Л. А. Аксентьев, И. А. Зорин, О классах многолистных аналитических функций, решающих задачу Гильберта, *Изв. вузов. Матем.*, 1991, номер 12, 77–80

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1991 МАТЕМАТИКА № 12(355)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Л. А. Аксентьев, И. А. Зорин

УДК 517.544

О КЛАССАХ МНОГОЛИСТНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ РЕШАЮЩИХ ЗАДАЧУ ГИЛЬБЕРТА

1. В данной статье установлены соответствия между решениями задач Гильберта и классами многолистных функций, обладающих определенными геометрическими свойствами. В частности, обосновано влияние индекса задачи на порядок листности ее решения (теоремы 1 и 2).

Рассмотрим в единичном круге $E=\{z:|z|<1\}$ задачу Гильберта с кусочно-постоянными коэффициентами

$$\operatorname{Im}[e^{-i\gamma_k} f(e^{i\theta})]=c_k, \quad \theta\in(\varphi_k, \varphi_{k+1}), \quad k=\overline{1, n}, \tag{1}$$

$\varphi_{n+1}=\varphi_1+2\pi$; γ_k, c_k — постоянные величины. Как в [1] (с. 314), обозначим через $h(a_1, \ldots, a_s)$ класс решений этой задачи, ограниченных в точках $a_k=e^{i\varphi_k}$, $k=\overline{1, s}$, $s\leqslant n$, и неограниченных в остальных $n-s$ точках.

Для обоснования теоремы, показывающей зависимость порядка листности решения задачи 1) от ее индекса, потребуется

Лемма 1. *Решением задачи* (1) *в классе* $h(a_1, \ldots, a_s)$ *является функция*

$$f(z)=C_1\int\limits_0^z \prod_{k=1}^{q}(z-b_k)(1-\overline{b}_k z)\prod_{k=1}^{m}(z-e^{i\alpha_k})\prod_{k=1}^{n}(z-e^{i\varphi_k})^{\delta_k-1}dz+C_2, \tag{2}$$

причем индекс задачи $\varkappa$ *и количество параметров, входящих в выражение* (2), *связаны соотношением*

$$\varkappa=2-n+2q+m, \tag{3}$$

C_1, C_2, b_k — *комплексные параметры*, $|b_k|<1$, $k=\overline{1, q}$, α_k — *вещественные параметры*, $k=\overline{1, m}$; $0\leqslant\delta_k<1$, $k=\overline{1, s}$; $-1<\delta_k\leqslant 0$, $k=\overline{s+1, n}$.

Поясним доказательство леммы 1. Решением задачи (1) является функция, отображающая E на область, ограниченную прямыми или их частями. Поэтому функцию, решающую задачу Гильберта, можно записать в виде обобщенного интеграла Кристофелля — Шварца, отображающего E на многолистный многоугольник. В точках единичной окружности для производной функции (2) будем иметь

$$\arg(e^{\theta} f'(e^{i\theta}))=(q+1)\theta+m\theta/2+\sum_{k=1}^{n}(\delta_k-1)\theta/2+A(\theta),$$

где $A(\theta)$ — кусочно-постоянная функция со скачками при $\theta=\theta_k$, $k=\overline{1, n}$. Из условия прямолинейности границ образа единичной окружности и определения индекса получим (3).

Отметим, что если $(\gamma_k-\gamma_{k-1})/\pi=\beta_k$ — целое число, то δ_k будет равно нулю. При этом в случае $c_k=(-1)^{\beta_k}c_{k-1}$ решение будет ограничено в окрестности точки a_k, т. е. φ_k совпадет с одним из значений α_k, $k=\overline{1, m}$. Если же $c_k\neq(-1)^{\beta_k}c_{k-1}$, то решение будет иметь логарифмическую особенность в точке $a_k=e^{i\varphi_k}$.

В дальнейшем понадобятся определения некоторых классов многолистных функций, введенных Д. Стайером [2].

Определение 1. Функция $f(z)$ принадлежит классу $S_w(p)$ слабо звездообразных функций порядка p, если $f(z)$ регулярна в E и существует регулярная функция $h(z)=z+a_2z^2+\ldots$, однолистная, звездообразная и такая, что

$$f(z)=h^p(z)\prod_{k=1}^{p}\psi(z, z_k),$$

где $\psi(z, z_k)=(z-z_k)(1-\overline{z}_k z)/z$ и $|z_k|\leqslant 1$, $k=\overline{1, p}$.

Определение 2. Регулярная в E функция $F(z)$, $F(0)=0$, принадлежит классу $K_w(p)$ слабо почти выпуклых функций порядка p, если существует функция $f(z)\in S_w(p)$, $f(0)=0$, такая, что $\operatorname{Re}[zF'(z)/f(z)]>0$, $z\in E$; $f(z)=zF'(z)\in S_w(p)\Longleftrightarrow F(z)\in S_w^0(p)$.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Решение $f(z)$ задачи Гильберта* (1) *принадлежит классу $K_w(p)$ при $p=[(\varkappa+n)/2]$ ($[\alpha]$ означает целую часть числа α). Если $\varkappa+n=2$, то решение $f(z)$ принадлежит классу $S^0(1)$ однолистных выпуклых функций; при $\varkappa+n=3$ решение $f(z)$ принадлежит классу $K(1)$ однолистных почти выпуклых функций.*

Доказательство теоремы проводится при помощи леммы 1 и структурных формул соответствующих классов многолистных функций.

Частный случай задачи (1), когда γ_k поочередно равно нулю и $\pi/2$, а число участков является четным ($n=2m$), называется смешанной краевой задачей. Для такой задачи из теоремы 1 получим

Следствие. Решение смешанной краевой задачи, имеющей $2m$ точек стыка $\{a_k, b_k\}$, $k=\overline{1, m}$, с постоянными коэффициентами c_k будет p-листной функцией, причем величина p не выходит за границы последовательности целых чисел с такими крайними значениями:

1) $\{1, [m/2]\}$, если отыскивается решение в классе функций, ограниченных в окрестности всех точек;

2) $\{[m/2]+\delta(m/4), m\}$, если решение ограничено в окрестности точек a_k и неограничено в окрестности точек b_k, причем $\delta(\beta)=\{0$, когда $\beta=[\beta]$; 1, когда $\beta\neq[\beta]\}$;

3) $\{[m/2]+\delta(m/4), [3m/2]\}$, если решение неограничено в окрестности всех точек $\{a_k, b_k\}$.

Следствие уточняет результаты, полученные в [3].

2. В структурные формулы классов многолистных функций входят множители вида $z-c_k$, $|c_k|\leqslant 1$, характеризующие либо нули функции, либо точки ветвления, т. е. нули производной. Поэтому, чтобы установить вложение в определенный класс многолистных функций решения задачи Гильберта, нужно знать возможное число нулей решения или нулей производной решения.

Рассмотрим краевую задачу Гильберта для единичного круга

$$\operatorname{Im}[e^{-i\omega(\theta)}f(e^{i\theta})]=c(\theta),\ \theta\in[0, 2\pi],\tag{4}$$

где коэффициенты задачи всюду на ∂E удовлетворяют условию Гёльдера, за исключением, быть может, конечного числа точек $a_k=e^{i\theta_k}$, $k=\overline{1, n}$, где они имеют разрывы первого рода, либо $c(\theta)$ в окрестности точки a_k, $k=\overline{1, n}$, имеет представление $c(\theta)=\operatorname{Im}[\varphi(z)/(z-a_k)^{p_k}]$, $z=e^{i\theta}$, $p_k=p_k'+ip_k''$, $0<p_k'<1$, $\varphi(z)$ — аналитическая в E, непрерывно продолжимая на ∂E функция. Обозначим через ω_k дробную часть величины $(\omega(\theta_k-0)-\omega_k(\theta_k+0))/\pi$, $\sigma_k=\omega_k-p_k'$, $N(\partial E)$ и $P(\partial E)$ — соответственно число нулей и полюсов решения задачи (4), принадлежащих ∂E; $N(E)$ — число нулей решения, лежащих в E; $\varkappa$ — индекс задачи в искомом классе функций [4] (§ 46).

Пусть решение задачи отыскивается в классе $h(a_1, \ldots, a_s)$. Тогда будет справедлива

Лемма 2. *Если существует конечное число точек, в которых $c(\theta)$ либо обращается в нуль, либо имеет разрыв, причем при переходе через $2m$ из них $c(\theta)$ меняет знак, то $2N(E)\leqslant\varkappa+s+2m$. Если $c(\theta)\neq 0$, когда θ пробегает отрезок $[0, 2\pi]$, то $2N(E)=\varkappa+s+2m$, $-P(\partial E)\geqslant\sum_{\sigma_k<0}\sigma_k+\sum_{\sigma_k>0}(\sigma_k-1)$. Для однородной задачи ($c(\theta)\equiv 0$) выполняется равенство*

$$2N(E)+N(\partial E)-P(\partial E)=\varkappa+s-n+\sum_{k=1}^{n}\omega_k.$$

Для доказательства леммы применяются формулы Сохоцкого и принцип аргумента.

В случае, когда рассматривается однородная задача с гёльдеровым коэффициентом, лемма была доказана И. Н. Векуа [5] (с. 198).

Замечание. Равенство (3) в лемме 1 можно получить при помощи леммы 2, рассматривая соответствующую однородную задачу для производной $f'(z)$.

Используя лемму, найдем условия на коэффициенты задачи Гильберта, при выполнении которых устанавливается принадлежность решения задачи определенному классу многолистных функций.

Обозначим через Ω класс функций $\omega(\theta)$, удовлетворяющих всюду на ∂E условию Гёльдера, за исключением конечного числа точек, где они имеют разрывы первого рода, и неубывающих на интервалах непрерывности. Тогда верна

Теорема 2. *Решение однородной задачи Гильберта*

$$\operatorname{Im}[e^{-i\omega(\theta)} f(e^{i\theta})] = 0, \; \theta \in [0, 2\pi],$$

принадлежит классу $S_w(\varkappa)$, *если* $\omega(\theta) \in \Omega$.

Решение $f(z)$ *задачи Гильберта для производной*

$$\operatorname{Im}[e^{-i\omega(\theta)} f'(e^{i\theta})] = c(\theta), \; \theta \in [0, 2\pi],$$

принадлежит классу $K_w(\varkappa + 1)$, *если* $c(\theta) > 0$ $(c(\theta) < 0)$ *и* $\omega(\theta) + \theta \in \Omega$. *Решением однородной задачи является слабо выпуклая функция порядка* $\varkappa + 1$, *т. е.* $f(z) \in S_w^0(\varkappa + 1)$, *если* $\omega(\theta) + \theta \in \Omega$.

Теорема 3. *Решение краевой задачи Гильберта*

$$\operatorname{Im}[e^{-i\gamma_k} f(e^{i\theta})] = c_k(\theta), \quad \theta \in (\varphi_k, \varphi_{k+1}), \; k = \overline{1, n}, \tag{5}$$

$0 \leqslant \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_n < 2\pi$, $\varphi_{n+1} = \varphi_1 + 2\pi$, γ_k — *постоянные*, $k = \overline{1, n}$, *в классе функций, ограниченных в точках стыка или имеющих там особенности с порядками, меньшими* $\delta_k = (\gamma_k - \gamma_{k-1})/\pi$, $k = \overline{1, n}$, $\gamma_0 = \gamma_n - 2\pi p$, *будет не более чем р-листным, если* $0 \leqslant \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_n < 2\pi p$, $\gamma_k - \gamma_{k-1} < \pi$, $k = \overline{1, n}$, *и* $c_k(\theta)$ — *неубывающие функции.*

К задаче вида (5) приводится обратная краевая задача, в которой условия для искомой функции $w(t) = \Phi_k(t_k)$ задаются через граничные параметры $t_k = \alpha_k + \operatorname{Im}(e^{-i\gamma_k} t)/l_k$, $k = \overline{1, n}$, где вещественные постоянные α_k и l_k, $l_k > 0$, определяются в процессе решения. Постановка и решение этой задачи аналогичны случаю обратных краевых задач в постановке Р. Б. Салимова ([6], § 9).

Теорему 3 можно переформулировать в виде условий p-листности (в частности, в виде условий однолистности) решения этой обратной краевой задачи.

3. Удобными для вложения в определенные геометрические классы являются решения задач вида

$$\operatorname{Re}[e^{i\beta} e^{i\theta} f'(e^{i\theta})/f(e^{i\theta})] = c(\theta), \; \beta = \text{const}; \tag{6}$$

$$\operatorname{Re}[e^{i\beta} e^{i\theta} f'(e^{i\theta}) \overline{f(e^{i\theta})}] = c(\theta) \Longleftrightarrow \operatorname{Re}[e^{i\beta} e^{i\theta} f'(e^{i\theta})/f(e^{i\theta})] = c(\theta)/|f(e^{i\theta})|^2. \tag{7}$$

При $c(\theta) \geqslant 0$ получим, что любое решение задачи (6) или задачи (7) оказывается спиралеобразной функцией при постоянном β. Задачи, родственные (7), возникают в некоторых приложениях (напр., для течений Хеле-Шоу [7]).

Порядок листности решений задач (6) или (7) зависит от нормировки этих решений в начале координат. Условие

$$f(z) = a_p z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \ldots, \; a_p \neq 0,$$

при целом $p \geqslant 1$ обеспечивает p-листную спиралеобразность для любого решения задач (6) и (7).

Комбинированием однородных задач Гильберта для самой функции и для ее производной получается задача

$$\operatorname{Im}[a_1(\theta) e^{-i\omega_1(\theta)} f(e^{i\theta}) + a_2(\theta) e^{-i\omega_2(\theta)} f'(e^{i\theta})] = 0. \tag{8}$$

В частном случае задачу (8) представим в виде

$$\operatorname{Im}\{e^{-i\omega_1(\theta)} [cf(e^{i\theta}) + e^{i\theta} f'(e^{i\theta})]\} = 0, \tag{9}$$

где c — комплексная постоянная, и сформулируем такое утверждение.

Теорема 4. *Если* $\omega_1(\theta) \in \Omega$, $\varkappa$ — *индекс задачи*

$$\operatorname{Im}[e^{-i\omega_1(\theta)} g(e^{i\theta})] = 0 \tag{10}$$

и $\operatorname{Re} c > 0$, *то решение задачи* (9) *является слабо звездообразной функцией порядка* $\varkappa$.

Доказательство опирается на связь решений задач (9) и (10) с помощью оператора Бернарди

$$f(z)=(c+1)\,z^{-c}\int_0^z t^{c-1}\,g(t)\,dt,$$

сохраняющего класс звездообразных функций при $\operatorname{Re} c>0$ [8]. Кроме того, применяется теорема 2 для задачи (10).

Представляется правдоподобным утверждение о принадлежности решения задачи (8) тому же классу $S_w(\varkappa)$, если $\omega_1(\theta)\in\Omega$ ($\varkappa$ — индекс функции $\exp(i\omega_1(\theta))$), $|\omega_2(\theta)+\theta-\omega_1(\theta)|<\pi/2$ и $a_k(\theta)$, $k=1, 2,$ — неотрицательные непрерывные функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения.— 2-е изд.— М.: Физматгиз, 1962.— 600 с.
2. Styer D. Close-to-convex multivalent functions with respect to weakly starlike functions // Trans. Amer. Math. Soc.— 1972.— V. 169.— P. 105—112.
3. Аксентьев Л. А. Достаточные условия многолистности интегральных представлений // Тр. семин. по краевым задачам.— Казань, 1980, вып. 17.— С. 3—17.
4. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.— 3-е изд.— М.: Наука, 1977.—640 с.
5. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции.—2-е изд.— М.: Наука, 1988.— 510 с.
6. Салимов Р. Б. Некоторые основные задачи об изменении контуров теории аналитических функций и их приложения к механике жидкости.— Казань, 1970.—364 с.
7. Хохлов Ю. Е. Точные решения в задаче о течениях Хеле — Шоу // ДАН СССР.— 1990.— Т. 315.— № 1.— С. 80—83.
8. Bernardi S. D. Convex and starlike univalent functions // Trans. Amer. Math. Soc.— 1969.— V. 135.— P. 429—446.

г. Казань
г. Киров

Поступила
30.07.1990

Е. Я. Браверман

УДК 517.983

ОПЕРАТОР ВНУТРЕННЕЙ СУПЕРПОЗИЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ ДИСКРЕТНЫХ МЕР

§ 1. Определение

Оператору внутренней суперпозиции

$$(Sx)(t)=\begin{cases} B(t)\,x\,[g(t)], & \text{если } g(t)\in[a, b];\\ 0, & \text{если } g(t)\notin[a, b],\end{cases}\tag{1}$$

где B есть $(n\times n)$-матрица измеримых функций, g — измеримая, x — суммируемая на $[a, b]$ функции, посвящены многочисленные исследования (отметим [1] — [5], а также обзор [6]). В теории функционально-дифференциальных уравнений [7], [8] возникает вопрос о том, как понимать выражение $B(t)x[g(t)]$, если x — не суммируемая функция, а дискретная мера (сумма счетного числа дельта-функций Дирака с векторными коэффициентами) [9], [10].

Введем обозначения. Пусть R^n — пространство n-мерных векторов $x=\operatorname{col}\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ с нормой $\|x\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\xi_i|$, через $\|\cdot\|$ будем также обозначать норму $(n\times n)$-матрицы, согласованную с нормой в R^n; m — мера Лебега; Σ есть σ-алгебра измеримых подмножеств отрезка $[a, b]$; T^* — пространство, сопряженное к пространству T; $\langle\Phi, \varphi\rangle$ — значение функционала $\Phi\in T^*$ на элементе $\varphi\in T$. Будем пользоваться следующими обозначениями пространств функций $x:[a, b]\to R^n$: L — пространство суммируемых функций, $\|x\|_L=\int_a^b\|x(s)\|\,ds$, B^n — пространство ограниченных на $[a, b]$ функций, $\|x\|_{B^n}=\sup\limits_{s\in[a, b]}\|x(s)\|$, C — пространство непрерывных функций, $\|x\|_C=\max\limits_{s\in[a, b]}\|x(s)\|$. Определим подпространства DR и $L\delta$ пространства C^*:

$$DR=\{\delta\in C^*\mid \delta=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\delta_{\tau_i},\ a_i\in R^n,\ \tau_i\in[a, b],\ i=\overline{1, \infty},\ \tau_i\neq\tau_j,\ \text{если } i\neq j\},$$