Ю. Л. Ершов, Разрешимость теории класса полей $\mathfrak{F}_*^f$, *Докл. РАН*, 1994, том 336, номер 6, 733–736

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1994, том 336, № 6, с. 733 - 736

МАТЕМАТИКА

УДК 518.5

РАЗРЕШИМОСТЬ ТЕОРИИ КЛАССА ПОЛЕЙ $\mathfrak{F}^f_*$

© 1994 г. Академик Ю. Л. Ершов

Поступило 18.02.94 г.

В настоящей работе подтверждается гипотеза, высказанная в работе автора [1], знакомство с которой предполагается.

Напомним (см. Г), [1], что через $\mathfrak{F}_*$ обозначается класс всех полей F характеристики 0, которые удовлетворяют следующим условиям: существует элемент $\pi \in F$ такой, что:

a) $\langle F, W_\pi\rangle \in RC_\pi$,

b) Γ_R – Z-группа для любого $R \in W_\pi$,

c) $\pi p^{-1} \in R(F) = R_\pi(F)$ для всех простых $p \in Z \le \le \mathbb{Q} \le F$,

d) $\bar{R}(F) \rightleftharpoons R(F)/J(R(F))$ – элементарное регулярное кольцо (см. Г) [2].

e) $\langle F, W_\pi\rangle$ максимально, т.е. не существует собственного сепарабельного алгебраического расширения $F_0 > F$ такого, что для любого $R \in W_\pi$ $F_0 \le H_R(F)$.

В работе [1] дан критерий элементарной эквивалентности двух полей из $\mathfrak{F}_*$ (теорема 3). Ниже мы дадим переформулировку этого критерия в терминах аксиоматизируемости полной теории поля из $\mathfrak{F}_*$.

Пусть $F \in \mathfrak{F}_*$ и π – соответствующий элемент. Пусть $F_0 \rightleftharpoons \mathrm{Abs}F$ – алгебраическое замыкание $\mathbb{Q}$ в F, $R_0 \rightleftharpoons R(F) \cap F_0$; $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in R_0$; $\beta_0, \ldots, \beta_k \in F_0 \setminus R_0$; $\Phi(x_0, \ldots, x_n)$ – формула сигнатуры σ_f такая, что

$$\bar{R}(F) = R(F)/J(R(F)) \vDash$$
$$\vDash \Phi(\alpha_0 + J(R(F)), \ldots, \alpha_n + J(R(F))).$$

Пусть K – конечное расширение Галуа поля $\mathbb{Q}$ такое, что $\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \beta_0, \ldots, \beta_k \in K$; $K_0 \rightleftharpoons K \cap F_0$; $h(x) \in Z[x]$ – унитарный неприводимый над $\mathbb{Q}$ многочлен такой, что $K_0 = \mathbb{Q}(\alpha_h)$, где α_h – один из корней многочлена h. Если $K \ne K_0$, то пусть $K_1, \ldots, K_s$ – все минимальные промежуточные поля $K_0 < K_i \le K$, $i = 1, \ldots, s$. Пусть $f_i \in Z[x]$ унитарный неприводимый, такой, что $K_i = \mathbb{Q}(\alpha_{f_i})$, $i = 1, \ldots, s$; $f \rightleftharpoons \prod_{i=1}^{s} f_i$ (если $K = K_0$, то $f \rightleftharpoons 1$). Для элементов $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$, $\beta_0, \ldots, \beta_k$ ($\in K_0$) существует многочлены $g_0, \ldots, g_n$, $h_0, \ldots, h_k \in \mathbb{Q}[x]$ степени меньшей, чем степень многочлена h, такие, что $\alpha_0 = g_0(\alpha_h), \ldots, \alpha_n = g_n(\alpha_h)$; $\beta_0 = h_0(\alpha_h), \ldots, \beta_k = h_k(\alpha_k)$. Полагаем

$$\Psi_{K, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \Phi} \rightleftharpoons \forall x(f(x) \ne 0) \wedge$$
$$\wedge \exists x\,(h(x) = 0 \wedge \bigwedge_{i \le n} cR(g_i(x)) \wedge \bigwedge_{i \le k} \neg R(h_i(x)) \wedge$$
$$\wedge \Phi^*(g_0(x), \ldots, g_n(x)),$$

где Φ^* связана с Φ так, что для любой пары $\langle F', R'\rangle$, где F' – поле частных кольца $R' \le F'$, $a_0, \ldots, a_n \in R'$, имеет место эквивалентность

$$\langle F', R'\rangle \vDash \Phi^*(a_0, \ldots, a_n) \Leftrightarrow a_0, \ldots, a_n \in R' \wedge R'/J(R') \vDash$$
$$\vDash \Phi(a_0 + J(R'), \ldots, a_n + J(R')).$$

Предложение 1. *Элементарная теория поля F определяется следующей системой аксиом:*

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{F}_*) \cup \{\Psi_{K\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \Phi} \mid F \vDash \Psi_{K\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \Phi}\}.$$

Это, по существу, переформулировка теоремы 3 из [1].

Замечание. Если $F \vDash \Psi_{K^0, \bar{\alpha}^0, \bar{\beta}^0, \Phi^0}$, $F \vDash \Psi_{K^1, \bar{\alpha}^1, \bar{\beta}^1, \Phi^1}$, то существуют K, $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, Φ такие, что $F \vDash \Psi_{K, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \Phi}$ и для любого $F' \in \mathfrak{F}_*$

$$F' \vDash \Psi_{K, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \Phi} \to \Psi_{K^0, \bar{\alpha}^0, \bar{\beta}^0, \Phi^0} \wedge \Psi_{K^1, \bar{\alpha}^1, \bar{\beta}^1, \Phi^1}.$$

Действительно, если $K \rightleftharpoons K^0K^1$; $\bar{\alpha} \rightleftharpoons \bar{\alpha}^0, \bar{\alpha}^1$; $\bar{\beta} \rightleftharpoons \bar{\beta}^0, \bar{\beta}^1$ и

$$\Phi(x_0, \ldots, x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots, x_{n_0+n_1+1}) \rightleftharpoons$$
$$\rightleftharpoons \Phi^0(x_0, \ldots, x_{n_0}) \wedge \Phi^1(x_{n_0+1}, \ldots, x_{n_0+n_1+1}),$$

Научно-исследовательский институт математико-информационных основ обучения Новосибирского государственного университета

то $\Psi_{K,\bar\alpha,\bar\beta,\Phi}$ удовлетворяет сформулированному условию.

Класс $\mathfrak{F}^f_*$ состоит из всех таких $F \in \mathfrak{F}_*$, что $R(F)/J(R(F))$ является элементарным произведением конечных полей (заметим, что это равносильно тому, что $R(F)/J(R(F))$ есть $\exists$-произведение конечных полей).

Используя результаты из [1, 2], можно эффективно выписать систему аксиом для класса $[\mathfrak{F}^f_*]$ полей F из $\mathfrak{F}_*$ таких, что $R(F)/J(R(F))$ принадлежит аксиоматическому замыканию класса элементарных произведений конечных полей (т.е. для любого предложения Φ, истинного в $R(F)/J(R(F))$, существует элементарное произведение R_* конечных полей такое, что $R_* \models \Phi$).

Для разрешимости теории класса полей $\mathfrak{F}^f_*$ ($[\mathfrak{F}^f_*]$) достаточно установить, что для любого предложения вида $\Psi_{K,\bar\alpha,\bar\beta,\Phi}$ можно эффективно узнать, существует ли $F \in [\mathfrak{F}^f_*]$ такое, что $F \models \Psi_{K,\bar\alpha,\bar\beta,\Phi}$. Укажем, как это можно сделать.

Пусть заданы $h, f, g_0, \ldots, g_n, h_0, \ldots, h_k \in \mathbb{Q}[x], \Phi(\bar x)$; предполагаем (проверив) непроводимость $h(\in Z[x]$; пусть K – поле разложения многочлена $h \cdot f$; $K_0 \rightleftharpoons \mathbb{Q}(\alpha_h)$; $\alpha_i \rightleftharpoons g_i(\alpha_h)$, $i = 0, \ldots, n$; $\beta_i \rightleftharpoons h_i(\alpha_h)$, $i = 0, \ldots, k$.

Если f имеет корень в K_0, то $\Psi_{K,\bar\alpha,\bar\beta,\Phi}$ несовместно $\mathrm{Th}([\mathfrak{F}^f_*])$.

Пусть f не имеет корней в K_0.

Пусть N – наименьшее общее кратное всех знаменателей ненулевых коэффициентов многочленов $g_i, h_j \in \mathbb{Q}[x]$, $i \le n$, $j \le k$; тогда $Ng_i, Nh_j \in Z[x]$, $i \le n, j \le k$. Пусть S – множество всех простых делителей числа N; $\pi_S \rightleftharpoons \prod_{p \in S} p$. Пусть $W \rightleftharpoons \{R \mid R$ – кольцо π_S-нормирования поля K_0 и $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in R\}$.

Для формулы $\Phi(x_0, \ldots, x_n)$ выберем определяющую последовательность [2].

$$\langle \Psi(X_0, \ldots, X_t); \quad \psi_0(x_0, \ldots, x_n), \ldots, \psi_t(x_0, \ldots, x_n)\rangle$$

так, чтобы выполнялись условия:

1) $\Psi(\bar X) \to \mathrm{Part}(\bar X)$;

2) существует $0 \le u \le t+1$ такое, что $\psi_i \to \pi_S = 0$, $i < u$; $\psi_i \to \pi_S \ne 0$, $u \le i \le t$.

Не уменьшая общности, можно предполагать также справедливость условий:

3) $\Psi(\bar X) \to \bigwedge_{i \le t}(X_i \ne 0)$;

4) существуют $I \subseteq \{0, \ldots, t\}$; $0 \ne n_i \in \omega$, $i \in I$ такие, что $\Psi(\bar X) \to |X_i| = n_i$, $i \in I$, и для любого $n > 0$ $\Psi(\bar X)$ выполнима в некоторой булевой алгебре такой, что $|X_i| \ge n$ для всех $i \in \{0, \ldots, t\} \setminus I$.

Пусть $I_0 \rightleftharpoons I \cap \{0, \ldots, u\}$. Для $0 \le i < u$ пусть $W_i \rightleftharpoons \{R \mid R \in W$, существует конечное расширение $G \ge F_R$ такое, что $G \models \psi_i$, $(\bar\alpha_0, \ldots, \bar\alpha_n)$; здесь $\bar\alpha_j \rightleftharpoons \alpha_j + \mathfrak{m}(R), j \le n\}$.

Замечание 1. Алгоритмически разрешима проблема: по конечному полу G, формуле $\Phi(x_0, \ldots, x_n)$, элементам $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in G$ узнать, существует ли конечное расширение $G_0 \ge G$ такое, что $G_0 \models \Phi(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$.

Замечание 2. Указанная выше проблема равносильна проблеме: по конечному полю G, формуле $\Phi(x_0, \ldots, x_n)$, элементам $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in G$ узнать, существует ли поле $F' \in [\mathfrak{F}_f]$ такое, что $F' \ge G$ и $F' \models \Phi(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$.

Ищем теперь подмножество $\bar W \subseteq W$ такое, чтобы выполнялись следующие условия:

1) для любого $j \le k$ существует $R \in \bar W$ такое, что $\beta_j \notin R$;

2) для любого $i < u$ можно выбрать подмножество $\bar W_i \subseteq W_i$ так, что $\bar W_i \ne \varnothing$; $|\bar W_i| \le n_i$, если $i \in I_0$; $\bigcup_{i<u} \bar W_i = \bar W$.

Если такого $\bar W$ не существует, то $\Psi_{K,\bar\alpha,\bar\beta,\Phi}$ не выполнима в $[\mathfrak{F}^f_*]$.

Действительно, пусть $F \in [\mathfrak{F}^f_*]$ и $F \models \Psi_{K,\bar\alpha,\bar\beta,\Phi}$; пусть $\bar W \rightleftharpoons \{R' \cap K_0 \mid R' \in W_\pi, \pi_S \in \mathfrak{m}(R')\}$. Пусть $j \le k$; так как $\beta_j \notin R_\pi \rightleftharpoons \cap\{R' \mid R' \in W_\pi\}$, то существует $R' \in W_\pi$ такое, что $\beta_j \notin R'$; тогда $R' \cap K_0 \ne K_0$ и существует простое p такое, что $p \in \mathfrak{m}(R')$; если $p \nmid \pi_S$, то β_j целое над R' и, следовательно, $\beta_j \in R'$, что невозможно. Тогда $p \mid \pi_S$, $\pi_S \in \mathfrak{m}(R')$, $R \rightleftharpoons R' \cap \cap K \in \bar W$ и $\beta_j \notin R$.

Пусть $i < u$ и $\bar W_i \rightleftharpoons \{R' \cap K_0 \mid R' \in W_\pi$, $\pi_S \in \mathfrak{m}(R')$, $F_{R'} \models \psi_i(\bar\alpha_0, \ldots, \bar\alpha_n)\}$; тогда по условиям 2) и 3) на определяющую последовательность $\bar W_i \ne \varnothing$ и $\bigcup_{i<u} \bar W_i = \bar W$; кроме того, из условия 4) на определяющую последовательность следует, что

$$|\overline{W}_i| \le |\{R' | R' \in W_\pi, \pi_S \in \mathfrak{m}(R'),$$
$$F_{R'} \models \psi_i(\bar{\alpha}_0, \ldots, \bar{\alpha}_n)\}| = n_i$$

для $i \in I_0$.

Замечание. Проверка существования $\overline{W}$, $\overline{W}_i \subseteq W$, $i < u$, таких, что выполнены условия 1) и 2), может быть осуществлена эффективно.

Итак, *если таких* $\overline{W}$, $\overline{W}_i$, $i < u$, *нет, то* $\Psi_{K, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \Phi}$ *не совместна с* $\mathrm{Th}([\mathfrak{F}^f_*])$.

Пусть $\overline{W}$, $\overline{W}_i$, $i < u$, удовлетворяющие условиям 1) и 2), выбраны.

Проверим для каждого i, $u \le i \le t$, совместно ли с $\mathrm{Th}(\mathfrak{F}_f)$ предложение $\psi_i^* \rightleftharpoons \exists x(h(x) = 0 \wedge \psi_i(g_0(x), \ldots, g_n(x)))$. *Если для некоторого* i, $u \le i \le t$, ψ_i^* *не совместно с* $\mathrm{Th}(\mathfrak{F}_f)$, *то* $\Psi_{K, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \Phi}$, *очевидно, не совместно с* $\mathrm{Th}(\mathfrak{F}^f_*)$.

Если же все ψ_i^*, $u \le i \le t$, совместны с $\mathrm{Th}(\mathfrak{F}_f)$ (что проверяется эффективно), то *предложение* $\Psi_{K, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \Phi}$ *совместно с* $\mathrm{Th}(\mathfrak{F}^f_*)$. Более того, *существует поле* $F \in \mathfrak{F}_*$ *такое, что* $\bar{R}(F) \simeq \prod_{i \le T} G_i^{B_i}$ *для подходящих* $T \in \omega$, *конечных полей* G_i, $i \le T$, *и булевых алгебр* B_i, $i \le T$.

Действительно, если выполнены все условия, то можно найти такое конечное расширение $\bar{K} \ge K_0$, что K и $\bar{K}$ линейно разделены над K_0 ($\bar{K} \|_{K_0} K$), существуют конечные непустые множества W_i, $i \le t$, колец нормирований поля K такие, что для $W \rightleftharpoons \bigcup_{i \le t} W_i$ $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in R_W \rightleftharpoons \cap\{R | R \in W\}$; $\beta_0, \ldots, \beta_k \notin R_W$; $W_i \cap W_j = \varnothing$, $0 \le i < j \le t$; $|W_i| = n_i$ для $i \in I$; если $R \in W_i$, то $F_R \models \psi_i(\bar{\alpha}_0, \ldots, \bar{\alpha}_n)$, и если $R \in W$, то существует простое $p \in R$ такое, что $v_R(p) = 1$; можно добиться того, что для $i < u$

$$\{R \cap K_0 | R \in W_i\} = \overline{W}_i.$$

Построение такого расширения $\bar{K}$ осуществляется с помощью теоремы 2 из § 3 статьи [3].

Далее с помощью теоремы 1 из [4] можно построить такое регулярное расширение $\bar{F} \ge \bar{K}$ и булево семейство $\overline{W}$ колец нормирований поля $\bar{F}$ такие, что $\langle \bar{F}, \overline{W} \rangle \in RC^*$; для любого $\bar{R} \in \overline{W}$ $\bar{R} \cap \bar{K} \in W$ и $\bar{R}$ – надстройка $\bar{R} \cap \bar{K}$ и для любого $R \in W$ $\overline{W}_R \rightleftharpoons \{\bar{R} | \bar{R} \cap \bar{K} = R\}$ гомеоморфно заданному булеву пространству X_R. Выберем булевы пространства X_R, $R \in W$, так, что если

$$X_i \rightleftharpoons \dot{\bigcup_{R \in W_i}} X_R, \quad i \le t, \quad X \rightleftharpoons \dot{\bigcup_{i \le t}} X_i,$$

то

$$\mathbb{B}(X) \models \Psi(X_0, \ldots, X_t),$$

где $\mathbb{B}(X)$ – булева алгебра открыто-замкнутых подмножеств булева пространства X; заметим, что $X_0, \ldots, X_t \in \mathbb{B}(X)$. Кольцо $R_{\overline{W}}/J(R_{\overline{W}})$ изоморфно кольцу $\prod_{R \in W} F_R^{\mathbf{B}(X_R)}$, т.е. является элементарным произведением конечных полей.

Замечание. Если через π_* обозначить произведение всех простых p таких, что существует $R \in W$, для которого $p \in \mathfrak{m}(R)$, то $W \subseteq W_{\pi_*} = W_{\pi_*}(\bar{K})$. Для этого же π_* будет выполнено и $\overline{W} \subseteq W_{\pi_*}(\bar{F})$ (на самом деле $\overline{W} = W_{\pi_*}(\bar{F})$).

Для завершения построения нужны следующие два утверждения, представляющие и самостоятельный интерес.

Предложение 2. *Пусть* W – *булево семейство колец нормирований поля* F *и* F *плотно в* $\mathbb{H}_R(F)$ *для любого* $R \in W$. *Тогда существуют сепарабельное алгебраическое расширение* F_0 *поля* F *и булево семейство колец нормирований* W_0 *поля* F_0 *такие, что отображение* $R_0 \mapsto R_0 \cap F$, $R_0 \in W_0$ *есть гомеоморфизм* W_0 *и* W; $R_0 \cap F \le R_0 \le (R_0 \cap F)^h$ *для всех* $R_0 \in W_0$ *и* $\langle F_0, W_0 \rangle$ *максимально.*

Предложение 3. *Если* $\langle F, W \rangle$ – RC-*поле и* W *независимо, а* $\langle F_0, W_0 \rangle$, *как в предложении 2, то* $\langle F_0, W_0 \rangle$ – RC-*поле.*

С помощью предложения2 находим для $\langle \bar{F}, \overline{W} \rangle$ максимальное сепарабельное алгебраическое расширение $\langle F_0, W_0 \rangle$ такое, что отображение $R_0 \mapsto R_0 \cap \bar{F}$, $R_0 \in W_0$ есть гомеоморфизм W_0 и $\overline{W}$; $R_0 \cap \bar{F} \le R_0 \le (R_0 \cap \bar{F})^h$ для любого $R_0 \in W_0$. По предложению 3 $\langle F_0, W_0 \rangle \in RC$ (по следствию предложения 8 из [4], так как $W_0 = W_{\pi_*}(F_0)$, то $\langle F_0, W_0 \rangle \in RC^*$). Так как $R_0 \le (R_0 \cap \bar{F})^h$ и $R_0 \cap \bar{F}$ – надстройка $R_0 \cap \bar{K}$, то Γ_{R_0} есть Z-группа и, следовательно, из

$$\bar{R}_{\pi_*}(F_0) = R_{\pi_*}(F_0)/J(R_{\pi_*}(F_0)) \simeq \bar{R}_{\pi_*}(\bar{F}) =$$
$$= R_{\pi_*}(\bar{F})/J(R_{\pi_*}(\bar{F})) \simeq \prod_{R \in W} F_R^{\mathbf{B}(X_R)}$$

следует, что $\langle F_0, W_0 \rangle \in \mathfrak{F}^f_*$. $F_0 \models \Psi_{K, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \Phi}$ по построению.

Из проведенных выше рассмотрений и вытекает

Теорема. *Класс полей $\mathfrak{F}^f_*$ имеет разрешимую элементарную теорию.*

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93–011–16014).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ершов Ю.Л.* // Алгебра и логика. 1993. Т. 32. № 6. С. 643 - 664.
2. *Ершов Ю.Л.* // Там же. № 4. С. 452 - 460.
3. *Ершов Ю.Л.* // Успехи матем. наук. 1983. Т. 37. № 3. С. 55 - 93.
4. *Ершов Ю.Л.* // Алгебра и логика. 1993. Т. 33. № 4. С. 457 - 471.
5. *Ершов Ю.Л.* // Там же. 1992. Т. 31. № 6. С. 592 - 623.