О. К. Шейнман, Двойственность в некоторых дискретных задачах минимизации, *УМН*, 1978, том 33, выпуск 2, 211

ДВОЙСТВЕННОСТЬ В НЕКОТОРЫХ ДИСКРЕТНЫХ ЗАДАЧАХ МИНИМИЗАЦИИ

О. К. Шейнман

В настоящей заметке для задач минимизации вида

$$(1)\qquad \min\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} g_j x_j = g_0;\ x_j \in \mathbb{Z},\ x_j \geqslant 0\ (j=1, \ldots, n)\right\}$$

(где числа c_j соизмеримы; $g_0, g_1, \ldots, g_n$ — элементы абелевой группы G, причем $g_1, \ldots, g_n$ порождают G) строится аналог двойственной задачи линейного программирования.

Если $G \subset \mathbb{Z}^m$ при некотором m, задача (1) является задачей целочисленного линейного программирования (ЦП); если G конечна, получаем так называемую задачу Гомори.

Пусть φ — гомоморфизм $\mathbb{Z}^n$ в G, определенный формулой $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} g_j x_j$ ($x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$), и пусть $(\mathbb{Z}^n)^+ = \{x \in \mathbb{Z}^n \colon x \geqslant 0\}$. Тогда φ отображает $(\mathbb{Z}^n)^+$ на полугруппу G^+ всех неотрицательных целочисленных комбинаций элементов $g_1, \ldots, g_n$. Следовательно, каждой функции γ на G^+ можно сопоставить функцию $\varphi^*\gamma$ на $(Z^n)^+$, определяемую формулой $(\varphi^*\gamma)(x) = \gamma(\varphi(x))$.

Функция γ на G^+ называется субаддитивной, если для $\forall g', g'' \in G^+$ $\gamma(g' + g'') \leqslant \gamma(g') + \gamma(g'')$. Пусть Γ обозначает множество субаддитивных функций на G^+. Назовем следующую задачу двойственной к задаче (1):

$$(2)\qquad \max\{\gamma(g_0) \mid \gamma \in \Gamma;\quad \varphi^*\gamma \leqslant c\}$$

(запись $\varphi^*\gamma \leqslant c$, означает, что $(\varphi^*\gamma)(x) \leqslant \sum c_j x_j$ для $\forall x \in (\mathbb{Z}^n)^+$).

Лемма. *Задача* (2) *эквивалентна следующей задаче*:

$$(3)\qquad \max\{\gamma(g_0) \mid \gamma \in \Gamma;\quad \gamma(g_j) \leqslant c_j\ (j = 1, \ldots, n)\}.$$

Пусть $c(x) = \sum c_j x_j$. Допустим, что области определения задач (1) и (3) непусты. Следующая теорема аналогична первой теореме двойственности линейного программирования.

Теорема 1. 1) *Если x удовлетворяет ограничениям задачи* (1), *а γ — ограничениям задачи* (3), *то* $\gamma(g_0) \leqslant c(x)$.

2) *Существуют такие x^* и γ^*, удовлетворяющие ограничениям соответствующих задач, что* $\gamma^*(g_0) = c(x^*)$.

Доказательство. 1) Пусть $x \in (\mathbb{Z}^n)^+$ и $\sum g_j x_j = g_0$; $\gamma \in \Gamma$ и $\gamma(g_j) \leqslant c_j$ ($j = 1, \ldots, n$). Тогда $\gamma(g_0) \leqslant \sum \gamma(g_j) x_j \leqslant \sum c_j x_j = c(x)$. 2) Рассмотрим граф F, вершинами которого служат элементы полугруппы G^+, и из каждой вершины g выходит n дуг, соединяющих g с $g + g_j$ ($j = 1, \ldots, n$). Тогда любому $x \in (\mathbb{Z}^n)^+$, такому, что $\sum g_j x_j = g$, соответствует путь от 0 до g в графе F. Назовем длиной дуги $(g, g + g_j)$ число c_j (независимо от g). Пусть $\gamma^*(g)$ — длина кратчайшего пути от 0 до g в графе F (существование такового следует из соизмеримости чисел c_j). Тогда γ^* субаддитивна (неравенство треугольника) и $\gamma^*(g_j) \leqslant c_j$. Если x^* — кратчайший путь от 0 до g_0, то по определению $\gamma^*(g_0) = c(x^*)$. Теорема доказана.

Следствие. *x^* и γ^*, определенные теоремой* 1, *являются точкой минимума и точкой максимума соответствующих задач.*

Рассмотрим случай, когда (1) — задача ЦП. Тогда в численных методах решения задачи (1) большую роль играют отсечения — гиперплоскости, отделяющие вершину многогранника $M = \{x \geqslant 0 \colon \sum g_j x_j = g_0\}$, в которой принимается $\min\limits_M c(x)$, от множества $M \cap (\mathbb{Z}^n)^+$. Говорят, что отсечение $(f, x) \geqslant f_0$ сильнее отсечения $(f', x) \geqslant f_0'$, если

$$M \cap \{x\colon (f, x) \geqslant f_0\} \subset M \cap \{x\colon (f', x) \geqslant f_0'\}.$$

Теорема 2. *Для любого отсечения найдется такая функция $\gamma \in \Gamma$, что $\sum \gamma(g_j) x_j \geqslant \gamma(g_0)$ — не менее сильное отсечение.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Т. Х у, Целочисленное программирование и потоки в сетях, М., «Мир», 1974.

Поступило в Правление общества 15 июня 1976 г.