 2, \ldots$. Из п. 5.2 следует, что через конечное число шагов мы получим многообразие $\tilde{Y}$ и плотное семейство кривых $(\widetilde{\pi_*\varphi_*\Sigma})$ на $\tilde{Y}$, не имеющее цепляющих циклов. Беря расслоенное произведение $X^* = X \times_Y \tilde{Y}$, видим, что морфизм $\mathrm{pr}_{\tilde{Y}} : X^* \to \tilde{Y}$ снова ν-правильный. Далее, цикл $Z(X^*, \nu)$ является цепляющим для собственного прообраза семейства $\varphi_*\Sigma$ на X^*. Но образ последнего семейства на $\tilde{Y}$ не имеет цепляющих циклов! Значит, $\mathrm{pr}_{\tilde{Y}}(Z(X^*, \nu)) \subset \tilde{Y}$ есть цикл коразмерности 1, т.е. простой дивизор Вейля, лежащий, очевидно, вне множества особых точек $\mathrm{Sing}\,\tilde{Y}$. Этот дивизор Вейля на $\tilde{Y}$ и реализует искомое дискретное нормирование $\pi_*\nu$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Исковских В.А., Манин Ю.И.* Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота// Мат. сб. — 1971. — *86*, № 1. — С. 140–166 (РЖМат, 1971, 12А538)
2. *Пухликов А.В.* Замечание о теореме В.А. Исковских и Ю.И. Манина о трехмерной квартике// Тр. Мат. ин-та АН. — 1995. — *208*
3. *Пухликов А.В.* Рациональные кривые с предписанными ветвями// Вестн. МГУ. Сер. I. — 1994.
4. *Пухликов А.В.* Бирациональные автоморфизмы двойного пространства и двойной квадрики// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1988. — *52*, № 1. — С. 229–239 (РЖМат, 1988, 6А482)
5. *Fano G.* Osservazioni sopra alcune varieta non razionali aventi tutti i generi nulli// Atti Acc. Torino. — 1915. — *50*. — С. 1067–1072
6. *Fano G.* Nouve ricerche sulle varieta algebriche a tre dimensioni a curve sezioni canoniche// Comm. Rent; Ac. Sci. A. — 1947. — *11*. — С. 635–720
7. *Iskovskih V.A., Pukhlikov A.V.* Birational automorphisms of Fano varieties// Geometry of Complex Projective Varieties. — Mediterranian Press, 1993. — С. 191–202
8. *Kollar J.* Nonrational hypersurfaces/ Preprint. — 1994. — 9 с.

УДК 511.2+512.7

В.Е. Воскресенский. Бирациональная геометрия линейных алгебраических групп и модули Галуа// Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Тематич. обзоры. Сер. Алгебраическая геометрия–2/ ВИНИТИ. — 1995. — *24.* — С. 5–156

Обзор посвящен кругу задач, возникших в результате успешных продвижений в вопросах бирациональной классификации многообразий линейных алгебраических групп. Особую роль играют модули Галуа, возникающие при проективных пополнениях линейных групп. Подробно изложены результаты последних лет в теории инвариантов конечных и связных групп преобразований: проблемы Э. Нётер, О. Зарисского, проблема подобия пар матриц. Излагается теория R-эквивалентности на линейных группах с приложением к теории полупростых групп, указаны приложения к арифметике линейных алгебраических групп. Библ. 111.

УДК 512.742

Ю.Г. Прохоров. О существовании хороших дивизоров на многообразиях Фано коиндекса 3, II// Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Тематич. обзоры. Сер. Алгебраическая геометрия–2/ ВИНИТИ. — 1995. — *24.* — С. 157–175

Продолжается изучение фундаментальной линейной системы на многообразиях Фано коиндекса 3, начатое в ранней работе автора. Библ. 24.

УДК 512.774.2

А. В. Пухликов. Бирациональные автоморфизмы двойных пространств с особенностями// Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Тематич. обзоры. Сер. Алгебраическая геометрия–2/ ВИНИТИ. — 1995. — *24.* — С. 177–196

Работа посвящена доказательству бирациональной жесткости двойных пространств индекса 1 произвольной размерности, имеющих особую точку. Библ. 8.

Изд. лиц. ИД № 04689 от 28.04.2001 г.

Подписано в печать 29.11.2001. Формат $60\times90^1/_{16}$.
Печать офсетная. Бумага офсетная № 1.
Печ. л. 12,5. Тираж 320 экз. Заказ 8451.

ВИНИТИ РАН
125190, Москва, ул. Усиевича, д. 20.

Отпечатано с готового оригинал-макета
в Производственно-издательском комбинате ВИНИТИ,
140010, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403.
Тел. 554–21–86.

200