Известия КБНЦ РАН, № 1 (8), 2002

МАТЕМАТИКА

УДК 517.958:531.72

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ БЕЗНАПОРНОГО ДВИЖЕНИЯ ГРУНТОВЫХ ВОД

Л.И. СЕРБИНА

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ КБНЦ РАН, г. НАЛЬЧИК

1. ФОРМУЛИРОВКА МОДЕЛИ

Анализ задач фильтрации и диффузии в однородных и неоднородных средах при некоторых физико-химических допущениях показывает, что они сводятся в основном к решению краевых, начальных и смешанных задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка эллиптического и параболического типов при соответствующих краевых и начальных условиях. Однако указанные типы линейных уравнений не отражают физический факт ограниченности скорости распространения любого возмущения в анизотропных средах.

Рассмотрим уравнение одномерного движения грунтовых вод при отсутствии внешнего воздействия на поток [1, с. 433]

$$\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{k}{m}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(h\frac{\partial h}{\partial \xi}\right), \tag{1}$$

где $h=h(\xi,t)$ – уравнение свободной слабо изогнутой поверхности в момент времени $t\geq 0$, которая колеблется около средней высоты, $k=const$ – коэффициент фильтрации, m – пористость грунта, $0<\xi<l$.

Нелинейное уравнение Буссинеска (1) является уравнением параболического типа. Существуют различные методы его линеаризации [1. с. 434].

Первый способ можно интерпретировать следующим образом. Множитель h в круглой скобке уравнения (1) заменяется некоторым постоянным значением h_{cp}. Тогда получается линейное уравнение

$$\frac{\partial h}{\partial t}=a\frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2}, \tag{2}$$

где постоянная величина $a=kh_{cp}/m$ называется коэффициентом уровнепроводности. Коэффициент a определяется, как правило, экспериментальным путем.

Такой способ линеаризации связывает с уравнением (2) нелокальное краевое условие вида

$$h_{cp}=\frac{1}{l}\int_0^l h(x,t)\,dx=\frac{am}{k} \tag{3}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l h(x,t)\,dx=0. \tag{4}$$

Чтобы описать второй способ, перепишем уравнение (1) в виде

$$\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{k}{2m}\frac{\partial^2 h^2}{\partial \xi^2}. \tag{5}$$

В уравнении (5) введем новую зависимую переменную $\upsilon=h^2$. Тогда для $\upsilon=\upsilon(\xi,t)$, в классе неотрицательных решений уравнения (5) получим уравнение

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t}=\frac{k}{m}\sqrt{\upsilon}\,\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial \xi^2}. \tag{6}$$

Теперь положим, что $\sqrt{\upsilon} = h_{cp} = \dfrac{am}{k}$. (7)

Тогда из (6) получим линейное уравнение $\dfrac{\partial \upsilon}{\partial t} = a \dfrac{\partial^2 \upsilon}{\partial \xi^2}$. (8)

При первом способе линеаризации для установившегося движения уравнение свободной поверхности $\partial^2 h / \partial x^2 = 0$ дает прямую $h(x,t) = Ax + B$, что не соответствует действительности, в то время как при втором способе получаем параболу Дюпюи: $h(x,t) = \sqrt{Ax + B}$, где A и B – постоянные величины [1, с. 435].

Гипотеза (7) инициирует для уравнения (8) нелинейное и нелокальное краевое условие

$$\int_0^l \sqrt{\upsilon(x,t)}\, dx = \frac{am}{k} l. \tag{9}$$

Главным недостатком приведенных двух способов линеаризации уравнения (5) является тот факт, что уравнения (2) и (8) не могут адекватно описывать волновые процессы. Известно, что уравнение (5) обладает волновым решением. В частности, уравнение (5) с начально-краевым условием

$$h(\xi,0) = 0, \quad h(0,t) = \alpha t, \tag{10}$$

где $\alpha = const > 0$, представляет собой математическую модель равномерного подъема воды в канале. Решение уравнения (5), удовлетворяющее условию (10), задается формулой (см. [1, с. 447])

$$h(\xi,t) = \begin{cases} \alpha t - \xi \sqrt{\dfrac{m\alpha}{k}}, & \text{при} \quad 0 \le \xi \le t\sqrt{\dfrac{\alpha k}{m}}, \\ 0, & \text{при} \quad \xi > t\sqrt{\dfrac{\alpha k}{m}}. \end{cases} \tag{11}$$

Как видно из (11), депрессионная линия представляет отрезок прямой, перемещающейся параллельно самой себе с постоянной скоростью распространения переднего края

$$\frac{d\xi}{dt} = \sqrt{\frac{\alpha k}{m}} = c. \tag{12}$$

Схема третьего способа линеаризации уравнения (5) такова. Решение уравнения (5) ищется в классе функций, дважды непрерывно дифференцируемых по времени t. Любое решение $h = h(\xi,t)$ уравнения (5) является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \frac{k}{m} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(h \frac{\partial h}{\partial t}\right). \tag{13}$$

Множитель $\partial h / \partial t$ в круглой скобке уравнения (13) заменяется интегральным средним его значением на сегменте $0 \le \xi \le l$, зависящим только от времени t:

$$l\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_{cp} = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l h(\xi,t)\, d\xi = \mu(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{14}$$

где $\mu(t)$ – заданная функция, определяемая методом идентификации, а T – расчетное время.

Условие (14) интерпретируется как нелокальное краевое условие для уравнения (13). При наличии (14) уравнение (13) аппроксимируется следующим линейным уравнением:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \frac{k}{m} \mu(t) \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2}. \tag{15}$$

При долгосрочном прогнозе динамики грунтовых вод функция $\mu(t)$ неоднократно может менять свой знак. Поэтому уравнение (15), как правило, является уравнением смешанного типа, и оно принимается в качестве математической модели динамики грунтовых вод.

Уравнение (15) является уравнением гиперболического типа при $\mu(t) > 0$ и эллиптического типа при $\mu(t) < 0$. Оно параболически вырождается, когда $\mu(t) = 0$.

При $\mu(t) = \alpha$ уравнение (15) в силу (12) переходит в одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2}. \tag{16}$$

Погрешность, допускаемую при переходе от модели (13) к (16), в какой-то степени можно компенсировать за счет добавления в правой части равенства (14) «флуктуирующих» сил $f(t)$, которые преобразуют условие (14) к виду

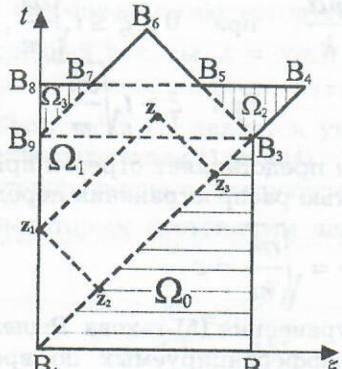
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^l h(\xi, t) d\xi = \varphi_\mu(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{17}$$

где функция $\varphi_\mu(t) = \mu(t) + f(t)$ не обязательно совпадает с $\mu(t)$.

Будем считать функцию $\varphi_\mu(t)$ заданной для всех моментов времени от начального $t = 0$ до расчетного $t = T$ и предполагать, что $\varphi_\mu(t) \in C[0, T] \cap C^2]0, T[$.

2. АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ГРУНТОВЫХ ВОД, ОСНОВАННОЙ НА ВОЛНОВОМ УРАВНЕНИИ С НУЛЕВЫМ НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Пусть Ω – многоугольная область на евклидовой плоскости точек (ξ, t), ограниченная отрезками



$B_1=(0,0)$;
$B_2=(l,0)$;
$B_3=(l,l/c)$;
$B_4=(cT,T)$;
$B_5=(2l-cT,T)$;
$B_6=(3l/2,l/2c)$;
$B_7=(l+cT,T)$;
$B_8=(0,T)$;
$B_9=(0,l/c)$.

fig. №1.

$B_1B_2 = \{(\xi,0) : 0 \le \xi \le l\}$, $\quad B_2B_3 = \left\{(l,t) : 0 \le t \le \frac{l}{c}\right\}$, $\quad B_3B_4 = \left\{(ct,t) : \frac{l}{c} \le t \le T\right\}$,

$B_4B_5 = \{(\xi, T) : 2l - T \le \xi \le cT\}$, $\quad B_5B_6 = \left\{(2l - ct, t) : T \le t \le \frac{3l}{2c}\right\}$, $\quad B_6B_7 = \left\{(ct - l, t) : T \le t \le \frac{3l}{2c}\right\}$,

$B_7B_8 = \{(\xi, T) : 0 \le \xi \le l + cT\}$, $\quad B_8B_1 = \{(0,t) : 0 \le t \le T\}$;

Ω_0 – треугольник с вершинами в точках B_1, B_2, B_3; Ω_1, Ω_2 и Ω_3 – треугольники $B_1B_3B_9$, $B_3B_4B_5$ и $B_7B_8B_9$ с вершинами в соответствующих точках (*fig. № 1*).

Требуется найти непрерывное в замкнутой области $\overline{\Omega}$ решение $h(\xi, t)$ уравнения (16), удовлетворяющее нелокальному условию (17), нулевому начальному условию

$$h(\xi, 0) = 0, \ 0 \le \xi \le l \tag{18}$$

и нулевому условию на депрессионной линии

$$h(ct, t) = 0, \ 0 \le t \le T. \tag{19}$$

Из теоремы о среднем значении для одномерного волнового уравнения (16) [2, с. 165] следует, что однородная задача Дарбу (18) – (19) для уравнения (16) в области Ω_0, ограниченной характеристикой $\xi - ct = 0$, прямой $B_2B_3 = \left\{(l,t) : 0 \le t \le \frac{l}{c}\right\}$ и отрезком [0, l] оси 0ξ (*fig. № 1*), не имеет решений, отличных от нулевого.

Следовательно, любое решение $h(\xi,t)$ уравнения (16) из класса $C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющее условиям Дарбу (18), (19), задается формулой

$$h(\xi,t) = \begin{cases} \varphi(ct-\xi) - \varphi(0) & \forall\ (\xi,t) \in \Omega_1, \\ 0 & \forall\ (\xi,t) \in \Omega_0, \end{cases} \quad (20)$$

где $\varphi(t) \in C[0,T] \cap C^2\,]0,T[$.

Для любого момента времени $t < l/c$ условие (17) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l h(\xi,t)\,d\xi = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{ct} h(\xi,t)\,d\xi + \frac{\partial}{\partial t}\int_{ct}^l h(\xi,t)\,d\xi = \varphi_\mu(t).$$

Отсюда, принимая во внимание, что $h(\xi,t) = 0$ для всех $(\xi,t) \in \Omega_0$, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{ct} h(\xi,t)\,d\xi = \varphi_\mu(t). \quad (21)$$

Из (21) в силу (20) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{ct}[\varphi(ct-\xi) - \varphi(0)]\,d\xi = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{ct}[\varphi(\eta) - \varphi(0)]\,d\eta = \varphi_\mu(t).$$

Стало быть, $c[\varphi(ct) - \varphi(0)] = \varphi_\mu(t)$. А это значит, что $\varphi(\eta) - \varphi(0) = \varphi_\mu(\eta/c),\quad 0 < \eta < l.$

Итак, решение задачи (18), (19), (21) для уравнения (16) в области Ω_1 определяется единственным образом, и оно имеет вид

$$h(\xi,t) = \varphi_\mu(t - \xi/c). \quad (22)$$

Теперь нетрудно увидеть, что решение (22) при $\varphi_\mu(\eta) = \alpha\eta$ совпадает с точным решением уравнения (13) в области Ω_1.

Из (22) при ξ=0 получаем граничное условие $h(0,t) = \varphi_\mu(t),\quad 0 \le t \le l/c.$ (23)

Функция $h(\xi,t)$ должна быть непрерывной в точке B_1. Для этого необходимо, чтобы

$$\varphi_\mu(0) = 0. \quad (24)$$

В силу (19) на депрессионной линии имеем $h(ct,t) = 0,\quad 0 \le t \le l/c.$ (25)

Теперь видно, что задача поиска функции $h(\xi,t)$ в трапецеидальной области Ω_4 с вершинами в точках $B_1B_3B_6B_9$ свелась к задаче Дарбу (23) – (25) для уравнения (16).

Пусть (x,τ) – произвольным образом фиксированная точка из области Ω_4, ω_τ – характеристический четырехугольник с вершинами в точках $z_1\left(0, \tau - \frac{x}{c}\right)$, $z_2\left(\frac{c\tau - x}{2}, \frac{c\tau - x}{2c}\right)$, $z_3\left(\frac{x + c\tau}{2}, \frac{x + c\tau}{2c}\right)$. Тогда на основании теоремы о среднем значении для уравнения (16) и равенств (23) и (25) имеем $h(x,\tau) = \varphi_\mu(\tau - x/c)$.

Следовательно, единственное решение задачи Дарбу (23) – (25) для уравнения (16) в области Ω_4 задается формулой

$$h(\xi,t) = \varphi_\mu(t - \xi/c). \quad (26)$$

Из (26) мы получаем значения искомой функции на характеристике $B_5B_3 : \xi + ct = 2l$

$$h(2l - ct, t) = \varphi_\mu(2t - 2l/c),\quad l/c \le t \le T, \quad (27)$$

а из (19) – ее значения на характеристике B_3B_4 :

$$h(ct,t)=0, \quad l/c \le t \le T. \tag{28}$$

Очевидно, что решение задачи Гурса (27), (28) для уравнения (16) в замкнутой области $\overline{\Omega}_2$ определяется по формуле (26).

Остается определить решение в области Ω_3, где $t > l/c$. С этой целью перепишем условие (17) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^l h(\xi,t)\,d\xi=\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{ct-l} h(\xi,t)\,d\xi+\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{ct-l}^{l} h(\xi,t)\,d\xi=\varphi_\mu(t).$$

В соответствии с (26)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{ct-l}^{l} h(\xi,t)\,d\xi=\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{ct-l}^{l}\varphi_\mu(t-\xi/c)\,d\xi=c\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{t-l/c}^{l/c}\varphi_\mu(\eta)\,d\eta=-c\varphi_\mu(t-l/c).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{ct-l} h(\xi,t)\,d\xi=\varphi_\mu(t)+c\varphi_\mu(t-l/c). \tag{29}$$

Любое решение уравнения (16) в области Ω_3, удовлетворяющее на характеристике $B_7B_9 : ct-\xi=l$ равенству (26), определяется формулой $h(\xi,t)=f_1(ct-\xi)-f_1(0)+\varphi_\mu(l/c)$. (30)

Подставляем функцию $h(\xi,t)$ из (30) в (29) и, принимая во внимание, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{ct-l}[f_1(ct-\xi)-f_1(0)+\varphi_\mu(l/c)]\,d\xi=\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-l}^{ct}[f_1(\eta)-f_1(0)+\varphi_\mu(l/c)]\,d\eta,$$

получим

$$c\,[f_1(ct)-f_1(0)+\varphi_\mu(l/c)]=\varphi_\mu(t)+c\varphi_\mu(t-l/c),$$

откуда

$$f_1(\tau)-f_1(0)+\varphi_\mu\left(\frac{l}{c}\right)=\frac{1}{c}\varphi_\mu\left(\frac{\tau}{c}\right)+\varphi_\mu\left(\frac{\tau-l}{c}\right).$$

Очевидно, что решение $h(\xi,t)$ в области Ω_3 задается формулой

$$h(\xi,t)=\frac{1}{c}\varphi_\mu\left(\frac{ct-\xi}{c}\right)+\varphi_\mu\left(\frac{ct-\xi-l}{c}\right). \tag{31}$$

Формулы (22), (26), (31) представляют собой эффективный и компьютерно реализуемый алгоритм долгосрочного прогноза динамики грунтовых вод при нулевых условиях в начальный момент времени и на депрессивной линии.

Рассмотрим теперь другую ситуацию. Пусть требуется определить динамику грунтовых вод до момента времени T, когда на депрессионной линии $\xi=ct$ известен закон изменения функции $h(\xi,t)$ до этого момента времени

$$h(ct,t)=h_*(t), \quad 0\le t\le T \tag{32}$$

и ее начальное распределение на сегменте $0\le\xi\le cT\equiv r$

$$h(\xi,0)=\tau(\xi), \quad 0\le\xi\le r, \tag{33}$$

где $h_*(t)\in C[0,T]\cap C^2]0,T[, \quad \tau(\xi)\in C[0,r]\cap C^2]0,r[, \ \tau(0)=h_*(0)$.

В этой ситуации условие (17) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^r h(\xi,t)\,d\xi=\varphi_\mu(t), \quad 0\le t\le T. \tag{34}$$

Решение $h(\xi,t)$ уравнения (16) ищется в области $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \{(ct,t): 0<t<T\}$ (*fig. № 2*).

$$B_1(0,0),\ B_2(r,0),\ B_3(r,T),\ B_9(0,T),\ B_1B_3: \xi = ct.$$

$$z=(x,\eta),\ z_1=\left(\frac{c\eta+x}{2},\frac{c\eta+x}{2c}\right),\ z_2=\left(\frac{x-c\eta}{2},\frac{x-c\eta}{2c}\right),\ z_3=(x-c\eta,0).$$

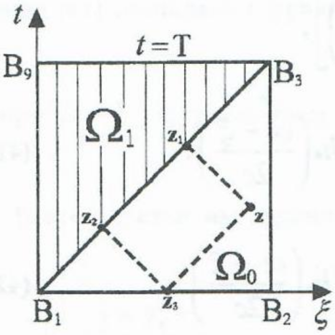


fig. № 2.

Пусть $z=(x,\eta)$ – произвольным образом фиксированная точка области Ω_0, z, z_1, z_2, z_3 – вершины характеристического четырехугольника, принадлежащего замкнутой области $\overline{\Omega}_0$. Тогда на основании (32), (33) и теоремы о среднем значении для уравнения (16) можно записать

$$h(x,\eta)=h_*\left(\frac{c\eta+x}{2c}\right)+\tau(x-ct)-h_*\left(\frac{x-c\eta}{2c}\right).$$

Следовательно, единственное решение первой задачи Дарбу (32), (33) для уравнения (16) в области Ω_0 определяется формулой

$$h(\xi,t)=\tau(\xi-ct)+h_*\left(\frac{\xi+ct}{2c}\right)-h_*\left(\frac{\xi-ct}{2c}\right). \tag{35}$$

Определим решение в области Ω_1, где $\xi > ct$. Запишем условие (34) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^r h(\xi,t)\,d\xi=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{ct} h(\xi,t)\,d\xi+\frac{\partial}{\partial t}\int_{ct}^r h(\xi,t)\,d\xi=\varphi_\mu(t). \tag{36}$$

На основании (35)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{ct}^r h(\xi,t)d\xi=\frac{\partial}{\partial t}\int_{ct}^r\left[\tau(\xi-ct)+h_*\left(\frac{\xi+ct}{2c}\right)-h_*\left(\frac{\xi-ct}{2c}\right)\right]d\xi=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{r-ct}\left[\tau(\eta_1)-h_*\left(\frac{\eta_1}{2c}\right)\right]d\eta_1+\frac{\partial}{\partial t}\int_{2ct}^{r+ct}h_*\left(\frac{\eta_2}{2c}\right)d\eta_2=c\left[h_*\left(\frac{r-ct}{2c}\right)-\tau(r-ct)\right]+ch_*\left(\frac{r+ct}{2c}\right)-2ch_*(t).$$

Теперь ясно, что (36) эквивалентно условию

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{ct} h(\xi,t)\,d\xi=\psi(t), \tag{37}$$

где

$$\psi(t)=\varphi_\mu(t)+c\left[\tau(r-ct)+2h_*(t)-h_*\left(\frac{r+ct}{2c}\right)-h_*\left(\frac{r-ct}{2c}\right)\right]. \tag{38}$$

Любое решение $h(\xi,t)$ уравнения (16) в области Ω_1 представимо формулой Даламбера

$$h(\xi,t)=F_1(ct-\xi)+F_2(ct+\xi). \tag{39}$$

Подставив функцию (39) в условие (32), получим

$$F_1(0)+F_2(2ct)=h_*(t),\quad 0\le t\le T.$$

Отсюда находим

$$F_2(ct+\xi)=h_*\left(\frac{ct+\xi}{2c}\right)-F_1(0).$$

Далее перепишем формулу (39) в виде

$$h(\xi,t)=F_1(ct-\xi)-F_1(0)+h_*\left(\frac{ct+\xi}{2c}\right). \tag{40}$$

Из (37) и (40) видно, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{ct}\left[F_1(ct-\xi)-F_1(0)+h_*\left(\frac{ct+\xi}{2c}\right)\right]d\xi=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{ct}\left[F_1(\xi_1)-F_1(0)\right]d\xi_1+\frac{\partial}{\partial t}\int_{ct}^{2ct}h_*\left(\frac{\eta_2}{2c}\right)d\eta_2=\psi(t),$$

а это означает, что

$$c\left[F_1(ct)-F_1(0)\right]=\psi(t)-c\left[2h_*(t)-h_*\left(\frac{t}{2}\right)\right],$$

стало быть,

$$F_1(ct-\xi)-F_1(0)=\frac{1}{c}\psi\left(\frac{ct-\xi}{c}\right)-2h_*\left(\frac{ct-\xi}{c}\right)+h_*\left(\frac{ct-\xi}{2c}\right). \tag{41}$$

Равенства (40) и (41) дают нам основание утверждать, что

$$h(\xi,t)=h_*\left(\frac{ct+\xi}{2c}\right)+\frac{1}{c}\psi\left(\frac{ct-\xi}{c}\right)-2h_*\left(\frac{ct-\xi}{c}\right)+h_*\left(\frac{ct-\xi}{2c}\right). \tag{42}$$

Согласно (38)

$$\frac{1}{c}\psi\left(\frac{ct-\xi}{c}\right)=\frac{1}{c}\varphi_\mu\left(\frac{ct-\xi}{c}\right)+\tau(r+\xi-ct)+2h_*\left(\frac{ct-\xi}{c}\right)-h_*\left(\frac{r+ct-\xi}{2c}\right)-h_*\left(\frac{r+\xi-ct}{2c}\right).$$

Поэтому из (42) имеем

$$h(\xi,t)=h_*\left(\frac{ct+\xi}{c}\right)+\frac{1}{c}\varphi_\mu\left(\frac{ct-\xi}{c}\right)+\tau(r+\xi-ct)-h_*\left(\frac{r+ct-\xi}{2c}\right)-h_*\left(\frac{r+\xi-ct}{2c}\right)+h_*\left(\frac{ct-\xi}{c}\right). \tag{43}$$

Таким образом, показано, что алгоритм поиска функции $h(\xi,t)$ на временном сегменте $[0,T]$ и во всех точках $\xi\in[0,l]$ определяется формулами (35) и (42) или (43).

3. АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ГРУНТОВЫХ ВОД, ОСНОВАННОЙ НА УРАВНЕНИИ СМЕШАННОГО ТИПА С НУЛЕВЫМ НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

В этом разделе мы рассмотрим случай, когда функция расхода $\mu=\mu(t)$ меняет знак в некоторый момент времени t_* по формуле

$$\mu(t)=\mu_0\,|t-t_*|^\beta\ \mathrm{sign}\,(t_*-t), \tag{44}$$

где $\mu_0=const>0,\ \beta=const\ge 0$.

Гипотеза (44) заменяет уравнение (15) уравнением

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}+\frac{k}{m}\mu_0\,\mathrm{sign}\,(t-t_*)\,|t-t_*|^\beta\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial\xi^2}=0. \tag{45}$$

В уравнении (45) произведем замену зависимой h и независимых переменных, положив

$$x=\xi\sqrt{m/k\mu_0},\quad y=t-t_*,\quad u(x,y)=h(x\sqrt{k\mu_0/m},y+t_0). \tag{46}$$

Тогда получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\mathrm{sign}\,y\,|y|^\beta\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \tag{47}$$

$$0\le x\le r=\sqrt{\frac{m}{k\mu_0}}\,l,\quad -t_*\le y\le T-t_*=T_*,\quad \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l h(\xi,t)\,d\xi=\sqrt{\frac{k\mu_0}{m}}\frac{\partial}{\partial y}\int_0^r u(x,y)\,dx.$$

Замена (46) переводит (17) в следующее нелокальное условие для уравнения (47):

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_0^r u(x,y)\,dx=\varphi_n(y),\qquad -t_*<y<T_*, \tag{48}$$

где $\varphi_n(y) = [\mu_0 \mid y \mid^{\beta} \ \mathrm{sign}\, y + f(y + t_*)] \cdot \sqrt{m / k\mu_0}$.

В области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < r, \ -t_* < y < T_*\}$ евклидовой плоскости точек $z = x + iy$ (*fig. № 3*) уравнение (47) является уравнением смешанного типа. Оно эллиптического типа в области $\Omega^+ = \{z : z \in \Omega, \ \mathrm{Im}\, z > 0\}$ и гиперболического типа в области $\Omega^- = \Omega \setminus \Omega^+$. При $\beta = 0$ уравнение (47) совпадает с уравнением Лаврентьева-Бицадзе

$$\mathrm{sign}\, y \cdot u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{49}$$

а при $\beta = 1$ – с уравнением Трикоми

$$y u_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{50}$$

В этой статье мы ограничиваемся ситуацией, когда функция $u = u(x, y)$ – регулярное решение уравнения (49) в области Ω^+ и $\Omega^- \setminus \Omega_0^-$ из класса $C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\omega)$, ω – смешанная область, совпадающая с Ω^+ при $y > 0$ и с треугольной областью ABC при $y < 0$. AC и BC – отрезки характеристик $AC : x + y = 0$ и $BC : x - y = r$. Ω_0^- – треугольник, ограниченный характеристикой BA_*, прямыми $y = -t_*$ и $x = r$.

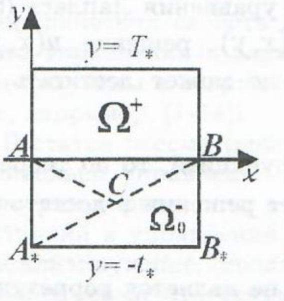


fig. № 3.

Предполагается, что характеристика BC проходит через точку $B = (r; 0)$ и $A_* = (0; -t_*)$, функция $u(x, y)$ наряду с (48) удовлетворяет условиям

$$u(x, -t_*) = 0, \quad u(x, x - r) = 0, \quad 0 \le x \le r. \tag{51}$$

Из единственности решения задачи Дарбу (51) для волнового уравнения следует, что $u(x, y) = 0$ в замкнутой области $\overline{\Omega_0}$. В связи с этим условие (48) эквивалентно условию

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^{y+r} u(x, y)\, dx = \varphi_n(y), \quad -t_* < y < 0. \tag{52}$$

Функция $u(x, y)$ в области $\Omega^- \setminus \Omega_0^-$ представима в виде

$$u(x, y) = f(x - y) - f(r) \tag{53}$$

Подставляя функцию (53) в (52), получим

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^{y+r} [f(x - y) - f(r)]\, dx = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-y}^{r} [f(\eta) - f(r)]\, d\eta = \varphi_n(y).$$

Отсюда, как и ранее, можно видеть, что $f(x - y) - f(r) = \varphi_n(y - x)$. Следовательно,

$$u(x, y) = \begin{cases} \varphi_n(y - x), & (x, y) \in \Omega^- \setminus \Omega_0^- \\ 0, & (x, y) \in \Omega_0. \end{cases} \tag{54}$$

Из (54) следует, что функция $u(x, y)$ в области Ω^+ должна быть регулярным решением уравнения Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{55}$$

удовлетворяющего условию Коши

$$u(x, 0) = \varphi_n(-x), \quad u_y(x, 0) = \varphi_n'(-x), \quad 0 \le x \le r \tag{56}$$

и для всех $y \in [0, T_*]$ – нелокальному краевому условию (48).

Условие (48) в классе достаточно гладких решений уравнения (55) можно переписать в виде

$$\int_0^r u_{xx}(x,y)\,dx = -\varphi_n'(y).$$

Тогда к (56) присоединится условие

$$u_x(r,y) - u_x(0,y) = -\varphi_n'(y), \quad 0 < y < T_*. \tag{57}$$

Из (54) или (57) вытекает, что

$$\tau'(x) + \nu(x) = 0, \quad 0 < x < r, \tag{58}$$

где

$$\tau(x) = u(x,0), \quad \nu(x) = u_y(x,0).$$

Равенство (58) и принцип экстремума Зарембы-Жиро [2, с. 279] для уравнения Лапласа (55) позволяют обнаружить следующее качественное свойство функции $u(x,y)$: решение $u(x,y)$ задачи (56), (57) для уравнения (55) своих экстремальных значений не может достигать во внутренних точках сегмента $[0,r]$ в момент времени $y = 0 \quad (t = t_*)$.

Если функция $\varphi_n(-x)$ на сегменте $[0,r]$ является аналитической функцией, то по теореме Коши-Ковалевской [3, с. 50] задача Коши (56) для уравнения (55) имеет решения в достаточно малой полуокрестности $|z - x_0| \le \varepsilon$, $\operatorname{Im} z > 0$ каждой точки $x_0 \in \,]0, r[$.

Известно, что задача Коши для уравнения Лапласа, вообще говоря, не является корректной по Адамару, решение может быть неустойчивым относительно малой вариации начальных данных.

Переход от уравнения Лаврентьева-Бицадзе (49) к уравнению Трикоми (50) не снимает возникший вопрос. Задача прогнозирования безнапорного движения грунтовых вод для $t > t_*$ на базе уравнения Трикоми и нелокального краевого условия (48), когда известны значения искомой функции $u(x,y)$ на характеристике $A_*B: x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2} = r$ и на отрезке $A_*B_* = \{z : y = -t_*,\ 0 \le x \le r\}$, может оказаться некорректной по Адамару.

Однако эффективным выходом из этой ситуации может стать замена основополагающего уравнения (15) уравнением следующего вида:

$$\frac{\partial^{1+H(\mu)} h}{\partial t^{1+H(\mu)}} = \frac{k}{m}\mu(t)\frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2}, \tag{59}$$

где $H(\mu)$ – функция Хевисайда.

Уравнение (59) остается уравнением смешанного типа: оно гиперболического типа при $\mu(t) > 0$ и параболического типа при $\mu(t) < 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полубаринова-Кочина Т.Я.* Теория движения грунтовых вод. Изд. 2-е, М.: Наука, 1977, 64 с.
2. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995, 301 с.
3. *Курант Р.* Уравнения с частным производными. М.: Мир, 1964, 830 с.