

© В.М. ГРЯНИК

**ИЗЛУЧЕНИЕ ВОЛН РОССБИ И АДАПТАЦИЯ ПОЛЕЙ
ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ВИХРЯ В АТМОСФЕРЕ (ОКЕАНЕ)**

(Представлено академиком Г.С. Голицыным 9 VII 1992)

Крупномасштабные течения в атмосфере и океане развиваются вблизи гидростатического и геострофического равновесия, являются квазигеострофическими и вихревыми. Их эволюция описывается уравнением эволюции потенциального вихря Ω [1]:

$$(1) \quad \partial_t \Omega + [\psi, \Omega] + \beta \partial_x \psi = 0,$$

$$(2) \quad \Omega = \Delta \psi + \partial_z [(f^2/N^2) \partial_z \psi],$$

где ψ — функция тока, N — частота Брента-Вяйсяля, $f = f_0 + \beta y$ — параметр Кориолиса, $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}$, $[\cdot, \cdot] = (\partial_x)(\partial_y) - (\partial_y)(\partial_x)$ — операторы Лапласа и Якоби соответственно.

Адаптация геофизических полей к состоянию геострофического равновесия осуществляется путем излучения внутренних гравитационных и акустических волн и происходит без изменения потенциального вихря течений Ω [2]. Возникает вопрос об основном состоянии (или состояниях) в атмосфере, океане, к которым приводит последующая адаптация поля Ω , и о механизме такой адаптации. В линейном приближении ответ получен [3]: течения асимптотически (при $t \rightarrow \infty$) вырождаются в зональные за счет излучения волн Россби.

В атмосфере всегда присутствуют интенсивные вихревые образования — циклоны, антициклоны, а в океане — синоптические вихри, в этих условиях задача адаптации Ω является существенно нелинейной. Сразу отметим, что волны Россби — единственный тип волновых возмущений в системе, описываемой уравнением (1), так что их излучение является механизмом адаптации и в нелинейном случае.

В работе рассматривается задача о нелинейной адаптации в предположении, что поле Ω локализовано в конечном числе M финитных областей, и для его описания можно воспользоваться моделью точечных квазигеострофических вихрей [4]:

$$(3) \quad \Omega = \sum_{\alpha=1}^M \gamma_{\alpha} \delta(x - x_{\alpha}) \delta(y - y_{\alpha}) \delta(z - z_{\alpha}), \quad \gamma_{\alpha} = \int dr \Omega_{\alpha}.$$

Здесь $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, γ_{α} — интенсивности вихрей, $r_{\alpha}(t)$ — их координаты, эволюция которых описывается уравнениями

$$\dot{\gamma}_{\alpha} = 0, \quad \dot{z}_{\alpha} = 0,$$

$$(4) \quad \dot{x}_{\alpha} = - \sum_{\beta \neq \alpha} \gamma_{\beta} \partial_{y_{\alpha}} G(x_{\alpha\beta}, y_{\alpha\beta}, z_{\alpha}, z_{\beta}),$$

$$y_{\alpha} = - \sum_{\beta \neq \alpha}^M \gamma_{\beta} \partial_{x_{\alpha}} G(x_{\alpha\beta}, y_{\alpha\beta}, z_{\alpha}, z_{\beta}),$$

где $G(x, t, z/x_0, y_0, z_0)$ функция Грина краевой задачи для оператора Ω в (1), см. [4]. Представление (2) и уравнения (3) являются точными при $r \ll \ll \min [|\dot{x}_\alpha|/\beta, |\dot{y}_\alpha|/\beta]$.

Если динамика вихрей такова, что выполняются условия для излучения волн Россби, волны отбирают энергию у вихревой системы: $\delta E < 0$. Энергия взаимодействия вихрей

$$(5) \quad E = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha < \beta} \gamma_\alpha \gamma_\beta G(x_{\alpha\beta}, y_{\alpha\beta}, z_\alpha, z_\beta)$$

может изменяться при этом только за счет изменения расстояний между вихрями, так как волны Россби не уносят завихренность и $\gamma_\alpha = \text{const}$, $\alpha = 1, 2, \dots, M$. Учитывая, что взаимодействие между вихрями парное, а функция Грина — отрицательная монотонно возрастающая функция своих аргументов, для двух вихрей из (5) и условия $\delta E < 0$ имеем

$$(6) \quad \text{sign } \delta r_{\alpha\beta} = \text{sign}(\gamma_\alpha \gamma_\beta).$$

Таким образом, в приближении парного взаимодействия вихревой процесс адаптации поля Ω состоит в разбегании областей (вихрей) с завихренностями одного знака и сближении областей (вихрей), знаки завихренностей которых противоположны. При этом в первом случае имеется тенденция к передаче энергии системы по спектру в область малых волновых чисел k , а во втором — в обратном направлении.

Рассмотрим конкретный элементарный процесс адаптации в модели конечной атмосферы ($0 \leq z \leq H$) с постоянной частотой Брента–Вяйсяля. Функция Грина оператора Ω с граничными условиями обращения в нуль вертикальной скорости на подстилающей поверхности и при $z = H$ (H — высота однородной атмосферы, или глубина океана) имеет в этом случае вид

$$(7) \quad G = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [G_0(x - x_0, \zeta - \zeta_0 - 2Dn) + G_0(x - x_0, \zeta + \zeta_0 - 2Dn)],$$

$$G_0(x, \zeta) = -\frac{N}{4\pi f} (x^2 + \zeta^2)^{-1/2},$$

где $\zeta = (N/f)z$, $D = (N/f)H$.

Согласно уравнениям (3) вихри при условии

$$(8) \quad \Gamma = \sum_{\alpha=1}^M \gamma_\alpha = 0$$

могут образовывать квазистационарные состояния, движущиеся с постоянной скоростью c . Условие резонансного возбуждения волн Россби

$$(9) \quad c = c_\Phi, \quad c_\Phi = -\beta(k_\perp^2 + (\pi m/H)^2)^{-1},$$

где c_Φ — фазовая скорость волн Россби, m — номер моды, выполняется, в частности, при движении системы вихрей строго на запад ($c < 0$). Волновое поле находим, решая линеаризованное уравнение (2) с граничными условиями излучения при $r \rightarrow \infty$ и сращивая с решением (2) в области локализации вихрей $|r_{\alpha\beta}| \ll r \ll \lambda$.

Вычисляя интенсивность излучения I , получаем

$$I = -\frac{c}{32} \left(\frac{N}{fD} \right)^2 \left[k_0^3 D_0^2 + 4 \sum_{m=1}^{m_*} (4k_m \Gamma_m^2 + k_m^3 D_m^2) \right], \quad (10)$$

$$\Gamma_m = \sum_{\alpha=1}^M \gamma_\alpha \cos \frac{\pi m \zeta_\alpha}{D}, \quad \mathbf{d}_m = \sum_{\alpha=1}^M \gamma_\alpha \mathbf{x}_\alpha \cos \frac{\pi m \zeta_\alpha}{D},$$

где $k_m = (\beta/c - \pi^2 m^2/D^2)^{1/2}$, $m_* = [(D/\pi)(\beta/c)^{1/2}]$ — целая часть аргумента.

Интенсивность излучения (10) определяет скорость диссипации энергии вихревой системы (5)

$$(11) \quad \dot{E} = -I.$$

Подставляя в (11) выражения (5) и (10) с учетом (7), находим уравнение эволюции расстояния между вихрями в рассматриваемом случае.

Пусть вихревая система состоит из двух вихрей с интенсивностями $\gamma_1 = -\gamma_2 = \gamma$, так что условие (8) удовлетворяется. Скорость системы вихрей

$$(12) \quad c = -\frac{\gamma N b}{4\pi f} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \{ [b^2 + (a_- - 2Dm)^2]^{-3/2} + [b^2 + (a_+ - 2Dm)^2]^{-3/2} \},$$

где $b = y_{12}$, $a_\pm = (N/f)(z_1 \pm z_2)$, $D = (N/f)H$. Уравнение эволюции вихрей следует из (11) и (10), (12):

$$\dot{b} = \Phi(b),$$

$$(13) \quad \Phi(b) = -\frac{\gamma}{32H^2} \left\{ b^2 \left(k_0^3 + 4 \sum_{m=1}^{m_*} k_m^3 \cos^2 \frac{\pi m a_+}{2D} \cos^2 \frac{\pi m a_-}{2D} \right) + 64 \sum_{m=1}^{m_*} k_m \sin^2 \frac{\pi m a_+}{2D} \sin^2 \frac{\pi m a_-}{2D} \right\}.$$

Уравнение (13) интегрируется в квадратурах.

Если $c < c_1$ ($m_* < 1$), излучается только баротропная мода. Интегрирование уравнения (13) дает при $b \gg D$, когда $c = -\gamma/Hb$:

$$(14) \quad b(t) = b_0 \left(1 + \frac{t}{t_\infty} \right)^{-2/5}, \quad t_\infty = \frac{64}{9} \frac{\gamma^{1/2}}{\beta^{3/2} H^{1/2} b_0^{5/2}},$$

где $b_0 = b(0)$, ср. [6]. При $a_\pm \ll b \ll D$, $c = \gamma N/4\pi f b^2$ и из (13) находим

$$(15) \quad b(t) = b_0 \left(1 + \frac{t}{t_b} \right)^{-1/4}, \quad t_b = \frac{\gamma^{1/2} N^{3/2} H}{(\pi \beta f)^{3/2} b_0^4}.$$

Уменьшение расстояния между вихрями сопровождается, согласно (12), уменьшением их скорости, одновременно при этом уменьшается и интенсивность излучения, см. (10). Уменьшение скорости вихря ограничивается значением c_R , если $c_R > c_*$, где c_* — максимум скорости (12), достигаемый при $b = b_*$, $c_R = -\beta R_0^2$ — предельная скорость волн Россби, R_0 — радиус Россби—Обухова. (Для оценки можно принять значения $c_* = 3^{-3/2} \gamma N/2\pi f a_-^2$, $b_* = 2^{-1/2} a_-$ при $a_\pm \ll D$.) При $c < c_R$ вихри движутся без излучения [5]. Если $c_* > c_R$, то вихри с течением времени, достигнув скорости c_* , начинают с уменьшением расстояния увеличивать скорость (см. (12)), так что интенсивность излучения при этом снова возрастает. При $b \ll a_\pm$,

$c \approx \gamma N b / 4 \pi a^3$ (где $a_{\pm} \neq 0$ и $a^{-3} = a_-^{-3} + a_+^{-3}$) из (13) получаем

$$(16) \quad b(t) = b_0 \left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^2, \quad t_c = \frac{2 \gamma^{1/2} N^{3/2} H b_0^{1/2}}{(\pi \beta f)^{3/2} a^{3/2}}.$$

Вихри коллапсируют за конечное время t_c . Подчеркнем, что t_c дает оценку для времени коллапса сверху. Действительно, когда достигаются скорости такие, что $c_1 \leq c < c_2$ ($1 \leq m_* < 2$), начинает излучаться и первая бароклинная мода. Согласно неравенствам $k_m b \ll 1$, в правой части (13) доминирует вклад от первого члена, если только $a_{\pm} = 0$, и от третьего, если $a_{\pm} \neq 0$. В последующем с уменьшением расстояния между вихрями к излучению подключаются и высшие бароклинные моды. Интенсивность излучения возрастает и процесс сближения вихрей ускоряется. Таким образом, конечная стадия адаптации поля потенциальной завихренности состоит в формировании ускоряющихся (при $t \rightarrow \infty$) квазибаротропных дипольных систем ($a_{\pm} = 0$) и в формировании за конечное время t_c стационарирующихся бароклиновых вихрей с вертикальной осью ($a_{\pm} \neq 0$).

Процессы нелинейной адаптации поля потенциальной завихренности могут играть существенную роль в динамике циклонов (антициклонов) средних широт и тропических циклонов в атмосфере, а также синоптических вихрей в океане.

Благодарю Г.С. Голицына, В.П. Гончарова и М.В. Курганского за полезные обсуждения работы.

Институт физики атмосферы
Российской Академии наук
Москва

Поступило
26 VIII 1992

ЛИТЕРАТУРА

1. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика. М.: Мир, 1984.
2. Монин А.С., Обухов А.М. — ДАН, 1958, т. 122, № 1, с. 58.
3. Добрышман Е.М. Динамика экваториальной атмосферы, 1980.
4. Гряник В.М. — Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1983, т. 19, № 5, с. 467.
5. Гряник В.М. — Там же, 1988, т. 24, № 12, с. 1251.
6. Курганский М.В. В сб.: Исследование вихревой динамики и энергетики атмосферы и проблема климата. М., 1990, с. 123.