В. А. Белоногов, О максимальных подгруппах. I, *Изв. вузов. Матем.*, 1962, номер 4, 13–18

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1962 *МАТЕМАТИКА* *№ 4 (29)*

В. А. Белоногов

О МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ. I

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа, посвященная изучению взаимозависимости свойств группы и свойств ее максимальных подгрупп, состоит из двух частей.

В первой части доказывается ряд общих теорем о свойствах максимальных подгрупп группы. Все теоремы и леммы этой части справедливы одновременно как для конечных, так и для бесконечных групп, хотя некоторые следствия этих теорем относятся специально к конечным группам. Некоторый самостоятельный интерес может представлять здесь лемма 1, обобщающая известные утверждения С. А. Чунихина [1], О. Оре [2] и О. Ю. Шмидта [3].

Во второй части рассматриваются лишь конечные группы. Главная цель этой части состоит в изучении свойств группы, имеющей один или несколько классов силовских максимальных подгрупп. Частными следствиями полученных здесь результатов являются три теоремы Г. А. Миллера [4] и две теоремы С. П. Азлецкого [5]. В этой же части доказываются две теоремы о существовании у конечной группы подгрупп составного порядка, одна из которых обобщает известную теорему С. А. Чунихина [6].

Попутно в работе устанавливается ряд признаков непростоты группы (лемма 1, следствие 2 леммы 2, теорема 12).

В настоящей работе мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{H})$ — нормализатор подмножества $\mathfrak{H}$ в группе $\mathfrak{G}$,

$\langle\mathfrak{H}\rangle_{\mathfrak{G}}$ — класс (совокупность) всех подмножеств группы $\mathfrak{G}$, сопряженных с $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{G}$,

$\bigcap\langle\mathfrak{H}\rangle_{\mathfrak{G}}$ — пересечение всех подмножеств группы $\mathfrak{G}$, составляющих класс $\langle\mathfrak{H}\rangle_{\mathfrak{G}}$,

$(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ — индекс подгруппы $\mathfrak{H}$ в группе $\mathfrak{G}$.

$o(\mathfrak{H})$ — порядок, то есть число элементов, множества $\mathfrak{H}$,

$o(\langle\mathfrak{H}\rangle_{\mathfrak{G}})$ — порядок класса $\langle\mathfrak{H}\rangle_{\mathfrak{G}}$, то есть число подмножеств группы $\mathfrak{G}$, сопряженных с $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{G}$,

$\tau(n)$ — число всех различных простых делителей натурального числа n,

$\tau(\mathfrak{G})$ — число, равное $\tau(g)$, где $g = o(\mathfrak{G})$.

I. Некоторые свойства максимальных подгрупп абстрактной группы

Определение 1. Подгруппа $\mathfrak{H}$ группы $\mathfrak{G}$ называется максимальной подгруппой группы $\mathfrak{G}$, если она не содержится в качестве истинной подгруппы ни в какой истинной подгруппе группы $\mathfrak{G}$.

Как следует из определения, сама группа $\mathfrak{G}$ является своей максимальной подгруппой. Всякая истинная максимальная подгруппа $\mathfrak{H}$ группы $\mathfrak{G}$ либо инвариантна в $\mathfrak{G}$, либо совпадает со своим нормализатором $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{H})$, так как, очевидно, $\mathfrak{H}\subseteq N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{H})\subseteq\mathfrak{G}$, а поэтому либо $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{H})=\mathfrak{H}$, либо $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{H})=\mathfrak{G}$. Легко видеть также, что единичная подгруппа является истинной максимальной подгруппой в группе $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{G}$ есть циклическая группа простого порядка. Действительно, если единичная подгруппа максимальна в $\mathfrak{G}$, то циклическая подгруппа, порожденная любым элементом группы $\mathfrak{G}$, должна совпадать с $\mathfrak{G}$, что возможно лишь в случае, когда порядок $\mathfrak{G}$ конечен и равен простому числу ([7], стр. 38); обратное очевидно.

Теорема 1. *При гомоморфном отображении группы $\mathfrak{G}$ на группу $\overline{\mathfrak{G}}$ максимальная подгруппа группы $\mathfrak{G}$ имеет своим образом максимальную подгруппу группы $\overline{\mathfrak{G}}$. Обратно, максимальная подгруппа группы $\overline{\mathfrak{G}}$ имеет своим полным прообразом в $\mathfrak{G}$ максимальную подгруппу группы $\mathfrak{G}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H}$ есть максимальная подгруппа группы $\mathfrak{G}$, и $\overline{\mathfrak{H}}$ — ее образ в группе $\overline{\mathfrak{G}}$. Предположим, что $\overline{\mathfrak{H}}$ не максимальна в $\overline{\mathfrak{G}}$. Тогда в $\overline{\mathfrak{G}}$ существует подгруппа $\overline{\mathfrak{F}}$ такая, что $\overline{\mathfrak{H}}\subset\overline{\mathfrak{F}}\subset\overline{\mathfrak{G}}$. Полный прообраз подгруппы $\overline{\mathfrak{H}}$ в $\mathfrak{G}$ должен заключать $\mathfrak{H}$, а следовательно, в силу максимальности $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{G}$, он должен совпадать либо с $\mathfrak{H}$, либо с $\mathfrak{G}$; но с $\mathfrak{G}$ он совпадать не может, так как образом $\mathfrak{G}$ при данном гомоморфизме является $\overline{\mathfrak{G}}$, а не $\overline{\mathfrak{H}}$. Следовательно, полным прообразом подгруппы $\overline{\mathfrak{H}}$ является $\mathfrak{H}$. Далее, так как полный прообраз $\mathfrak{F}$ подгруппы $\overline{\mathfrak{F}}$ должен заключать полный прообраз $\mathfrak{H}$ подгруппы $\overline{\mathfrak{H}}$, то мы должны иметь $\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{G}$, причем очевидно, что $\mathfrak{F}\neq\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}\neq\mathfrak{G}$, так как образы $\overline{\mathfrak{H}}$, $\overline{\mathfrak{F}}$ и $\overline{\mathfrak{G}}$ этих трех групп различны. Но тогда $\mathfrak{H}\subset\mathfrak{F}\subset\mathfrak{G}$, и мы получаем противоречие с тем, что $\mathfrak{H}$ максимальна в $\overline{\mathfrak{G}}$. Следовательно, мы должны принять, что $\overline{\mathfrak{H}}$ максимальна в $\overline{\mathfrak{G}}$, и тем самым первая часть теоремы доказана.

Пусть теперь $\overline{\mathfrak{H}}$ есть максимальная подгруппа группы $\overline{\mathfrak{G}}$ и $\mathfrak{H}$ — ее полный прообраз в группе $\mathfrak{G}$. Пусть $\mathfrak{H}$ не максимальна в $\mathfrak{G}$, то есть в $\mathfrak{G}$ существует подгруппа $\mathfrak{F}$ такая, что $\mathfrak{H}\subset\mathfrak{F}\subset\mathfrak{G}$. Тогда, обозначив через $\overline{\mathfrak{F}}$ образ подгруппы $\mathfrak{F}$ в группе $\overline{\mathfrak{G}}$, мы будем иметь $\overline{\mathfrak{H}}\subseteq\overline{\mathfrak{F}}\subseteq\overline{\mathfrak{G}}$.

Как полный прообраз подгруппы $\overline{\mathfrak{H}}$ в группе $\mathfrak{G}$, подгруппа $\mathfrak{H}$ должна содержать ядро $\mathfrak{N}$ рассматриваемого гомоморфизма, но тогда и $\mathfrak{F}$ будет содержать $\mathfrak{N}$, а поэтому являться полным прообразом в $\mathfrak{G}$ своего образа $\overline{\mathfrak{F}}$. Теперь очевидно, что $\overline{\mathfrak{F}}$ отлична как от $\overline{\mathfrak{H}}$, так и от $\overline{\mathfrak{G}}$, так как полные прообразы $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ этих трех групп различны. Но тогда $\overline{\mathfrak{H}}\subset\overline{\mathfrak{F}}\subset\overline{\mathfrak{G}}$, и мы получаем противоречие с тем, что $\overline{\mathfrak{H}}$ максимальна в $\overline{\mathfrak{G}}$. Следовательно, мы должны принять, что подгруппа $\mathfrak{H}$ максимальна в группе $\mathfrak{G}$. Теорема доказана.

Из этой теоремы непосредственно вытекают следующие утверждения:

Следствие 1. Пусть $\mathfrak{N}$ — нормальный делитель группы $\mathfrak{G}$, заключенный в $\mathfrak{H}$. Подгруппа $\mathfrak{H}$ максимальна в $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{H}/\mathfrak{N}$ максимальна в $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$.

Следствие 2. Если $\mathfrak{H}$ — максимальная подгруппа группы $\mathfrak{G}$, то максимальными в $\mathfrak{G}$ будут и все подгруппы, равнотипные (в частности, сопряженные) с $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{G}$.

Теоремы 2. *Истинная инвариантная подгруппа $\mathfrak{H}$ группы $\mathfrak{G}$ является максимальной в $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда, когда она имеет простой индекс в $\mathfrak{G}$.*

Доказательство. Согласно следствию 1 из теоремы 1, $\mathfrak{H}$ максимальна в $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}$ максимальна в $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$. Но, так как $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}$ есть единичная подгруппа $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$, то, как было показано в начале параграфа, $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}$ максимальна в $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ есть циклическая группа простого порядка, а следовательно, когда индекс $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{G}$ есть простое число. Теорема доказана.

В дальнейшем нам будет полезна следующая

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ есть подгруппа группы $\mathfrak{G}$, и $\mathfrak{M}$ — произвольное множество элементов из $\mathfrak{F}$. Тогда эквивалентны следующие условия*:

1) $\langle\mathfrak{M}\rangle_{\mathfrak{F}}=\langle\mathfrak{M}\rangle_{\mathfrak{G}}$,

2) $\mathfrak{G}=N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{M})\mathfrak{F}$,

3) $\mathfrak{G}=N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{M})\mathfrak{F}$ *и $\mathfrak{G}$ содержит нормальный делитель $\mathfrak{N}$ такой, что* $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{N}\subseteq\bigcap\langle\mathfrak{F}\rangle_{\mathfrak{G}}$,

4) $\mathfrak{G}=\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}$, *где $\mathfrak{F}_1$ — подмножество* $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{M})$.

Доказательство. Из равенства 1) следует, что для любого элемента G из $\mathfrak{G}$ найдется такой элемент F из $\mathfrak{F}$, что $G^{-1}\mathfrak{M}G=F^{-1}\mathfrak{M}F$, откуда $(GF^{-1})^{-1}\mathfrak{M}(GF^{-1})=\mathfrak{M}$, то есть $GF^{-1}=N$, где N — элемент $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{M})$, и, наконец, $G=NF$; это показывает, что $\mathfrak{G}=N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{M})\mathfrak{F}$. Обратно, из равенства 2) следует, что любой элемент G из $\mathfrak{G}$ можно представить в виде $G=NF$, где $N\in N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{M})$ и $F\in\mathfrak{F}$. Но тогда имеем $G^{-1}\mathfrak{M}G=F^{-1}N^{-1}\mathfrak{M}NF=F^{-1}\mathfrak{M}F$, то есть любое множество, сопряженное с $\mathfrak{M}$ в группе $\mathfrak{G}$, является сопряженным с $\mathfrak{M}$ в подгруппе $\mathfrak{F}$, откуда и следует 1). Итак, условия 1) и 2) эквивалентны. Далее, из 1) следует, что подгруппа $\mathfrak{F}$ содержит подгруппу $\mathfrak{N}$, порожденную всеми множествами класса $\langle\mathfrak{M}\rangle_{\mathfrak{G}}$, а поэтому инвариантную в $\mathfrak{G}$. Но тогда $\mathfrak{N}$, как и всякая подгруппа инвариантная в $\mathfrak{G}$, но заключенная в $\mathfrak{F}$, содержится в $\bigcap\langle\mathfrak{F}\rangle_{\mathfrak{G}}$. Поэтому условия 1), 2) и 3) эквивалентны. Покажем теперь, что 2) эквивалентно 4). Действительно, из 2) следует 4), так как в качестве $\mathfrak{F}_1$ можно взять $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{M})$. Если же верно 4), то мы получим $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{M})\mathfrak{F}\supseteq\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}=\mathfrak{G}$, то есть $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{M})\mathfrak{F}=\mathfrak{G}$. Итак, эквивалентность условий 1), 2), 3), 4) доказана.

Приведем несколько следствий из этой леммы.

Следствие 1. ([1], лемма 1, [2], глава 1, теорема 12). Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}_1$ — подгруппы группы $\mathfrak{G}$ такие, что $\mathfrak{G}=\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{G}$ будет непростой группой, если пересечение $\mathfrak{F}_1\cap\mathfrak{F}$ содержит отличный от единицы нормальный делитель какой-либо одной из групп $\mathfrak{F}_1$ или $\mathfrak{F}$.

Действительно, если $\mathfrak{N}\neq 1$ есть нормальный делитель $\mathfrak{F}_1$ заключенный в $\mathfrak{F}_1\cap\mathfrak{F}$, то при $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}$ мы имеем условие 4) леммы 1, а так как из 4) следует 3), то $\mathfrak{G}$ — непростая.

Эквивалентность же условий 1) и 2) обобщает следующую теорему О. Оре ([2], теорема 7 главы II) для конечных групп:

Следствие 2. Если $\mathfrak{F}$ — нормальный делитель конечной группы $\mathfrak{G}$, а $\mathfrak{H}$ — его силовская подгруппа, то $\mathfrak{G}=N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{H})\mathfrak{F}$.

Действительно, в силу инвариантности $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{G}$, все подгруппы, сопряженные с $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{G}$, заключены в $\mathfrak{F}$. Далее, все такие подгруппы будут сопряжены с $\mathfrak{H}$ уже в группе $\mathfrak{F}$, в силу того, что $\mathfrak{H}$ — силовская подгруппа $\mathfrak{F}$. Итак, $\langle\mathfrak{H}\rangle_{\mathfrak{F}}=\langle\mathfrak{H}\rangle_{\mathfrak{G}}$ и, согласно лемме 1, $\mathfrak{G}=N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{H})\mathfrak{F}$.

Отсюда непосредственно вытекает следующее утверждение О. Ю. Шмидта ([3], стр. 7, следствие):

Следствие 3. Пусть $\mathfrak{H}$ — силовская подгруппа группы $\mathfrak{G}$. Если $\mathfrak{H}$ не инвариантна в $\mathfrak{G}$, то и всякая подгруппа, содержащая $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{H})$ (в частности, сама $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{H})$) не может быть инвариантна в $\mathfrak{G}$.

Теорема 3. *Неинвариантная подгруппа $\mathfrak{H}$ группы $\mathfrak{G}$ является максимальной в $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда, когда для любой подгруппы $\mathfrak{F}$, заключающей $\mathfrak{H}$ в качестве истинной подгруппы, имеет место равенство*

$$\langle\mathfrak{H}\rangle_{\mathfrak{F}}=\langle\mathfrak{H}\rangle_{\mathfrak{G}}. \tag{*}$$

Доказательство. Если $\mathfrak{H}$ максимальна в $\mathfrak{G}$, то в качестве $\mathfrak{F}$, стоящей в условии теоремы, можно взять лишь саму группу $\mathfrak{G}$, а поэтому равенство (*) выполнено. Обратно, пусть для любой подгруппы $\mathfrak{F}$, заключающей $\mathfrak{H}$ в качестве истинной подгруппы, равенство (*) выполняется. Так как, по условию, $\mathfrak{H}$ не инвариантна в группе $\mathfrak{G}$, то из равенства (*) следует, что $\mathfrak{H}$ не может быть инвариантной ни в какой большей подгруппе $\mathfrak{F}$, а поэтому $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{H})=\mathfrak{H}$. Теперь, применяя лемму 1, имеем $\mathfrak{G}=N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{H})\mathfrak{F}=\mathfrak{H}\mathfrak{F}=\mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{H}$ максимальна в $\mathfrak{G}$. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{H}$ — максимальная подгруппа группы $\mathfrak{G}$. Произвольная подгруппа $\mathfrak{F}$ группы $\mathfrak{G}$ будет перестановочной со всеми подгруппами из класса $\langle\mathfrak{H}\rangle_{\mathfrak{G}}$ тогда и только тогда, когда либо $\mathfrak{F}\subseteq\bigcap\langle\mathfrak{H}\rangle_{\mathfrak{G}}$, либо $\mathfrak{F}\mathfrak{H}=\mathfrak{G}$.*

Доказательство. Прежде всего ясно, что, если подгруппа $\mathfrak{F}$ заключена в $\bigcap\langle\mathfrak{H}\rangle_{\mathfrak{G}}$, то $\mathfrak{F}$ перестановочна с каждой подгруппой класса $\langle\mathfrak{H}\rangle_{\mathfrak{G}}$. Если подгруппа $\mathfrak{F}$ группы $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условию $\mathfrak{F}\mathfrak{H}=\mathfrak{G}$, то легко видеть, что и для любой подгруппы $\mathfrak{H}^*=G^{-1}\mathfrak{H}G$, сопряженной с $\mathfrak{H}$, справедливо равенство $\mathfrak{F}\mathfrak{H}^*=\mathfrak{G}$. Действительно, из $\mathfrak{H}\mathfrak{F}=\mathfrak{F}\mathfrak{H}=\mathfrak{G}$ следует, что $G=HF$, где $H\in\mathfrak{H}$ и $F\in\mathfrak{F}$, и мы имеем $\mathfrak{F}\mathfrak{H}^*=\mathfrak{F}G^{-1}\mathfrak{H}G=\mathfrak{F}F^{-1}H^{-1}\mathfrak{H}HF=\mathfrak{F}F^{-1}\mathfrak{H}F=\mathfrak{F}\mathfrak{H}F=\mathfrak{G}F=\mathfrak{G}$. Но это равенство означает, что $\mathfrak{F}$ перестановочно с $\mathfrak{H}^*$. Обратно, пусть теперь $\mathfrak{F}$ — подгруппа группы $\mathfrak{G}$, перестановочная со всеми подгруппами класса $\langle\mathfrak{H}\rangle_{\mathfrak{G}}$. Тогда для любой подгруппы $\mathfrak{H}^*$ из $\langle\mathfrak{H}\rangle_{\mathfrak{G}}$ произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}^*$ является группой и, в силу максимальности $\mathfrak{H}^*$, либо $\mathfrak{F}\mathfrak{H}^*=\mathfrak{H}^*$ и в этом случае $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{H}^*$, либо $\mathfrak{F}\mathfrak{H}^*=\mathfrak{G}$. Если при этом $\mathfrak{F}\mathfrak{H}=\mathfrak{G}$, то, как мы показали выше, и для любой подгруппы $\mathfrak{H}^*$ из $\langle\mathfrak{H}\rangle_{\mathfrak{G}}$ будет $\mathfrak{F}\mathfrak{H}^*=\mathfrak{G}$, а поэтому, если $\mathfrak{F}\mathfrak{H}=\mathfrak{H}$, то и для любой подгруппы $\mathfrak{H}^*$ из $\langle\mathfrak{H}\rangle_{\mathfrak{G}}$ будет выполняться равенство $\mathfrak{F}\mathfrak{H}^*=\mathfrak{H}^*$, то-есть $\mathfrak{F}$ будет заключена в каждой подгруппе класса $\langle\mathfrak{H}\rangle_{\mathfrak{G}}$, а поэтому и в $\bigcap\langle\mathfrak{H}\rangle_{\mathfrak{G}}$. Теорема доказана.

Так как нормальный делитель группы перестановочен со всеми ее подгруппами, то из теоремы 4 непосредственно вытекает следующее

Следствие 1. Если $\mathfrak{H}$ — максимальная подгруппа группы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{N}$ — нормальный делитель $\mathfrak{G}$, то либо $\mathfrak{N} \subseteq \bigcap \langle \mathfrak{H} \rangle_{\mathfrak{G}}$, либо $\mathfrak{N}\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$. Для случая конечных групп отсюда выводится

Следствие 2. Индекс максимальной подгруппы $\mathfrak{H}$ конечной группы $\mathfrak{G}$ является делителем индекса главного ряда $\mathfrak{G}$.

Действительно, пусть $\mathfrak{N}$ есть наименьший нормальный делитель $\mathfrak{G}$, заключающий $\bigcap \langle \mathfrak{H} \rangle_{\mathfrak{G}}$. Тогда $(\mathfrak{N}, \bigcap \langle \mathfrak{H} \rangle_{\mathfrak{G}})$ является индексом главного ряда $\mathfrak{G}$. Согласно следствию 1, $\mathfrak{N}\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$ (так как $\mathfrak{N}$ не заключен в $\bigcap \langle \mathfrak{H} \rangle_{\mathfrak{G}}$), откуда получаем $\frac{o(\mathfrak{N}) \cdot o(\mathfrak{H})}{o(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{H})} = o(\mathfrak{G})$. Так как, очевидно, $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{H} \supseteq \bigcap \langle \mathfrak{H} \rangle_{\mathfrak{G}}$, то $o(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{H}) = o(\bigcap \langle \mathfrak{H} \rangle_{\mathfrak{G}})k$, где $k \geqslant 1$, и мы имеем $(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}) = \frac{o(\mathfrak{G})}{o(\mathfrak{H})} = \frac{o(\mathfrak{N})}{o(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{H})} = \frac{o(\mathfrak{N})}{o(\bigcap \langle \mathfrak{H} \rangle_{\mathfrak{G}})k} = \frac{(\mathfrak{N}, \bigcap \langle \mathfrak{H} \rangle_{\mathfrak{G}})}{k}$, что и требовалось доказать.

Определение 2. ([8], стр. 364). Специальной группой называется бесконечная или конечная группа, каждая истинная подгруппа которой имеет в ней нормализатор, отличный от самой подгруппы.

Очевидно, что абелевы и гамильтоновы группы являются специальными, а для конечных групп приведенное определение эквивалентно определению специальной группы, как группы, разлагающейся в прямое произведение всех своих подгрупп Силова различных порядков (см., например, [9], стр. 118).

Лемма 2. *Если пересечение $\mathfrak{D}$ максимальной подгруппы $\mathfrak{H}$ группы $\mathfrak{G}$ со специальной подгруппой $\mathfrak{F}$ группы $\mathfrak{G}$, не содержащейся в $\mathfrak{H}$, не заключено в $\bigcap \langle \mathfrak{H} \rangle_{\mathfrak{G}}$, то $\mathfrak{D}$ не может быть инвариантной подгруппой $\mathfrak{H}$.*

Доказательство. Предположим, что $\mathfrak{D}$ инвариантна в $\mathfrak{H}$. Тогда $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{D}) \supseteq \mathfrak{H}$ и, с другой стороны, $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{D}) \supseteq N_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{D}) \neq \mathfrak{D}$ (так как $\mathfrak{F}$ — специальная группа), то есть $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{D})$ содержит как $\mathfrak{H}$, так и элементы не входящие в $\mathfrak{H}$. В силу максимальности $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{G}$, мы должны поэтому иметь $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{G}$, то-есть $\mathfrak{D}$ инвариантна в группе $\mathfrak{G}$. Но тогда, согласно следствию 1 из теоремы 4, будет $\mathfrak{D} \subseteq \bigcap \langle \mathfrak{H} \rangle_{\mathfrak{G}}$, в противоречие с условием леммы.

Следствие 1. Если $\mathfrak{A}$ есть абелева или гамильтонова максимальная подгруппа группы $\mathfrak{G}$, то пересечение любых двух подгрупп, сопряженных с $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{G}$, совпадает с пересечением всех подгрупп, сопряженных с $\mathfrak{A}$ в группе $\mathfrak{G}$.

Действительно, если $\mathfrak{D} = \mathfrak{A}^* \cap \mathfrak{A}^{**}$ — пересечение любых двух подгрупп из $\langle \mathfrak{A} \rangle_{\mathfrak{G}}$ то, очевидно, $\mathfrak{D} \supseteq \bigcap \langle \mathfrak{A} \rangle_{\mathfrak{G}}$, а поэтому, если $\mathfrak{D} \neq \bigcap \langle \mathfrak{A} \rangle_{\mathfrak{G}}$, то, согласно лемме 2, $\mathfrak{D}$ должна быть неинвариантной в $\mathfrak{A}^*$ (так же, как и в $\mathfrak{A}^{**}$). Последнее, однако, невозможно, так как $\mathfrak{A}$, а следовательно, и $\mathfrak{A}^*$ — абелева или гамильтонова группа, а поэтому не может содержать неинвариантных подгрупп. Таким образом, мы обязаны считать, что $\mathfrak{D} = \bigcap \langle \mathfrak{A} \rangle_{\mathfrak{G}}$.

Для случая конечных групп отсюда вытекает следующий критерий непростоты.

Следствие 2. Конечная группа $\mathfrak{G}$, содержащая абелеву или гамильтонову максимальную подгруппу $\mathfrak{A}$, разрешима.

Действительно, если $\mathfrak{A}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$, то, в силу теоремы 2, $o(\mathfrak{G}/\mathfrak{A})$ есть простое число, и $\mathfrak{G}$, очевидно, разрешима. Будем поэтому считать, что $\mathfrak{A}$ не инвариантна в $\mathfrak{G}$. Тогда $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{A})=\mathfrak{A}$ и, в силу следствия 1, пересечение любых двух подгрупп класса $\langle\mathfrak{A}\rangle_{\mathfrak{G}}$ совпадает с $\bigcap\langle\mathfrak{A}\rangle_{\mathfrak{G}}$. Рассмотрим вначале случай, когда $\bigcap\langle\mathfrak{A}\rangle_{\mathfrak{G}}=1$. Тогда, если $o(\mathfrak{G})=an$, где $a=o(\mathfrak{A})$, то, по теореме Фробениуса ([1], стр. 112), $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель $\mathfrak{N}$ порядка n. Если $\mathfrak{P}$ — произвольная силовская подгруппа группы $\mathfrak{G}$, то либо $\mathfrak{P}\subseteq\mathfrak{A}$, либо $\mathfrak{P}\cap\mathfrak{A}=1$, так как, в силу леммы 2, должно быть $\mathfrak{P}\cap\mathfrak{A}\subseteq\bigcap\langle\mathfrak{A}\rangle_{\mathfrak{G}}$, а у нас $\bigcap\langle\mathfrak{A}\rangle_{\mathfrak{G}}=1$. Отсюда следует, что a и n взаимно просты. Так как при $\tau(n)=1$ $\mathfrak{G}$, очевидно, будет разрешимой, то мы будем предполагать, что $\tau(n)\geqslant 2$. Если $\mathfrak{P}$ — произвольная силовская подгруппа группы $\mathfrak{N}$, то, согласно следствию 2 леммы 1, $\mathfrak{G}=N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{P})\mathfrak{N}$. Очевидно, что $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{P})\cap\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_1$ инвариантна в $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{P})$ и $o(N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{P}))=an_1$, где $n_1=o(\mathfrak{N}_1)$. По теореме Шура ([7], стр. 386) $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{P})$ имеет собственную подгруппу $\mathfrak{A}'$ порядка a, которая, в силу теоремы Виландта ([10], стр. 407), будет сопряжена с $\mathfrak{A}$, а поэтому максимальна в $\mathfrak{G}$. Следовательно, должно быть $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{P})=\mathfrak{G}$, то-есть $\mathfrak{P}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$. Но тогда $\mathfrak{A}\mathfrak{P}$ опять-таки будет истинной подгруппой $\mathfrak{G}$. Мы пришли к противоречию, предположив, что $\tau(\mathfrak{G})\geqslant 2$. Следовательно $\tau(n)=1$ и $\mathfrak{G}$ разрешима. Если же $\bigcap\langle\mathfrak{A}\rangle_{\mathfrak{G}}\neq 1$, то, согласно рассмотренному случаю, $\mathfrak{G}/\bigcap\langle\mathfrak{A}\rangle_{\mathfrak{G}}$ будет разрешимой, откуда следует уже разрешимость самой группы $\mathfrak{G}$. Утверждение доказано.

Томский государственный
университет им. В. В. Куйбышева

Поступило
30 VII 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Чунихин. О существовании подгрупп у конечной группы. Тр. семинара по теории групп, ГОНТИ, М. – Л., 1938.

2. О. Оrе. Contributions to the theory of groups of finite order. Duke Math. J., 5, стр. 431—460, 1939.

3. О. Ю. Шмидт. Группы с двумя классами неинвариантных подгрупп. Тр. семинара по теории групп, ГОНТИ, М. — Л., 1938.

4. G. A. Miller. Maximal Sylow subgroups of a given group. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 28, p. 80—83, 1942.

5. С. П. Азлецкий. Об инвариантных подгруппах среди максимальных и некоторых классах групп. Сб. статей по общетехн. вопросам, Тр. Уральск. лесотехн. ин-та, р. 3—12, Свердловск, 1949.

6. S. A. Tchounikhin. Über Gruppen mit vorgegebenen Untergruppen. Матем. сб., т. 4 (46) : 3, стр. 521—528, 1938.

7. А. Г. Курош. Теория групп. ГИТТЛ, М., 1953.

8. О. Ю. Шмидт. О бесконечных специальных группах. Матем. сб., т. 8 (50) : 3, стр. 363—375, 1940.

9. О. Ю. Шмидт. Абстрактная теория групп. ГТТИ, М.—Л., 1933.

10. H. Wielandt. Zum Satz von Sylow. Math. Z., 60, № 4, S. 407—408, 1954.

11. О. Ю. Шмидт. Группы, все подгруппы которых специальные. Тр. семинара по теории групп, ГОНТИ, М.—Л., 1938.