

Предлагаемый курс лекций в различных вариантах читался на механико-математическом факультете Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, а также в Научно-образовательном центре при Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН. Тематика этих лекций отражает стремление авторов сформулировать общие подходы к построению одномерных нестационарных решений нелинейных гиперболических уравнений, типичных для механики сплошных сред. Важным обстоятельством при построении решений является то, что во многих случаях решения с необходимостью должны содержать разрывы. Это усложняет построение решений и во многих случаях приводит к их неоднозначности. Часто изучение свойств разрывов оказывается невозможным без рассмотрения мелкомасштабных процессов, которые происходят в узкой области, которая моделируется разрывом. Эти процессы не учитываются гиперболической системой уравнений, и для их описания в уравнения должны вводиться члены, правильно описывающие реальные мелкомасштабные процессы. Решения полученной таким образом усложненной системы уравнений в узких переходных зонах называются решениями задачи о структуре разрыва.

В лекциях уделяется внимание как общим свойствам решений гиперболических систем уравнений, так и разрывам, их свойствам и структуре. Особое внимание уделяется системам, выражающим законы сохранения.

Содержание лекций отражает научные интересы авторов и ни в коей мере не претендует на сколько-нибудь полный обзор исследований по этой тематике.

## Оглавление

Введение . . . . .	5
§ 1. Дифференциальные уравнения, описывающие эволюционные процессы . . . . .	7
§ 2. Гиперболические системы. Характеристики. Слабые разрывы. Линейные уравнения. Инварианты Римана . . . . .	11
§ 3. Граничные условия. Эволюционность . . . . .	21
§ 4. Волны Римана . . . . .	27
§ 5. Законы сохранения и соответствующие им дифференциальные уравнения . . . . .	33
§ 6. Разрывы в уравнениях законов сохранения и соотношения на них. Ударная адиабата . . . . .	36
§ 7. Условия эволюционности разрывов . . . . .	41
§ 8. Разрывы малой интенсивности . . . . .	47
§ 9. Поведение ударной адиабаты в окрестности точек Жуге . . . . .	52
§ 10. Автомодельные задачи. Распад произвольного разрыва . . . . .	57
§ 11. Автомодельные задачи, когда один из разрывов близок к разрыву с условием Жуге . . . . .	61
§ 12. Признак несуществования или неединственности решений автомодельных задач . . . . .	66
§ 13. Уравнения законов сохранения в форме Годунова. Энтропия . . . . .	71
§ 14. Учет диссипации. Малые возмущения. Уравнение Бюргера . . . . .	77
§ 15. Решения с разрывами как предел непрерывных решений уравнений усложненной модели. Структура ударных волн . . . . .	83
§ 16. Дополнительные соотношения на разрыве . . . . .	91
§ 17. Еще о структуре и о числе дополнительных соотношений . . . . .	101
Заключение . . . . .	116
Список литературы . . . . .	117

## Введение

Лекции посвящены методам исследования некоторого круга одномерных проблем, связанных с распространением нелинейных волн. Рассматриваются ситуации, когда поведение решений описывается некоторой квазилинейной системой уравнений в частных производных, члены низшего порядка дифференцирования которой составляют нелинейную гиперболическую систему. К такого типа системам относится ряд классических систем уравнений, таких как уравнения гидродинамики сжимаемых жидкостей и газов, уравнения магнитной гидродинамики, уравнения нелинейной теории упругости. Как во многих важных задачах характерные масштабы изменения длины и времени будут считаться достаточно большими, такими, что оценка характерных величин членов в уравнениях позволяет пренебрегать членами высшего порядка дифференцирования, оставляя только члены, составляющие гиперболическую систему. В перечисленных классических системах уравнений членами высшего порядка дифференцирования, которыми часто пренебрегают при больших характерных масштабах явлений, являются вязкость и теплопроводность. Однако, эволюция решений нелинейных гиперболических систем приводит к явлению, называемому градиентной катастрофой, то есть к неограниченному росту производных решения, который происходит за конечное время в узких по сравнению с масштабом явления областях. В этих узких областях происходят процессы, для описания которых необходим учет членов с высшими производными, не вошедших в гиперболические уравнения. Узкие области со сложными процессами внутри них в случае рассмотрения явлений с точки зрения крупного масштаба традиционно заменяются поверхностями, на которых испытывают разрывы решения гиперболических систем уравнений. На поверхностях разрыва выставляются граничные условия. В случае классических моделей сплошных сред этими условиями являются соотношения, следующие из законов сохранения. В простейших случаях этих соотношений на поверхностях разрыва оказывается достаточно для правильного получения решения задач. Однако такая ситуация имеет место не всегда. При рассмотрении новых явлений и построении соответствующих моделей часто оказывается необходимым изучать решения в упомянутых узких зонах. Эти решения, учитывающие члены высокого порядка дифференци-

рования, называются решениями задачи о структуре разрыва. Необходимость такого изучения при крупномасштабном описании решений связана с тем, что существуют разрывы, не все соотношения на которых следуют из законов сохранения, а должны выполняться также “дополнительные” соотношения, которые могут теоретически находиться как условия, обеспечивающие существование структуры разрывов. Присутствие такого рода “особых” разрывов приводит при построении решений задач к интересным особенностям.

Лекции ограничиваются рассмотрением одномерных задач, поскольку при рассмотрении проблем, связанных с образованием, распадом, структурой разрывов такое рассмотрение является естественным. Кроме того, как будет видно из дальнейшего, одномерные проблемы представляются достаточно содержательным предметом для изучения.

По поводу одномерных задач следует сделать следующее замечание. Исходная постановка задачи может относиться к одному, двум и трем пространственным переменным. Так например, мы можем рассматривать возмущения, распространяющиеся по нити или по поверхности, как это имеет место в теории “мелкой воды”, или в объеме, как в случае распространения волн в сжимаемых жидкостях и газах или деформируемых твердых телах. Но во всех случаях могут рассматриваться одномерные решения (то есть зависящие от одной пространственной переменной) соответствующих уравнений. В дальнейшем при упоминании о разрывах в решениях уравнений будет часто употребляться выражение “поверхность разрыва”, которое как бы подразумевает в качестве исходной трехмерную постановку задачи. Однако на самом деле, наличие или отсутствие такого скрытого смысла совершенно не важно, а речь просто идет о разрыве решения при некотором (обычно зависящем от времени) значении пространственной координаты.

Описанному кругу вопросов посвящены предлагаемые лекции. Изложение близких вопросов можно найти в монографиях (Гельфанд [7], Годунов [12], Годунов и Роменский [13], Кружков [22], Курант [36], Рождественский и Яненко [44]).

## § 1. Дифференциальные уравнения, описывающие эволюционные процессы

Будут рассматриваться системы уравнений в частных производных вида

$$A_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial t} + B_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} + F_i = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (1.1)$$

По повторяющемуся индексу здесь и далее (если специально не оговорено другое) предполагается суммирование в пределах изменения этого индекса (здесь от 1 до  $n$ ). Величины  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  и  $F_i$  предполагаются непрерывными, достаточно гладкими функциями  $u_p$  ( $p = 1, 2, \dots, n$ ),  $x$  и  $t$ . Если индекс обозначен некоторой буквой и по нему нет суммирования, то в дальнейшем будет предполагаться, что он может принимать любое возможное значение.

Уравнения (1.1) относятся к квазилинейным уравнениям, то есть к уравнениям линейным относительно производных. Уравнения содержат только первые производные, чего всегда можно добиться путем введения обозначений типа  $\partial u_\alpha / \partial x = u_\beta$  и присоединения этих равенств к системе уравнений. Может оказаться, что матрицы  $A_{ij}$  и  $B_{ij}$  или одна из них – вырожденные.

В уравнениях (1.1) переменная  $t$  играет роль времени, а  $x$  – пространственной переменной. Для того, чтобы можно было рассматривать задачи с начальными условиями, на вид системы (1.1) должны быть наложены некоторые требования, обеспечивающие ограниченность скорости изменения решений этой системы при изменении  $t$ . Если значения всех  $u_p$  конечны, то при невырожденности матрицы  $A_{ij}$  неограниченность  $\partial u_j / \partial t$  может иметь место только в случае неограниченных  $\partial u_j / \partial x$ .

Пусть имеется некоторое непрерывное гладкое решение уравнений (1.1)  $u_j = u_j^0(x, t)$ . Произведем линеаризацию уравнений (1.1) около решения  $u_j^0(x, t)$ , то есть рассмотрим уравнения, которые получаются для разности двух решений уравнений (1.1)  $v_j = u_j(x, t) - u_j^0(x, t)$  в предположении, что эта разность мала и что в силу этого можно пренебречь нелинейными членами, выражающимися через  $v_j$ . Эта система уравнений имеет вид

$$A_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial t} + B_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x} + G_{ij} v_j = 0, \quad (1.2)$$

$$G_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial u_j} + \frac{\partial A_{ip}}{\partial u_j} \frac{\partial u_p^0}{\partial t} + \frac{\partial B_{ip}}{\partial u_j} \frac{\partial u_p^0}{\partial x}.$$

Коэффициенты в уравнениях (1.2) являются функциями от  $x$  и  $t$ , поскольку всюду вместо  $u_p$  следует подставить  $u_p^0(x, t)$ .

Рассмотрим малую область изменения  $x$  и  $t$ , в которой пере- численные коэффициенты допустимо считать постоянными. Это делает возможным представлять решение задачи Коши для урав- нений (1.2) в виде суперпозиции решений вида

$$v_j = C_j e^{i(kx - \omega t)}, \quad C_j = \text{const}, \quad j = 1, \dots, n \quad (1.3)$$

$k$  и  $\omega$  – постоянные,  $k$  называется волновым числом, а  $\omega$  – частотой,  $i = \sqrt{-1}$ .

Подстановка этих выражений в (1.2) приводит к линейным однородным алгебраическим уравнениям для нахождения  $C_j$

$$(-i\omega A_{mj} + ikB_{mj} + G_{mj})C_j = 0, \quad j, m = 1, \dots, n$$

Для существования у этой системы нетривиального решения вида (1.3) необходимо, чтобы ее определитель был равен нулю

$$|-i\omega A_{mj} + ikB_{mj} + G_{mj}| = 0 \quad (1.4)$$

Равенство (1.4) представляет связь между волновым числом и частотой и называется *дисперсионным уравнением*. Условие, ограничивающее скорость роста функций  $v_j$  со временем, задается неравенством

$$\text{Im } \omega \leq M \quad \text{при} \quad \text{Im } k = 0. \quad (1.5)$$

Здесь предполагается, что  $\omega$  и  $k$  удовлетворяют дисперсионному уравнению (1.4), причем  $k$  принимает произвольные действительные значения,  $M$  – некоторая постоянная, зависящая от системы уравнений (1.2). Условие (1.5) называется условием *корректности по Петровскому* системы уравнений (1.2). Будет предполагаться, что все рассматриваемые ниже системы уравнений вида (1.1) обладают тем свойством, что в рассматриваемых областях значений переменных  $u_p^0$ ,  $x$  и  $t$  описанная выше линеаризация уравнений (1.1) приводит к уравнениям типа (1.2), для которых найдется единая постоянная  $M$ , участвующая в неравенствах (1.5).

Уравнения корректные по Петровскому представляют наиболее широкий класс уравнений, для которых имеет смысл задача Коши или иная постановка задачи с начальными данными без

ограничений на функции их задающие. Иногда такие уравнения называют *эволюционными*.

Уравнения описанного типа включают в себя, в частности, параболические уравнения, в том числе уравнение теплопроводности. В этом случае запись уравнений в форме (1.1) приводит к вырожденной матрице  $A_{ij}$ .

Если матрица  $A_{ij}$  в системе (1.1) невырожденная, то это позволяет записать систему в разрешенном относительно  $\partial u_i / \partial t$  виде

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + a_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} = h_i \quad (1.6)$$

Коэффициенты  $a_{ij}$  и правые части  $h_i$  считаются непрерывными гладкими функциями  $u_p$ ,  $x$  и  $t$ . Если  $h_i \equiv 0$ , то уравнения становятся однородными, и каждый член содержит первую производную от  $u_j$  либо по  $x$ , либо по  $t$ .

Рассмотрим линейную систему (1.2) с постоянными коэффициентами в форме, разрешенной относительно производных по времени

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + a_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x} + g_{ij} v_j = 0 \quad (1.7)$$

Если сделать линейное преобразование переменных  $v_j$ , то матрица  $a_{ij}$  испытает преобразование подобия и, как известно, ее можно привести этим преобразованием к жордановой форме. Будем считать, что такое преобразование сделано и матрица  $a_{ij}$  – жорданова. Если все собственные числа матрицы  $a_{ij}$  различны, то жорданова матрица диагональна с собственными числами, стоящими по главной диагонали. В этом случае уравнения (1.7) приобретают вид

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + c^{(i)} \frac{\partial v_i}{\partial x} + g_{ij} v_j = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Здесь по индексу, стоящему в скобке, суммирование не производится. Если среди собственных значений действительной матрицы  $a_{ij}$  имеется пара комплексно сопряженных собственных значений, то, очевидно, условие Петровского нарушается. В случае, когда все  $c^{(i)}$  действительны, скорость роста величин  $v_i$  ограничена при ограниченных  $v_i$ . Это означает ограниченность  $\text{Im } \omega(k)$  при действительных значениях  $k$  у решений, зависящих от  $x$  и  $t$  как  $e^{i(kx - \omega t)}$ .

Если среди собственных значений  $c^{(i)}$  имеются кратные, то возможен случай, когда матрица  $a_{ij}$  приводится к диагональному виду. Этот случай с точки зрения выводов относительно роста решений не отличается от предыдущего. Таким образом, если собственные значения матрицы  $a_{ij}$  в уравнении (1.7) действительны и матрица  $a_{ij}$  приводится к диагональной жордановой форме, то условие Петровского (1.5) выполнено.

Если при наличии кратных действительных собственных значений  $c^{(i)}$  у матрицы  $a_{ij}$  жорданова форма не диагональна, то при общего вида матрице  $g_{ij}$  условие Петровского (1.5) нарушается.

Продемонстрируем справедливость этого утверждения на примере системы вида (1.7), состоящей из двух уравнений, в которой матрица  $a_{ij}$  – жорданова недиагональная:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + c \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x} + g_{11}u_1 + g_{12}u_2 &= 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + c \frac{\partial u_2}{\partial x} + g_{21}u_1 + g_{22}u_2 &= 0 \end{aligned}$$

При разыскании решений вида  $u_\alpha = C_\alpha e^{i(kx - \omega t)}$  получим для коэффициентов  $C_\alpha$  систему линейных однородных уравнений, условие существования нетривиальных решений которой дает дисперсионное уравнение, связывающее  $\omega$  и  $k$

$$|-i\omega\delta_{\alpha\beta} + ikc\delta_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}| = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2,$$

где вертикальными прямыми обозначен определитель стоящей между ними матрицы. Раскрытие определителя дает

$$\Omega^2 + i\Omega(g_{11} + g_{22}) - ig_{21}k - g_{12}g_{21} = 0, \quad \Omega = \omega - ck.$$

При  $k \rightarrow \infty$  главными членами в этом уравнении являются первый и третий, так что при  $k \rightarrow \infty$

$$\Omega_{1,2} \approx \pm \sqrt{ig_{21}k}.$$

Очевидно, каково бы ни было действительное значение  $c$  мнимая часть  $\omega$  неограниченно растет при действительных  $k \rightarrow \infty$ . Неограниченность  $\text{Im } \omega$  имеет место и при недиагональности жордановой формы матрицы  $\|a_{ij}\|$  в случае, когда собственное значение  $c$  имеет более высокую кратность.

## § 2. Гиперболические системы.

### Характеристики. Слабые разрывы.

#### Линейные уравнения. Инварианты Римана

В предыдущем параграфе было показано, что, если матрица коэффициентов  $A_{ij}$  исходной системы уравнений (1.1) невырожденная, то систему можно записать в виде (1.6), разрешенном относительно  $\partial u_i / \partial t$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + a_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} = h_i \quad (1.6)$$

Система (1.6) (или система (1.1)) называется *гиперболической*, если путем домножения уравнений на некоторые множители  $l_i^{(k)}$  и суммирования по  $i$  ее можно привести к виду

$$l_i^{(k)} \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + c^{(k)} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) = b_k, \quad b_k = l_i^{(k)} h_i \quad i, k = 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

с действительными значениями  $c^{(k)} = c^{(k)}(u_j, x, t)$ . По индексу, стоящему в скобках, здесь и далее суммирования нет. При этом матрица  $\|l_i^{(k)}(u_j, x, t)\|$  предполагается невырожденной. Это обеспечивает эквивалентность системы (2.1) исходной системе (1.6). Особенность системы (2.1) состоит в том, что в левой части в каждом из уравнений ко всем функциям  $u_i$  применяется один и тот же дифференциальный оператор

$$\frac{\partial}{\partial t} + c^{(k)} \frac{\partial}{\partial x},$$

зависящий от номера уравнения  $k$ .

Смысл матрицы  $\|l_i^{(k)}\|$  и функций  $c^{(k)}$ , зависящих в общем случае от  $u_j, x, t$ , становится понятным из способа приведения системы к виду (2.1). Как было сказано выше, чтобы получить какое-либо уравнение системы (2.1), надо  $i$ -е уравнение системы (1.6) домножить на некоторый множитель  $l_i$  и просуммировать затем по  $i$ . Очевидно, для получения уравнения в форме (2.1) должны выполняться равенства

$$l_i a_{ij} = c l_j,$$

представляющие собой систему однородных линейных алгебраических уравнений для определения  $l_i$ . Чтобы система имела

нетривиальное решение, необходимо обращение в нуль ее определителя

$$|a_{ij} - c\delta_{ij}| = 0,$$

где  $\delta_{ij}$  – символы Кронекера. Это алгебраическое уравнение для определения величины  $c$  называют *характеристическим уравнением* системы (2.1).

Величины  $c(u_m, x, t)$ , которые называются *скоростями характеристик*, или *характеристическими скоростями*, предполагаются действительными. Они являются *собственными значениями* матрицы  $\|a_{ij}(u_m, x, t)\|$ , а  $l_i(u_m, x, t)$  – компонентами ее *левого собственного вектора*  $\mathbf{l}$ , соответствующего выбранному  $c(u_m, x, t)$ .

Для возможности приведения системы к форме (2.1) у матрицы  $\|a_{ij}\|$  должно существовать  $n$  линейно независимых левых собственных векторов  $l_i^{(1)}, l_i^{(2)}, \dots, l_i^{(n)}$ . Они существуют, если все собственные значения  $c^{(1)}, \dots, c^{(n)}$  различны. Если же среди  $c^{(k)}$  есть кратные, то для гиперболичности необходимо, чтобы им соответствовало столько независимых собственных векторов, какова кратность  $c^{(k)}$ . Для этого, как известно из алгебры, нужно, чтобы жорданова форма матрицы  $\|a_{ij}\|$  была бы диагональной. Таким образом, система (1.6) называется *гиперболической*, если в рассматриваемой области изменения  $u_m$  все собственные значения  $c^{(k)}(u_m)$  матрицы  $\|a_{ij}(u_m)\|$  действительны и имеется  $n$  линейно независимых собственных векторов  $\mathbf{l}^{(k)}$ , или, что то же самое, жорданова форма матрицы  $\|a_{ij}\|$  диагональна с действительными элементами. Если все собственные значения  $c^{(k)}(u_m)$  к тому же различны, то говорят о *гиперболичности в узком смысле*.

Очевидно, что для приведения системы (1.1) к форме (2.1) не обязательно приводить ее сначала к виду (1.6). Множители  $l_i$  можно находить прямо для уравнений (1.1). В дальнейшем будем предполагать, что рассматриваемая система уравнений гиперболическая, если не оговорено противное.

Когда гиперболическая система представлена в виде (2.1), говорят, что она приведена к *характеристической форме*. Левая часть каждого уравнения содержит производные на плоскости  $x, t$  вдоль одного направления  $dx/dt = c^{(k)}$ , которое называется *характеристическим*. Линия, касающаяся в каждой точке некоторого характеристического направления, называется *характеристикой*.

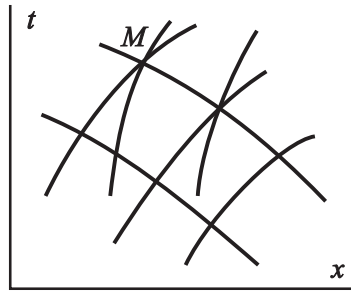


Рис. 2.1.

Характеристики, соответствующие собственному значению  $c^{(k)}$ , представляют на плоскости  $x, t$  семейство кривых, заданное уравнением

$$\frac{dx}{dt} = c^{(k)}(u_j(x, t), x, t),$$

где  $u_j(x, t)$  – некоторое решение рассматриваемой системы уравнений. Будем называть это семейство кривых  $k$ -м семейством характеристик. Очевидно, характеристики, вообще говоря, зависят от выбора решения. Если  $a_{ij}$  не зависят от  $u_k$ , например, если система уравнений линейна, то значения характеристических скоростей и сами характеристики не зависят от выбора решения. В каждой точке  $M$  плоскости  $x, t$  при заданных значениях  $u_j$  существует  $n$  характеристических направлений, соответствующих  $c^{(1)}, c^{(2)}, \dots, c^{(n)}$ , и через эту точку проходят  $n$  характеристик (рис. 2.1), некоторые из которых могут совпадать при совпадении значений  $c$ .

Каждое из уравнений (2.1), связывающее производные функций  $u_j$  вдоль одного характеристического направления, называют *соотношением на соответствующей характеристике*.

Характеристики играют важную роль в формировании решений системы уравнений гиперболического типа при заданных начальных условиях. Задачу нахождения функций  $u_i(x, t)$ , удовлетворяющих уравнениям (1.6), когда при  $t = t_0$  заданы значения этих функций  $u_i(x, t_0) = u_i^0(x)$  при всех  $-\infty \leq x \leq \infty$ , называют *задачей Коши*.

На использовании характеристической формы записи гиперболической системы уравнений основан метод построения решения, который называется *методом характеристик*. Этот ме-

тод часто используется как численный (Рождественский и Яненко [44]). Пусть рассматривается задача Коши с начальными условиями, заданными при  $t = 0$ . Построим приближенно решение системы в момент времени  $t = \Delta t$ , где  $\Delta t$  достаточно мало. Если умножить уравнения (2.1) на  $\Delta t$ , то выражение в скобке после умножения на  $\Delta t$  даст приращение  $\Delta u_i$  функции  $u_i$  на отрезке характеристики, соответствующем  $\Delta t$ . Левые части получившихся уравнений будут представлять комбинации таких приращений, а правые части дадут  $b_k \Delta t$ . Предполагается, что на плоскости  $x, t$  характеристики сохраняют свое направление в течение промежутка времени  $\Delta t$  и при изменении  $x$  на величину порядка  $\max_i |c_i| \Delta t$ . Это позволит для каждой точки  $x$  при  $t = \Delta t$  провести через нее все  $n$  характеристик. Зная значения  $u_i$  в точках, где характеристики покидают ось  $x$ , и воспользовавшись упомянутыми выше  $n$  соотношениями для  $\Delta u_i$ , можно найти значения  $u_i(x, \Delta t)$  в интересующей нас точке. Таким образом, двигаясь шагами, равными  $\Delta t$ , можно построить решение уравнений при конечных  $t$ . Сходимость такого метода построения решения при  $\Delta t \rightarrow 0$  доказывается в учебниках по численным методам и имеет место при условии ограниченности производных  $\partial u_i / \partial x$ .

С методом характеристик связаны понятия об *области зависимости* решения в некоторой точке и области влияния начальных данных. При построении решения методом характеристик очевидно, что решение в точке  $x, t$  может зависеть от поведения решения в предшествующие моменты времени только в области на плоскости  $x, t$ , расположенной между крайними характеристиками, проведенными из рассматриваемой точки в сторону убывания времени. Наоборот, начальные условия, заданные на некотором отрезке оси  $x$ , могут повлиять на решение в последующие моменты времени только в области между крайними характеристиками, проведенными из концов упомянутого отрезка.

В связи с характеристиками особо следует сказать о таком свойстве решений гиперболических уравнений как слабые разрывы. *Слабым разрывом* называется разрыв производных функций, составляющих решение, при непрерывности самих функций. Можно показать, что слабые разрывы распространяются с характеристическими скоростями, то есть по характеристикам на плоскости  $x, t$ .

Предположим, что на некоторой линии  $x = X(t)$  на плоскости  $x, t$  терпит разрыв хотя бы одна из первых производных функций  $u_i(x, t)$ , а сами функции  $u_i(x, t)$  непрерывны. Будем считать, что

на линии  $x = X(t)$  существуют односторонние производные от  $u_i(x, t)$  с обеих сторон от этой линии. Обозначим через  $(\partial u_i / \partial t)^-$  и  $(\partial u_i / \partial x)^-$  значения производных со стороны  $x > X(t)$  и через  $(\partial u_i / \partial t)^+$  и  $(\partial u_i / \partial x)^+$  – со стороны  $x < X(t)$  (для определенности считается  $dX/dt > 0$  и знаки “–” и “+” читаются как “перед” и “за” слабым разрывом). Будем обозначать квадратными скобками разрыв (скачок) величин, заключенных в скобки:

$$\left[ \frac{\partial u_i}{\partial t} \right] = \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^+ - \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^-, \quad \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x} \right] = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^+ - \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^-.$$

Поскольку по обе стороны от слабого разрыва справедлива система уравнений, которую возьмем в форме (1.6), а коэффициенты  $a_{ij}(u_k)$  непрерывны на слабом разрыве, то легко получить соотношения

$$\left[ \frac{\partial u_i}{\partial t} \right] + a_{ij} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x} \right] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2)$$

Эти уравнения получены вычитанием уравнений, записанных со стороны “+”, из тех же уравнений со стороны “–”.

Другая группа соотношений между скачками производных следует из условий непрерывности функций  $u_i(x, t)$  на слабом разрыве, которые можно записать в виде

$$[u_i] = 0 \quad \text{на линии} \quad x = X(t),$$

где  $[u_i] = u_i^+ - u_i^-$ . Дифференцируя это равенство вдоль линии слабого разрыва  $x = X(t)$ , получим

$$\left[ \frac{\partial u_i}{\partial t} \right] + c \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x} \right] = 0, \quad c \equiv \frac{dX}{dt}.$$

Здесь использованы очевидные равенства

$$\frac{\partial [u_i]}{\partial t} = \frac{\partial u_i^+}{\partial t} - \frac{\partial u_i^-}{\partial t} = \left[ \frac{\partial u_i}{\partial t} \right], \quad \frac{\partial [u_i]}{\partial x} = \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x} \right].$$

Используя полученные выше соотношения, запишем равенства (2.2) в виде

$$(a_{ij} - c\delta_{ij}) \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x} \right] = 0. \quad (2.3)$$

Это система однородных линейных алгебраических уравнений для скачков производных. Существование нетривиальных разрывов первых производных возможно, если равен нулю определитель системы

$$|a_{ij} - c\delta_{ij}| = 0,$$

то есть если скорость слабого разрыва  $c = dX/dt$  совпадает с одной из характеристических скоростей системы уравнений (1.6). Таким образом, линия слабого разрыва на плоскости  $x, t$  представляет собой *характеристику*. При этом скачки производных  $[\partial u_i/\partial x]$  и  $[\partial u_i/\partial t]$  пропорциональны правому собственному вектору матрицы  $\|a_{ij}\|$  в рассматриваемой точке, а величины этих скачков определяются заданием одной (если  $c$  – однократный корень характеристического уравнения (2.3)) произвольной постоянной.

Если терпит разрыв, например, производная  $\partial^s u_i/\partial x^p \partial t^q$ ,  $p + q = s$ , при условии, что все производные  $s - 1$ -го и более низкого порядка непрерывны, то, продифференцировав систему уравнений  $p - 1$  раз по  $x$  и  $q$  раз по  $t$ , получим

$$\frac{\partial^s u_i}{\partial x^{p-1} \partial t^{q+1}} + a_{ij} \frac{\partial^s u_j}{\partial x^p \partial t^q} = (\dots)$$

где многоточием обозначены члены более низкого порядка дифференцирования. Вычитая уравнения, написанные с разных сторон от поверхности разрыва, одно из другого, получим

$$\left[ \frac{\partial^s u_i}{\partial x^{p-1} \partial t^{q+1}} \right] + a_{ij} \left[ \frac{\partial^s u_j}{\partial x^p \partial t^q} \right] = 0.$$

Используя непрерывность производной  $\partial^{s-1} u_i/\partial x^{p-1} \partial t^q$ , взятой вдоль линии слабого разрыва, можем записать равенство

$$\left[ \frac{\partial^s u_i}{\partial x^{p-1} \partial t^{q+1}} \right] + c \left[ \frac{\partial^s u_i}{\partial x^p \partial t^q} \right] = 0.$$

Из двух последних равенств следует

$$(a_{ij} - c\delta_{ij}) \left[ \frac{\partial^s u_j}{\partial x^p \partial t^q} \right] = 0,$$

и аналогично предыдущему получаем, что  $c$  – характеристическая скорость системы (1.6), а  $[\partial^s u_j/\partial x^p \partial t^q]$  представляют величины, пропорциональные компонентам правого собственного вектора матрицы  $\|a_{ij}\|$ .

Если в уравнениях (1.6)  $h_i \equiv 0$ , то имеем систему однородных уравнений

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + a_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} = 0 \quad (2.4)$$

Заметим, что такие однородные системы уравнений могут возникать при рассмотрении очень коротких волн, когда производные по координатам очень велики, а недифференциальные члены  $h_i$  в системе уравнений (1.6) оказываются малыми по сравнению с остальными членами, содержащими производные, так что ими можно пренебречь. Кроме того, если при рассмотрении коротких волн ограничиться малой областью изменения  $x$  и  $t$ , в которой, однако, решение изменяется существенно, то можно считать, что коэффициенты  $a_{ij}$  являются функциями только  $u_k$ .

Особенно ясно проявляется роль характеристик, когда система (2.4) является *линейной с постоянными коэффициентами*. В этом случае собственные значения матрицы  $\|a_{ij}\|$  постоянны,  $c^{(m)} = \text{const}$ , и характеристики на плоскости  $x, t$  являются прямыми

$$x = c^{(m)}t + \text{const}.$$

Заметим, что гиперболические линейные системы с постоянными коэффициентами корректны по Петровскому, то есть выполнены условия (1.5).

Напомним еще раз о линеаризации, о которой уже было сказано в § 1. Линейные уравнения получаются, в частности, при рассмотрении малых возмущений на однородном фоне, заданном величинами  $u_i = u_i^0 = \text{const}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Рассмотрим решение системы (2.4) вида

$$u_i = u_i^0 + v_i(x, t), \quad u_i^0 = \text{const},$$

в котором  $v_i(x, t)$  малы, так что зависимостью  $a_{ik}$  от  $v_j$  можно пренебречь. Чтобы нелинейная система (2.4) имела решение указанного вида, функции  $v_i(x, t)$ , представляющие малые возмущения фона, должны удовлетворять системе линейных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + a_{ik}(u_j^0) \frac{\partial v_k}{\partial x} = 0.$$

Эта операция называется *линеаризацией* уравнений (2.4) около состояния  $u_j^0$ . Коэффициенты  $a_{ik}(u_j^0)$  будут постоянными, а ха-

характеристические скорости малых возмущений  $c^{(m)}(u_j^0)$  и собственные векторы зависят от состояния  $u_j^0$ , около которого проводилась линеаризация, и тоже постоянны.

Если элементы матрицы  $a_{ij}$  постоянны, элементы матрицы  $l_j^{(m)}$  в уравнениях (2.1) тоже постоянны. Тогда введением новых искомым функций  $w_m = l_j^{(m)} u_j$  уравнения системы (2.4) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_m}{\partial t} + c^{(m)} \frac{\partial w_m}{\partial x} &= 0, \quad c^{(m)} = \text{const}, \quad m = 1, 2, \dots, n, \quad (2.5) \\ w_m &= l_j^{(m)} u_j, \quad l_j^{(m)} = \text{const}. \quad (2.6) \end{aligned}$$

Форма записи (2.5) линейной системы замечательна тем, что каждое уравнение содержит только одну неизвестную функцию  $w_m$ , и система распадается на  $n$  независимых уравнений. Каждая из функций  $w_m$  сохраняет свое значение вдоль характеристик своего  $m$ -го семейства, то есть имеют место равенства

$$w_m = w_m(x - c^{(m)}t). \quad (2.7)$$

Функции  $w_m(v_j)$ , сохраняющие свое значения на характеристиках, называются *инвариантами Римана* системы с постоянными коэффициентами  $a_{ik}$ . Полученное решение для каждой функции  $w_m$  представляет собой *бегущую волну*, движущуюся с постоянной скоростью  $c^{(m)}$  без изменения формы в виде произвольной функции. *Скорости распространения малых возмущений совпадают с характеристическими скоростями*. Общее решение линейной системы имеет вид суммы  $n$  волн, бегущих с характеристическими скоростями. Поскольку  $\det \|l_i^{(k)}\| \neq 0$ , исходные функции  $u_k$  находятся как решения системы алгебраических уравнений (2.6), то есть в виде линейных комбинаций  $w_m$ .

В случае задачи Коши значения функций  $u_k(x)$  при  $t = 0$  позволяют найти начальные условия для уравнений (2.5)  $w_m(x, 0) = w_m^0(x)$  в каждой точке оси  $x$ . Вдоль каждой из  $n$  характеристик на плоскости  $x, t$  сохраняется значение соответствующего ей инварианта Римана  $w_m(x - c^{(m)}t)$ . Это значит, что в любую точку плоскости  $x, t$  вдоль приходящих в нее  $n$  характеристик приносятся значения функций  $w_m^0(x)$ ,  $m = 1, \dots, n$ , заданные в начальный момент времени  $t = 0$ .

Решения в виде бегущих волн могут быть получены непосредственно для системы (2.4) при  $a_{ij} = \text{const}$  без перехода к новым

функциям  $w_m$ . Достаточно подставить в эту систему зависимость вида  $u_j = u_j(x - ct)$ . Общее решение системы (2.4) имеет вид линейной комбинации бегущих волн

$$u_i = \sum_{m=1}^n r_i^{(m)} Z_m(x - c^{(m)}t). \quad (2.8)$$

Здесь  $\{r_i^{(m)}\}$  – правый собственный вектор матрицы  $\|a_{ik}\|$ , соответствующий характеристической скорости  $c^{(m)}$ , второй множитель  $Z_m(x - c^{(m)}t)$  – произвольная функция (*амплитуда  $m$ -ой волны*), которая при подходящей нормировке вектора  $\{r_i^{(m)}\}$  совпадает с инвариантом Римана  $w_m(x - c^{(m)}t)$ . Действительно, как известно, левые и правые собственные векторы матрицы  $l_i^{(m)}$  и  $r_i^{(k)}$  взаимно ортогональны при  $c^{(m)} \neq c^{(k)}$ . Пронормируем векторы  $\{r_i^{(k)}\}$  так, чтобы  $l_i^{(m)} r_i^{(m)} = 1$ ,  $m = 1, 2, \dots, n$ , тогда, домножив равенство (2.8) на  $l_i^{(p)}$ , получим

$$w_p = Z_p, \quad p = 1, 2, \dots, n. \quad (2.9)$$

Функции, задающие зависимость инвариантов Римана от своих аргументов (2.7), могут содержать разрывы (например, если они были в начальных данных). Согласно равенствам (2.7), скорость распространения такого линейного разрыва совпадает с одной из характеристических скоростей  $c^{(m)}$ . Для дальнейшего подчеркнем, что, так как  $c^{(m)} = \text{const}$ , то скорость распространения линейного разрыва совпадает с характеристической скоростью с обеих сторон от разрыва. Если  $c^{(m)}$  однократный корень характеристического уравнения, то на этом разрыве испытывает скачок  $w_m$ , а остальные  $w_k$  ( $k \neq m$ ) – непрерывны. Как видно из равенств (2.8) и (2.9), скачки переменных  $u_i$  на этом разрыве пропорциональны правому собственному вектору  $\{r_i^{(m)}\}$  матрицы  $\|a_{ij}\|$ . Очевидно, все сказанное относится к решениям линеаризованных уравнений, то есть к волнам бесконечно малой амплитуды на однородном фоне  $u_k = u_k^0 = \text{const}$ .

Заметим, что если при отсутствии зависимости  $a_{ij}$  от  $u_k$  система (1.6) имеет отличные от нуля недифференциальные члены (правые части) или ее коэффициенты  $a_{ij}$  зависят от  $x$  или  $t$ , то систему можно привести к виду (2.5), но с правыми частями, не содержащими производных от  $w_j$ . При этом функции  $w_m$  будут

меняться вдоль характеристик, а сама система уравнений не будет распадаться в общем случае на отдельные уравнения из-за наличия перекрестных недифференциальных членов.

Введение инвариантов Римана и соответствующее преобразование линейной системы к виду (2.5) во многих случаях весьма полезно. К сожалению, когда коэффициенты  $a_{ik}$  не постоянны, такого преобразования в общем случае сделать нельзя. Однако, его можно всегда сделать для систем, состоящих из двух однородных уравнений (Рождественский и Яненко [1983]) в случае, когда  $a_{ij} = a_{ij}(u_k)$ . Для этого запишем однородные уравнения (2.4) в характеристической форме (2.1)

$$l_{\beta}^{(\delta)}(u_{\gamma}) \left\{ \frac{\partial u_{\beta}}{\partial t} + c^{(\delta)}(u_{\gamma}) \frac{\partial u_{\beta}}{\partial x} \right\} = 0, \quad \beta, \gamma, \delta = 1, 2. \quad (2.10)$$

(По индексу  $\delta$ , заключенному в скобках, суммирование не производится).

Здесь собственные значения  $c^{(\delta)}$  и собственные векторы  $l_{\beta}^{(\delta)}$  являются функциями  $u_1, u_2$ , причем векторы  $l^{(1)} = \{l_1^{(1)}, l_2^{(1)}\}$  и  $l^{(2)} = \{l_1^{(2)}, l_2^{(2)}\}$  линейно независимы. Возьмем на плоскости  $u_1, u_2$  семейство линий, ортогональных собственному вектору  $l^{(\delta)}$  ( $\delta = 1, 2$ ), и введем функцию  $I_{\delta}(u_1, u_2)$ , принимающую постоянные значения на этих линиях. Градиент функции  $I_{\delta}$  направлен по вектору  $l^{(\delta)}$ , то есть

$$\frac{\partial I_{\delta}}{\partial u_{\beta}} = \lambda^{(\delta)} l_{\beta}^{(\delta)}, \quad \beta, \delta = 1, 2.$$

Здесь  $\lambda^{(\delta)}$  – коэффициент пропорциональности, в общем случае зависящий от  $u_j$ .

При домножении уравнений (2.10) на коэффициенты пропорциональности  $\lambda^{(\delta)}(u_{\gamma})$ , система приводится к виду, аналогичному (2.5)

$$\frac{\partial I_{\delta}}{\partial t} + c^{(\delta)}(I_1, I_2) \frac{\partial I_{\delta}}{\partial x} = 0, \quad \delta = 1, 2. \quad (2.11)$$

Функции  $I_{\delta}(u_{\gamma})$  сохраняются на соответствующих характеристиках и называются *инвариантами Римана* для системы (2.4) (при  $n = 2$ ). Они удовлетворяют системе уравнений (2.11). В отличие от уравнений с постоянными коэффициентами теперь  $c^{(\delta)}$  являются функциями от  $I_1$  и  $I_2$ , а система (2.11) для  $I_{\delta}$  в общем случае не распадается на отдельные независимые уравнения, как это было в линейном случае.

### § 3. Граничные условия. Эволюционность

Во многих случаях требуется найти решение системы уравнений в ограниченной области изменения  $x$  или в примыкающих одна к другой областях с одинаковыми или разными системами уравнений, действующими в этих областях. Для построения однозначного решения нужно задавать, кроме *начальных* условий, еще *граничные условия* – некоторые соотношения, связывающие функции  $u_j$  на границе.

Рассмотрим сначала вопрос о числе граничных условий необходимым для однозначного построения с одной стороны от границы решения линейной гиперболической системы уравнений с постоянными коэффициентами при наличии начальных условий (*начально-краевая задача*).

Пусть имеется граница, положение которой задано ее законом движения  $x = X(t)$  или скоростью  $dX/dt = W(t)$ . Функции  $u_j$  считаются заданными в момент времени  $t_0$  при  $x > X(t_0)$  (начальные условия). Рассмотрим сначала задачу, когда требуется построить решение линейной однородной системы (2.4) с постоянными коэффициентами при  $t > t_0$  в области  $x > X(t)$ . В этом случае может оказаться, что некоторые из волн, содержащихся в решении (2.8), приносят в точку  $(x, t)$  на плоскости  $x, t$  значения своих амплитуд  $Z_m$  не из области начальных данных, а с указанной границы, и чтобы найти однозначное решение в этой точке, надо знать значения амплитуд этих волн на границе.

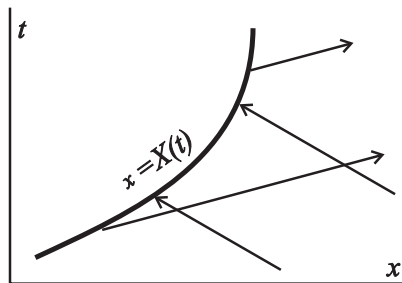


Рис. 3.1.

Закон движения границы  $x = X(t)$  на плоскости  $x, t$  представлен жирной линией на рис. 3.1, наклон которой в каждой точке

определен скоростью  $W$ . Будем сначала предполагать, что скорость границы  $W$  не совпадает ни с одной из характеристических скоростей системы (2.4), то есть  $W \neq c^{(m)}$ ,  $m = 1, \dots, n$ . Тогда все  $n$  характеристик (и соответствующие им бегущие волны) в каждой точке границы можно разделить на *характеристики, уходящие* с ростом времени от границы в область  $x > X(t)$ , для которых  $c^{(r)} > W$ ,  $r = 1, 2, \dots, s$ , и *характеристики, приходящие к границе*, для которых  $c^{(l)} < W$ ,  $l = s + 1, \dots, n$ . На рис. 3.1 характеристики изображены прямыми со стрелками в направлении роста  $t$ . На приходящих характеристиках из начальных условий известны значения инвариантов Римана  $w_l$ . Для построения решения (2.8) нужно знать значения остальных функций  $w_r$  ( $r = 1, \dots, s$ ) на уходящих от границы характеристиках.

Таким образом, для однозначного продолжения по времени решения нужно так задать граничные условия, чтобы на кривой  $x = X(t)$  они позволили найти  $s$  значений инвариантов Римана уходящих волн  $w_r$  по известным значениям инвариантов Римана приходящих волн  $w_l$ , то есть  $w_r = \varphi_r(w_{s+1}, \dots, w_n)$ ,  $r = 1, 2, \dots, s$ . Для этого число независимых соотношений, задающих связи между функциями  $w_j$ , плюс закон движения границы должно быть равно  $s + 1$ .

Часто в задачах механики движение границы не задано, но имеется выражение для ее скорости  $W$  через функции  $u_i$ , а связи между неизвестными функциями на границе включают и величину  $W$ . В этом случае все  $s + 1$  соотношения становятся равноправными. В исходных переменных  $u_i$  они могут быть записаны в виде

$$\Phi_q(u_1, \dots, u_n, W) = 0, \quad q = 1, 2, \dots, s + 1. \quad (3.1)$$

Эти соотношения должны позволить найти  $s + 1$  неизвестную величину  $w_1, w_2, \dots, w_s, W$ . Кроме того, следствием этих уравнений не должно быть никакое соотношение, связывающее между собой амплитуды приходящих волн  $w_{s+1}, \dots, w_n$ , так как эта связь будет в общем случае противоречить произвольности начальных условий, определяющих эти величины. Чтобы это было возможно, система (3.1) должна содержать  $s + 1$  уравнение с отличными от нуля якобианом относительно  $w_r$  и  $W$ ,  $r = 1, 2, \dots, s$ .

Таким образом, для однозначной разрешимости начально-краевой задачи для линейной гиперболической системы необходимо задавать  $s + 1$  граничных условий вида (3.1), обладающих отличным от нуля якобианом относительно  $w_1, w_2, \dots, w_s$  и  $W$ , где  $s -$

число характеристик, уходящих от границы в рассматриваемой точке  $x, t$ . Такие *граничные условия* называются *эволюционными*. Часто говорят об *эволюционной границе*, имея в виду то же самое. Заметим, что часто в приложениях, когда разные соотношения на разрыве имеют разный физический смысл, условие отличия от нуля якобиана не проверяется, поскольку это условие выполняется в случае общего положения.

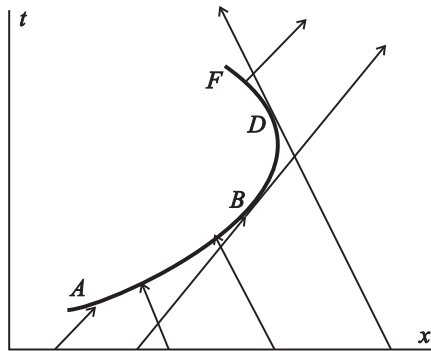


Рис. 3.2.

Бывают задачи с таким законом движения границы, что необходимое для эволюционности количество условий может меняться вдоль линии  $x = X(t)$ . Это происходит тогда, когда на ней есть точки, где какая-либо из величин  $W - c^{(m)}$  меняет знак. Иллюстрация такого положения для системы двух уравнений ( $n = 2$ ) приведена на рис. 3.2. На участке границы  $AB$  оба семейства характеристик приходящие, и требуемое условиями эволюционности одно граничное условие служит для определения закона движения границы. На участке  $BD$  надо задать еще одно условие, на участке  $DF$  – два.

В некоторых случаях граничные условия должны выставляться на границе, разделяющей области, в каждой из которых решение описывается своей гиперболической системой (это могут быть, в частности, системы и с различным числом неизвестных). В этом случае условие эволюционности границы остается прежним, однако под  $s$  следует понимать число всех уходящих в обе стороны от границы характеристик (налево уходят характеристики, у которых скорости меньше, чем  $W$ ).

Отметим здесь особый случай, встречающийся, однако, в силу некоторых причин, связанных с симметрией, достаточно часто. Предположим, что система соотношений, предназначенная для определения величин  $w_1, w_2, \dots, w_s$ ,  $W$  на границе, распадается на независимые подсистемы. Тогда условие эволюционности граничных условий заключается в равенстве числа соотношений в каждой из подсистем числу определяемых из этой подсистемы неизвестных (при отличии от нуля соответствующих якобианов). Этот вопрос будет подробно рассматриваться в связи с условиями на разрывах решений (§ 6).

Для *нелинейных задач под условиями эволюционности границы подразумевается выполнение условий эволюционности для линеаризованной задачи*. Линеаризация производится в малой окрестности точки  $u_i^0$  на границе, в которой считается, что  $u_i = u_i^0 + v_i(x, t)$ , при этом  $u_i = u_i^0 = \text{const}$ , а  $v_i$  малы. Кроме того, условия эволюционности достаточно проверять для коротких волн, когда недифференциальными членами уравнений можно пренебречь по сравнению с дифференциальными.

Эволюционность означает существование однозначного решения задачи о взаимодействии границы с малыми возмущениями в рамках линеаризованной постановки задачи для функций  $v_i$  и  $\delta W$ , где  $\delta W$  – малое возмущение скорости границы.

Нарушение условий эволюционности означает, что линеаризованная (или линейная) задача о взаимодействии малых возмущений с границей или имеет неоднозначное решение или неразрешима. Если число независимых граничных условий недостаточно для однозначного определения уходящих возмущений и возмущения скорости границы  $\delta W$ , то решение задачи содержит произвол. Обычно это связано с физической недоопределенностью постановки граничных условий (решения правильно поставленных задач не должны содержать произвольных функций). Более глубокое рассмотрение физической сущности проблемы иногда приводит к постановке заранее не очевидных дополнительных граничных условий (см. § 16, § 17), которые делают рассматриваемую границу эволюционной.

Когда число имеющихся граничных условий превышает  $s + 1$  линейная задача неразрешима. В нелинейной постановке решение правильно поставленной задачи должно существовать. Это означает, что взаимодействие границы с малыми возмущениями приводит к не малым по величине возмущениям, например, к распаду неэволюционного разрыва (см. § 12).

Часто *неэволюционность* граничных условий рассматривают как *неустойчивость решения задачи*. Если граничных условий недостаточно, то решение линеаризованной задачи содержит произвол, что позволяет построить сколь угодно быстро растущее решение, удовлетворяющее начальным и граничным условиям. Если граничных условий слишком много, но существует решение задачи о взаимодействии границы с малыми возмущениями в нелинейной постановке, когда возникающие возмущения не малы, то это тоже можно рассматривать как неустойчивость.

До сих пор предполагалось, что скорость границы  $W$  не равна ни одной из характеристических скоростей. Если такое равенство имеет место, то будем говорить, что на границе выполнено *условие Жуге* (по аналогии с теорией детонационных волн (Ландау и Лившиц [38])). К такого типа границам относятся некоторые разрывы в задачах механики сплошных сред, играющие важную роль при построении решений.

Рассмотрим кратко, следуя работам (Соболев [47], Hersch [55]), вопрос о правильной постановке граничных условий для *эволюционной системы уравнений*, то есть для произвольной (не обязательно гиперболической) системы уравнений, удовлетворяющей условию корректности (1.5). Будем считать, что система уравнений линейна, а коэффициенты – постоянны (обоснование допустимости таких предположений были приведены ранее). Тогда решение уравнений можно строить, разлагая его в интеграл Фурье по времени, то есть рассматривая решение как суперпозицию решений, построенных независимо для каждой гармоники Фурье с зависимостью от времени вида  $e^{-i\omega t}$ . Как известно (Лаврентьев и Шабат [37]), для правильного построения решения следует проводить преобразование Фурье по прямой  $\text{Im } \omega = \text{const}$  при условии, что  $\text{Im } \omega$  достаточно велико. Из дальнейших рассуждений будет ясно, что достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\text{Im } \omega > M \quad (3.2)$$

где  $M$  – постоянная, входящая в определение корректности (1.5).

При выполнении этого неравенства из (1.5) следует, что соответствующие этим  $\omega$  значения  $k$ , удовлетворяющие дисперсионному уравнению (1.4), не могут быть действительными. Это значит, что все  $k$ , удовлетворяющие дисперсионному уравнению с заданным  $\omega$ , делятся на две группы в соответствии со знаком  $\text{Im } k$  при

$\text{Im } \omega > M$

$$\begin{aligned} \text{Im } k_r(\omega) > 0 & \quad \text{при } r = 1, 2, \dots, s \\ \text{Im } k_l(\omega) < 0 & \quad \text{при } l = s + 1, s + 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Может оказаться, что  $s = 0$  или  $s = n$ , тогда одна из групп не существует.

Первая группа корней соответствует решениям вида

$$C_j e^{i(k(\omega)x - \omega t)} \quad (3.4)$$

которые при  $\text{Im } \omega > M$  убывают при  $x \rightarrow \infty$ , в то время как вторая группа корней соответствует решениям, которые неограниченно растут при  $x \rightarrow \infty$ . Если рассматривается область  $x > 0$ , то первая группа корней  $j = 1, 2, \dots, s$  соответствует возмущениям, которые уходят от границы  $x = 0$  в положительном направлении оси  $x$ , а вторая группа корней – возмущениям, приходящим к  $x = 0$  – границе области  $x > 0$ , где рассматривается решение.

Действительно, показатель скорости роста возмущений, которые соответствуют действительным  $k$ , ограничен постоянной  $M$ , в то время как на границе при  $x = 0$  этот же показатель равен  $\text{Im } \omega > M$ , то есть больше  $M$ . Возмущения, которые вышли в предшествующие моменты времени, оказываются меньше возмущения на границе в текущий момент времени, что обуславливает пространственное убывание возмущений. Таким образом, возмущения вида (3.4) с номерами  $j = 1, 2, \dots, s$  следует считать уходящими в положительную сторону оси  $x$  от границы  $x = 0$ . Если среди корней  $k_j(\omega)$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$  нет тождественно кратных, что будем предполагать, то граничные условия должны определить функции  $C_j(\omega)$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$  и  $\widetilde{W}(\omega)$ ,  $\widetilde{W}(\omega)$  – преобразование Фурье от  $W(t)$ . Здесь предполагается, что невозмущенное положение границы задается как  $x = 0$ , а скорость  $W(t)$  границы зависит от ее взаимодействия с малыми возмущениями и является малой величиной, подлежащей нахождению.

Таким образом, как и в случае гиперболических уравнений, условие эволюционности граничных условий для корректной (эволюционной) системы уравнений требует, чтобы число граничных условий превосходило на единицу число  $s$  уходящих возмущений, определенное неравенствами (3.3).

Если невозмущенная граница движется, то для определения числа  $s$  уходящих от границы возмущений следует предварительно в системе уравнений перейти в систему координат, движущуюся со скоростью невозмущенной границы.

## § 4. Волны Римана

Для системы нелинейных гиперболических уравнений (2.4) в случае, когда  $a_{ij} = a_{ij}(u_k)$ , то есть для системы

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + a_{ij}(u_k) \frac{\partial u_j}{\partial x} = 0, \quad i, j, k = 1, \dots, n, \quad (4.1)$$

рассмотрим некоторые частные решения специального вида, которые называются *волнами Римана*, или *простыми волнами*, хотя последний термин имеет более общее содержание, так как включает в себя не только одномерные нестационарные волны, но и стационарные двумерные волны, такие, как волны Прандтля-Майера в газовой динамике и аналогичные волны в других средах.

Решение системы (4.1) представляет *волну Римана*, если все  $u_k$  являются функциями одной величины  $\vartheta = \vartheta(x, t)$

$$u_k = u_k(\vartheta(x, t)), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4.2)$$

Подстановка решения (4.2) в уравнения (4.1) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(a_{ij} - c\delta_{ij}) \frac{du_j}{d\vartheta} = 0, \quad \text{где } c = -\frac{\partial \vartheta}{\partial t} / \frac{\partial \vartheta}{\partial x}. \quad (4.3)$$

Нетривиальное решение линейной однородной системы (4.3) относительно функций  $du_j/d\vartheta$  возможно при равенстве нулю определителя этой системы

$$|a_{ij} - c\delta_{ij}| = 0. \quad (4.4)$$

Это значит, что введенная равенством (4.3) величина  $c$  совпадает с одной из характеристических скоростей системы (4.1), то есть  $c = c^{(m)}(u_k)$ ,  $m, k = 1, \dots, n$ . При этом уравнения (4.3) определяют в пространстве  $u_k$  *интегральные кривые*.

При выполнении уравнения (4.4) производные  $du_j/d\vartheta$  образуют правый собственный вектор матрицы  $a_{ij}(u_k)$ . Заданному значению  $c^{(m)}$  в каждой точке пространства  $u_k$  соответствует собственный вектор, а уравнения (4.3) определяют решения, такие, что соответствующие интегральные кривые в каждой точке касаются собственного вектора.

Количество различных решений типа волн Римана определяется числом линейно независимых собственных векторов. Из

гиперболичности системы следует, что это число равно  $n$ . Будем дальше рассматривать одну из волн Римана, соответствующую простому корню характеристического уравнения, опуская индекс  $(m)$  в обозначении характеристической скорости.

На каждой интегральной кривой все  $u_k$  представляют собой функции одного параметра, который может быть выбран на этой линии произвольно и принят в качестве  $\vartheta$ . Это может быть длина дуги интегральной кривой, одна из функций  $u_k$  или характеристическая скорость  $c$ , если эти величины меняются вдоль рассматриваемого отрезка интегральной кривой монотонно. После выбора функции  $\vartheta$  для определения ее зависимости от  $x$  и  $t$  служит второе уравнение (4.3), которое можно переписать в виде

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + c(u_k(\vartheta)) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0, \quad (4.5)$$

где  $c$  – один из корней уравнения (4.4). Характеристики уравнения (4.5)  $dx/dt = c(u_k(\vartheta))$  являются одновременно одним из семейств характеристик системы (4.1). Согласно уравнению (4.5) вдоль этих характеристик  $d\vartheta/dt = 0$ , то есть  $\vartheta = \text{const}$ , а следовательно постоянны все  $u_k(\vartheta)$  и  $c = c(u_k(\vartheta))$ . Это значит, что на плоскости  $x, t$  характеристики семейства, соответствующего рассматриваемой волне Римана, являются *прямыми* и их наклон может быть определен при  $t = 0$ . Остальные семейства характеристик системы (4.1) в рассматриваемом решении в общем случае криволинейны.

Чтобы определяемое начальными условиями решение могло быть волной Римана, между значениями функций  $u_k$  в начальный момент должна выполняться та же связь (4.2), что и в выбранном решении  $u_k(\vartheta)$ , представляющем волну Римана. Поэтому начальные условия содержат только одну произвольную функцию, например,  $\vartheta(x, 0) = \vartheta_0(x)$ . Кроме того, решение содержит  $n - 1$  постоянных, выделяющих интегральную кривую уравнений (4.3). Решение, представляющее волну Римана, строится на плоскости  $x, t$  *однозначно* в области, где характеристики выбранного семейства *не пересекаются*.

Волны Римана являются естественным обобщением *волн малых возмущений*, рассмотренных в §2. Каждый элемент  $du_k = (du_k/d\vartheta) d\vartheta$  волны Римана представляет изменение, пропорциональное правому собственному вектору матрицы  $\|a_{ik}\|$ , то есть

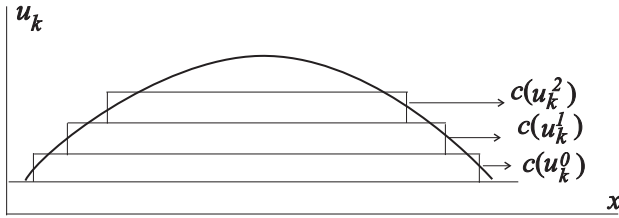


Рис. 4.1.

такое же, какое имеет место в малых возмущениях, распространяющихся по заданному фону. Совпадают и скорости распространения этих возмущений. Поэтому волну Римана можно представить совокупностью малых возмущений, каждое из которых движется по фону, созданному предыдущим (рис. 4.1). Различие в скоростях этих малых возмущений вследствие  $c(u_k) \neq \text{const}$  приводит к *деформации профиля волны*. Движение волны напоминает движение колоды карт, при котором скорость каждой карты мало отличается от скоростей соседних карт.

Эволюция начального возмущения в волне Римана зависит от поведения характеристической скорости  $c(\vartheta)$  на интегральной кривой. Если  $c(\vartheta) = \text{const}$  на интегральной кривой (но может при этом меняться при переходе к другой интегральной кривой), то на плоскости  $x, t$  характеристики, соответствующие этой волне Римана, являются параллельными прямыми и, как следует из уравнения (4.5), волна Римана представляет собой бегущую волну

$$u_k = u_k(\vartheta), \quad \vartheta(x, t) = \vartheta_0(x - ct).$$

Такие решения характерны для линейных систем. Но волны Римана, у которых  $c(\vartheta) = \text{const}$ , нередко встречаются и у нелинейных систем (это, например, альфвеновские волны в МГД и аналогичные вращательные волны в теории упругости).

Когда  $c$  не постоянна на интегральной кривой волны Римана, на отрезках, где характеристическая скорость  $c$  — монотонная функция, она может быть использована в качестве параметра  $\vartheta$  на интегральной кривой. Тогда уравнение (4.5) приобретает стандартный вид уравнения Хопфа для нахождения функции  $c(x, t)$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad (4.6)$$

с начальным условием  $c(x, 0) = c_0(x)$ .

Если на всей оси  $x$  выполнено неравенство  $dc_0/dx > 0$ , то характеристики на плоскости  $x, t$ , выходящие из точек оси  $x$  в область  $t > 0$ , являются расходящимися прямыми и решение существует и однозначно при всех  $t > 0$ . Если же  $dc_0/dx < 0$  на каком-то интервале оси  $x$ , то найдется значение  $t = t_*$  такое, что при  $t > t_*$  характеристики будут пересекаться ( $t_* = \min(dc_0/dx)^{-1}$ ). Формальное продолжение решения в область  $t > t_*$  делает это решение неоднозначным.

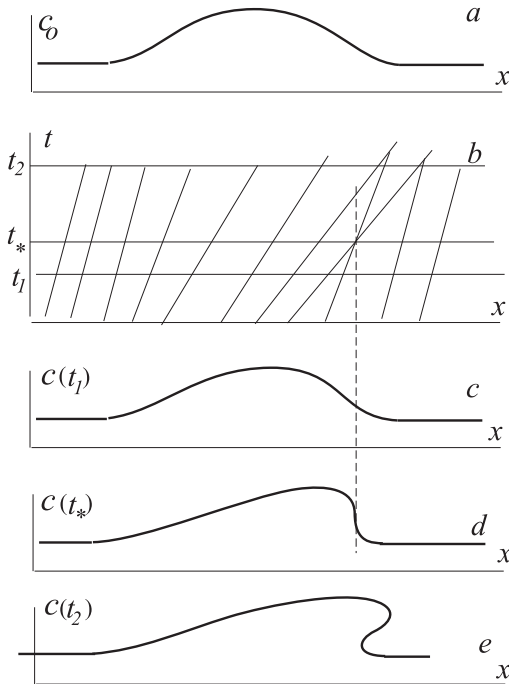


Рис. 4.2.

На рис. 4.2 изображена эволюция волны Римана, возникающей из начальных условий, соответствующих локальному увеличению характеристической скорости  $c$ . На рис. 4.2a) представлены начальные значения  $c(x, 0) = c_0(x)$ , на рис. 4.2b) – расположение характеристик на плоскости  $x, t$ , на рис. 4.2c), d), e) изображены профили функции  $c(x, t)$  в различные последовательные моменты

времени  $t_1, t_*, t_2$ , отмеченные на рис. 4.2b) (графики для наглядности смещены по оси  $x$ ).

Верхняя часть профиля  $c(x)$  смещается быстрее, чем подошва, и в момент времени  $t_*$  достигается положение с вертикальной касательной ( $\partial c/\partial x = \infty$ ) в некоторой точке. При дальнейшем продолжении этого решения ( $t_2 > t_*$ ) характеристики пересекаются (рис. 4.2b) и решение становится неоднозначным (рис. 4.2d)). Это явление называют *опрокидыванием волны*.

В механике сплошной среды, где неоднозначные решения в большинстве случаев не имеют смысла, принимается, что в момент  $t = t_*$  решение перестает быть непрерывным, благодаря чему остается однозначным. Возникает необходимость строить и исследовать решения, содержащие разрывы, что будет сделано в следующих параграфах.

Характеристики, начинающиеся на том участке оси  $x$ , где  $dc_0/dx > 0$ , расходятся, профиль функции  $c(x, t)$  со временем становится более пологим и область, занятая этой частью волны Римана, *расширяется*. Расширяющиеся волны Римана представляют гладкое решение, существующее как угодно долго.

Если нелинейность в уравнениях (4.1) не очень большая (однако,  $dc/d\vartheta \neq 0$ ), то при сходящихся характеристиках решение достаточно долго остается непрерывным. Но как бы малы ни были начальные возмущения, если подождать достаточно долго, характеристики обязательно пересекутся и волна опрокинется. Это свойство решения заложено в самих уравнениях и не связано с гладкостью начальных функций.

Разрыв может содержаться и в начальной функции  $c(x, 0) = c_0(x)$ . Тогда, если значения  $c_0$  справа от него больше, чем значения слева, то из него разовьется непрерывное решение типа волны Римана. На рис. 4.3 изображена эволюция волны Римана из начальных условий для  $c$ , заданных в виде ступеньки:  $c = c_1$  при  $x > 0$  и  $c = c_2$  при  $x < 0$ , причем  $c_2 < c_1$ . Из точки  $x = 0$  при этом выходит пучок прямолинейных характеристик с наклонами, меняющимися от  $c_1$  до  $c_2$  (рис. 4.3b) и, следовательно, решение зависит от  $x/t$ . Волна Римана в этом случае называется *автомодельной, или центрированной*. Начальная ступенька размывается на некоторую область, ширина которой линейно растет со временем. Справа и слева к ней примыкают области с постоянными значениями  $c$  (рис. 4.3c)).

Решение, изображенное на рис. 4.3, может быть получено предельным переходом из волны Римана, соответствующей началь-

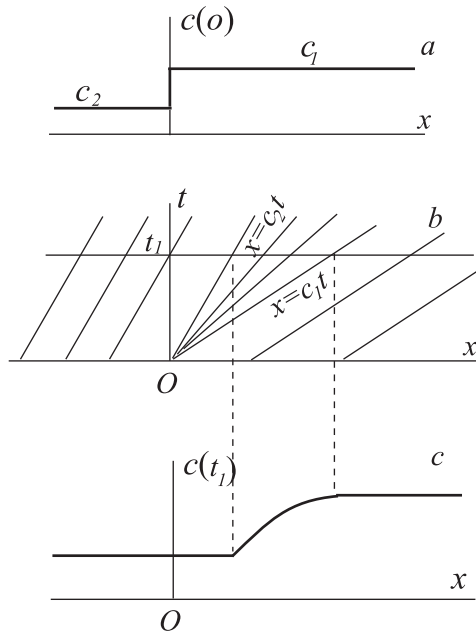


Рис. 4.3.

ным данным в виде “размазанной ступеньки”, когда ширина “размазки” стремится к нулю. Если рассмотреть такой же предельный переход для ступеньки, в которой  $c_1 < c_2$ , то получим, что время  $t_*$  однозначности решения в виде волны Римана будет стремиться к нулю вместе с шириной размазки. Если считать, что при  $t > t_*$  решение содержит разрыв, то в пределе получим, что при начальных данных в виде неразмазанной ступеньки с  $c_1 < c_2$  разрыв возникает с самого начала.

Если в волне Римана  $c(\vartheta) = \text{const}$ , разрывы в начальных условиях сохраняются при всех  $t$  в решении типа бегущей волны. Такие разрывы могут существовать и у нелинейных систем.

## § 5. Законы сохранения и соответствующие им дифференциальные уравнения

В этом параграфе рассматривается важный класс уравнений в частных производных – уравнения, выражающие законы сохранения. В частности, основные уравнения механики сплошной среды представляют в дифференциальной форме *законы сохранения* и выражают тот факт, что некоторые важнейшие *физические величины*, характеризующие среду, заполняющую некоторый объем (такие как масса, импульс, энергия и др.), могут изменяться за счет *потоков этих величин через границы объема*.

Будем обозначать через  $u_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) параметры, задающие в каждой точке состояние сплошной среды, включая ее движение, различные поля и другие необходимые характеристики. Любая другая функция состояния представляет собой функцию от  $u_1, u_2, \dots, u_n$ . В частности, для физических величин, входящих в законы сохранения, можно ввести понятия *плотности их распределения в объеме*  $f_i(u_k)$ , где  $i$  – номер сохраняющейся величины, и *векторы потоков этих величин*  $\mathbf{g}_i(u_k)$  с числом компонент, равным размерности пространства.

В случае одномерных движений в виде *плоских волн*, когда все функции  $u_k$  зависят от одной декартовой координаты  $x$  и времени  $t$ , рассмотрим объем, границы которого представлены плоскостями  $x_1 = \text{const}$ ,  $x_2 = \text{const}$ . Обозначим через  $g_i$  нормальную к плоскостям  $x = \text{const}$  компоненту упомянутого выше вектора  $\mathbf{g}_i$ . Интегральное уравнение  $i$ -го закона сохранения в отсутствии внешних воздействий записывается в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} f_i(u_k) dx + g_i(u_k)|_{x=x_2} - g_i(u_k)|_{x=x_1} = 0. \quad (5.1)$$

В некоторых случаях в механике сплошной среды допускаются внешние объемные воздействия на среду. Например, часто оказывается более удобным для описания изменения энергии при поглощении излучения использовать объемный приток энергии, хотя можно было бы представлять его и дивергенцией вектора потока излучения. Тогда в правых частях уравнений (5.1) вместо нуля стоял бы член

$$\int_{x_1}^{x_2} h_i(u_k, x, t) dx,$$

где  $h_i$  – плотность объемного притока  $i$ -ой физической величины к среде. В дальнейшем такого рода воздействия будут считаться отсутствующими, за исключением нескольких случаев, в которых эти вопросы будут специально оговариваться.

Интегральные уравнения вида (5.1) могут возникать не только из законов сохранения. Так интегральная форма одного из уравнений электромагнитного поля (закон Фарадея) имеет вид

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} d\Sigma + \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

Здесь  $c$  – скорость света,  $\Sigma$  – произвольная неподвижная ориентируемая поверхность, опирающаяся на контур  $L$ , причем направление обхода контура и вектор  $\mathbf{n}$  нормали к  $d\Sigma$  образуют правовинтовую систему,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  – векторы напряженности электрического и магнитного полей.

Если считать  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  зависящими только от  $x$  и  $t$ , то выбирая поверхность  $\Sigma$  в виде прямоугольника со сторонами, параллельными осям  $x$  и  $y$ , а в другом случае, осям  $x$  и  $z$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} B_z dx + cE_y(x_2, t) - cE_y(x_1, t) &= 0, \\ \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} B_y dx - cE_z(x_2, t) + cE_z(x_1, t) &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в одномерном случае эти уравнения принимают такой же вид (5.1), как и законы сохранения, и мы их также будем называть законами сохранения.

В случае достаточной гладкости функций  $f_i(u_k)$  и  $g_i(u_k)$ , что в дальнейшем всегда будет предполагаться, а также при достаточной гладкости функций  $u_k(x, t)$ , что будет предполагаться не всегда, каждому уравнению (5.1) соответствует дифференциальное уравнение в *дивергентной форме*

$$\frac{\partial f_i(u_k)}{\partial t} + \frac{\partial g_i(u_k)}{\partial x} = 0. \quad (5.2)$$

Во многих случаях используется также форма записи этих уравнений, содержащая производные от функций  $u_k$

$$f_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial t} + g_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x} = 0, \quad (5.3)$$

$$f_{ik} = \frac{\partial f_i(u_j)}{\partial u_k}, \quad g_{ik} = \frac{\partial g_i(u_j)}{\partial u_k}, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n. \quad (5.4)$$

Не всякому дифференциальному уравнению в дивергентной форме (5.2) соответствует интегральный закон сохранения, имеющий физический смысл. Примером может служить энтропия, которая сохраняется в отсутствие теплообмена при непрерывных гладких движениях, что позволяет написать для нее уравнение в форме (5.2). Но энтропия может не сохраняться при наличии разрывов у функций  $u_k$  внутри рассматриваемой области. В этом случае для энтропии нельзя написать интегрального уравнения вида (5.1). Этот вопрос будет рассмотрен в § 13.

Иногда при построении моделей в механике сплошной среды некоторые из соотношений постулируются в дифференциальном виде. При этом они, вообще говоря, могут не иметь дивергентного вида или иметь различные дивергентные формы записи, но не обладать соответствующими интегральными законами сохранения.

Если для  $n$  функций  $u_k$  имеется  $n$  уравнений, выражающих законы сохранения, то есть если в уравнениях (5.1)  $i = 1, 2, \dots, n$ , то эти уравнения, так же как и уравнения (5.2) (или (5.3)) образуют замкнутую систему, которая называется *системой уравнений законов сохранения*. В этих случаях будет предполагаться, что матрица  $\|f_{ik}\|$  невырождена при всех интересующих нас значениях  $u_k$ , то есть что ее определитель отличен от нуля

$$|f_{ik}| \neq 0. \quad (5.5)$$

Это позволяет разрешить систему (5.3) относительно производных по времени  $\partial u_k / \partial t$  и получить еще одну форму записи уравнений (5.3)

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + a_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x} = 0, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n, \quad (5.6)$$

где  $a_{ik}$  в общем случае зависят от  $u_j$ .

Такой же вид приобретают уравнения (5.2), если в качестве  $u_i$  использованы сами плотности  $f_i$ . Все три формы записи (5.2), (5.3), (5.6) эквивалентны и будут далее использоваться в равной мере. Коэффициенты этих уравнений  $f_{ik}$ ,  $g_{ik}$ ,  $a_{ik}$  не зависят от производных от  $u_k$ , а только от самих функций  $u_k$ . Такие системы, как уже упоминалось, называются *квазилинейными*. Если

же указанные коэффициенты постоянны, то система называется *линейной*.

Многие системы механики сплошной среды, такие как уравнения газовой динамики, уравнения магнитной гидродинамики, уравнения теории упругости, уравнения Максвелла принадлежат к описанному типу систем уравнений, выражающих законы сохранения, и мы в дальнейшем будем рассматривать в качестве основного случая именно такие системы.

Под решением уравнений, выражающих законы сохранения, будет пониматься  $n$  функций  $u_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , таких, что уравнения (5.1) выполняются при любых  $x_1$ ,  $x_2$  и  $t$ . Такое определение решения происходит из механики сплошной среды (см. Седов [45], Жермен [17], Уизем [49], Годунов [13]). Часто предпочитают говорить об обобщенных решениях дифференциальных уравнений, которые вводятся посредством некоторых определений, вытекающих из законов сохранения (Рождественский и Яненко [44], Курант [36]).

## § 6. Разрывы в уравнениях законов сохранения и соотношения на них. Ударная адиабата

В § 4 показано, что эволюция непрерывного решения системы дифференциальных уравнений (4.1) или отсутствие непрерывности начальных условий могут приводить к необходимости строить решения, содержащие разрывы функций  $u_k$ . Поверхность, на которой  $u_k$  терпят разрыв (в рассматриваемом одномерном случае ей соответствует точка  $x = X(t)$  оси  $x$ ), называется *поверхностью (или фронтом) сильного разрыва*. Так как на этой поверхности значения функций  $u_k$  меняются скачком, то будем называть эту поверхность также фронтом (поверхностью) скачка. Если же разрыв имеют производные от  $u_k$ , то такая поверхность называется *фронтом слабого разрыва* (см. § 2).

Заметим, что эти определения относятся к системам уравнений первого порядка. В механике сплошной среды традиционно для многих моделей система может содержать уравнения более высокого порядка, которые, конечно, могут быть записаны в виде (4.1) путем введения вспомогательных функций. Если система уравнений содержит вторые или более высокие производные, то *сильным разрывом называется разрыв более низких производных*, чем старшие из тех, которые входят в уравнения. Если

рвутся старшие производные, входящие в уравнения, или более высокие производные, то разрыв называется слабым. Мы будем рассматривать в этом параграфе только сильные разрывы.

По обе стороны от поверхности разрыва функции  $u_k$  будем считать гладкими, подчиняющимися системе дифференциальных уравнений вида (5.2). Для получения соотношений на разрыве дифференциальные уравнения непригодны и необходимо вернуться к исходным интегральным уравнениям (5.1), не предполагающим обязательной непрерывности и дифференцируемости входящих в них функций и имеющих вследствие этого более широкую область применения

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} f_i(u_k) dx + g_i(u_k(x_2, t)) - g_i(u_k(x_1, t)) = 0. \quad (5.1)$$

Здесь  $x_1 = \text{const}$ ,  $x_2 = \text{const}$ ,  $x_1 < x_2$ . Как было сказано ранее,  $f_i(u_k)$  можно толковать как плотность некоторой величины, а  $g_i(u_k)$  – ее поток через единицу поверхности плоскости  $x = \text{const}$ . Рассмотрим, какие связи на значения  $u_k$  в точках, прилегающих к поверхности разрыва, накладывают уравнения (5.1). Будем предполагать, что функции  $u_k$  терпят разрыв (испытывают скачок) на линии  $x = X(t)$  на плоскости  $x, t$ , по обе стороны от которой они считаются непрерывными и дифференцируемыми (рис. 6.1).

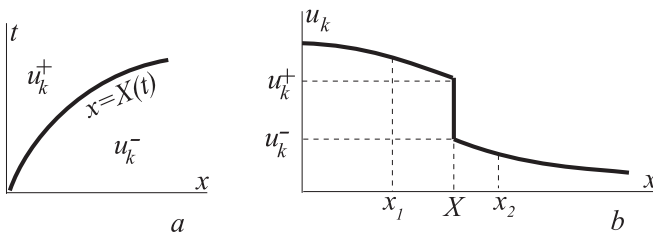


Рис. 6.1.

Выберем направление оси  $x$  так, чтобы

$$\frac{dX}{dt} = W \geq 0$$

и будем говорить, что область  $x > X(t)$  соответствует состоянию *перед разрывом*, а область  $x < X(t)$  – состоянию *за разрывом*.

Значения всех функций непосредственно перед разрывом (то есть при стремлении точки  $x, t$  из области перед разрывом к линии разрыва) будем снабжать индексом “-” и, аналогично, значения функций непосредственно за разрывом – индексом “+”.

Выберем в уравнении (5.1) неподвижные пределы интегрирования  $x_1$  и  $x_2$  так, чтобы в рассматриваемый момент времени  $x_1 < X(t) < x_2$ . Тогда, разбивая интервал интегрирования в интеграле по  $x$  точкой  $x = X(t)$  на две части и дифференцируя по времени получившиеся интегралы с учетом зависимости  $X$  от  $t$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt}(f_i^+ - f_i^-) + \int_{x_1}^X \frac{\partial f_i}{\partial t} dx + \int_X^{x_2} \frac{\partial f_i}{\partial t} dx \\ + g_i(u_k(x_2, t)) - g_i(u_k(x_1, t)) = 0, \\ f^+ = f(u_k^+), \quad f^- = f(u_k^-). \end{aligned}$$

Если в последнем равенстве устремить значения  $x_1$  и  $x_2$  к  $X$ , то в силу предположения о дифференцируемости функций  $f_i$  в пределе интегралы обратятся в нуль и мы получим соотношения на разрывах

$$[g_i] - W[f_i] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad W = \frac{dX}{dt}. \quad (6.1)$$

Здесь и далее приняты обозначения  $[g_i]$ ,  $[f_i]$  для скачков соответствующих величин на фронте разрыва

$$[g_i] = g_i(u_k^+) - g_i(u_k^-), \quad [f_i] = f_i(u_k^+) - f_i(u_k^-).$$

Заметим, что величина  $g'_i = g_i - W f_i$  представляет собой поток функции  $f_i$  в системе координат, движущейся со скоростью  $W$ , так что соотношения (6.1) выражают непрерывность этих потоков на разрыве:  $[g'_i] = 0$ .

Соотношения (6.1), вытекающие из интегральных законов сохранения (5.1), должны выполняться на всех поверхностях разрыва. Будем называть их *основными соотношениями на разрыве или законами сохранения на разрыве*. Этим, вообще говоря, не исключается возможность добавления к системе (6.1) дополнительных соотношений, следующих из других физических соображений, не отраженных законами сохранения (5.1). Некоторые соображения относительно причин появления дополнительных соотношений будут обсуждаться в § 16 и § 17.

В § 5 говорилось, что иногда уравнения (5.1) содержат члены вида  $\int_{x_1}^{x_2} h_i(u_k, x, t) dx$ , представляющие внешние воздействия, которые можно трактовать как источники величин  $f_i$ . В системе (5.2) функции  $h_i$  входят как недифференциальные члены, делая ее неоднородной. Если функции  $h_i$  ограничены, то в условия на разрыве (6.1) они не войдут. Если же  $h_i$  представляют сосредоточенные на поверхности разрыва внешние воздействия в виде  $\delta$ -функций от  $x - X$ , то соотношения (6.1) приобретают дополнительные члены

$$[g_i] - W[f_i] = H_i, \quad H_i = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_{-\Delta x}^{\Delta x} h_i(x - X) dx.$$

Далее “классическими” будем называть разрывы, все соотношения на которых получены описанным образом из интегральных законов сохранения, число которых совпадает с числом неизвестных функций по обе стороны разрыва, а внешние воздействия отсутствуют, то есть когда система соотношений на разрыве дается равенствами (6.1). Типичными и хорошо известными представителями таких разрывов являются газодинамические ударные волны.

Бывает удобно в качестве функций  $u_i$  принять сами плотности величин  $f_i$ , то есть считать  $f_i = u_i$ . Тогда соотношения на разрыве (6.1) запишутся в виде

$$[g_i] - W[u_i] = 0. \quad (6.2)$$

Это представление более удобно тогда, когда соответствующие дифференциальные уравнения записаны в форме (4.1).

В некоторых случаях систему соотношений (6.2) будем записывать в общем неявном виде

$$F_i(u_k^-, u_k^+, W) = 0, \quad i, k = 1, 2, \dots, n. \quad (6.3)$$

Ввиду того, что переменные  $u_i^-$  и  $u_i^+$  входят в соотношения (6.2) симметричным образом, то с точки зрения этих уравнений оба набора переменных  $u_i^+$  или  $u_i^-$  полностью равноправны и каждый из них может соответствовать состоянию перед разрывом, а другой набор переменных – состоянию за разрывом. Однако, соображения, излагаемые в последующих параграфах,

связанные, в частности, со вторым законом термодинамики, ликвидируют, как правило, этот произвол.

Если состояние  $u_k^-$  перед разрывом известно и фиксировано, то соотношения (6.3) можно рассматривать как систему  $n$  уравнений, которые связывают  $n + 1$  неизвестную функцию  $u_k^+$ ,  $W$ , то есть эта система содержит один свободный параметр.

*Ударной адиабатой*, по аналогии с газовой динамикой, будем называть множество состояний  $u_i^+$  в пространстве  $u_i$ , в которые можно перейти скачком из фиксированного начального состояния  $u_i^-$ , используя соотношения на разрыве (6.2) при произвольных значениях  $W$ . Уравнение ударной адиабаты можно получить путем исключения  $W$  из основных соотношений на разрыве. В классических случаях это однопараметрическое множество – кривая в пространстве  $u_i$ . При непрерывных функциях  $f_k$  и  $g_k$  эта кривая проходит через начальную точку  $u_i^-$ . Ударную адиабату можно задать параметрически  $W = W(\sigma)$ ,  $u_k = u_k^+(\sigma)$ , где  $\sigma$  – параметр на ударной адиабате, например, длина дуги. В некоторых вырожденных случаях ударная адиабата может оказаться неоднородной или целому отрезку на ударной адиабате может соответствовать одно значение  $W$ .

Рассмотрим важный частный вид разрывов. В предыдущем параграфе при рассмотрении волн Римана был отмечен случай, когда волна Римана представляет собой бегущую волну, форма которой задается произвольной начальной функцией и не меняется в процессе движения. В частности, эта функция может содержать разрыв, который распространяется с той же скоростью, что и вся волна, то есть с характеристической скоростью. Такие бегущие волны, содержащие разрыв параметров, также описываются соотношениями на разрыве (6.1). Отличительным свойством таких разрывов является их обратимость. Состояния перед и за разрывом можно поменять местами. В дальнейшем такие разрывы будем называть *обратимыми*. Их скорость  $W$  совпадает с соответствующей этой волне характеристической скоростью спереди и сзади.

## § 7. Условия эволюционности разрывов

Поверхности разрывов служат границами для областей, в которых функции  $u_i$  непрерывны, дифференцируемы и подчиняются дифференциальным уравнениям. Для обеспечения корректности решения дифференциальных систем уравнений по обе стороны от фронта разрыва необходимо выполнение условий эволюционности. Как было определено в § 3, условия эволюционности для гиперболических систем уравнений заключаются в возможности однозначно решить задачу о взаимодействии границы (в рассматриваемом случае – поверхности разрыва) с малыми возмущениями, зависящими от  $x$  и  $t$ , в рамках линейного приближения. Условия эволюционности разрыва состоят в том, что количество характеристик, уходящих от него в обе стороны на плоскости  $x, t$ , должно быть на единицу меньше числа граничных условий. Количество уходящих характеристик определяется знаками относительных скоростей разрыва и малых возмущений (то есть характеристик)  $c_i^- - W$  и  $c_i^+ - W$ .

Рассмотрим сначала общий случай, когда по разные стороны от разрыва действуют различные гиперболические системы уравнений, описывающие процессы перед и за разрывом. Их порядки обозначим через  $n^-$  и  $n^+$  соответственно. Пусть число независимых соотношений на разрыве выражено числом  $N$ . Тогда, согласно условию эволюционности, число уходящих характеристик должно быть равно  $N - 1$ .

В каждой из областей по разные стороны от разрыва пронумеруем характеристические скорости так, что

$$c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_{n^\pm}.$$

Предположим сначала, что скорость скачка  $W$  не совпадает ни с одной из характеристических скоростей  $c_i^-$  и  $c_i^+$ . Пусть налево (в сторону за разрывом) уходит  $k - 1$  характеристика. Тогда направо (в сторону перед разрывом), согласно условию эволюционности, должны уходить  $N - k$  характеристик. Это означает, что одновременно должны выполняться неравенства

$$c_{k-1}^+ < W < c_k^+, \quad c_l^- < W < c_{l+1}^-, \quad l = n^- + k - N. \quad (7.1)$$

При  $k = 1$  влево не уходит ни одной характеристики, и неравенство, содержащее  $c_{k-1}^+$ , писать не нужно, либо это неравенство можно писать формально, введя, по определению, значение

$c_0^+ = -\infty$ . Точно так же при  $l = n^-$  не следует писать неравенство, содержащее  $c_{l+1}^-$ , или можно его писать, введя по определению величину  $c_{n^-+1}^- = \infty$ . Тогда  $k$  и  $l$  в неравенствах (7.1) следует считать изменяющимися в пределах  $0 < k \leq n^+$  и  $0 < l \leq n^-$ .

Объединяя предыдущие неравенства, получим

$$\begin{aligned} \max\{c_{k-1}^+, c_l^-\} < W < \min\{c_k^+, c_{l+1}^-\}, \\ c_0^+ = -\infty, \quad c_{n+1}^- = \infty. \end{aligned}$$

Условия эволюционности определяются числом  $N$  граничных условий на разрыве. Если предположить, что все эти  $N$  граничных условий выражают законы сохранения, которые обычно бывают известны заранее, то эволюционность относительно этих  $N$  граничных условий в предположении об отсутствии каких-то других, дополнительных, соотношений на разрыве будем иногда называть (чтобы подчеркнуть это обстоятельство) *априорной эволюционностью*. Необходимость использования в некоторых случаях дополнительных граничных условий будет обсуждаться в §16 и §17. При наличии дополнительных соотношений априорно эволюционные разрывы оказываются неэволюционными, а эволюционными становятся априорно неэволюционные разрывы.

Иллюстрацию получения неравенств (7.1) дает рис. 7.1, где на двух параллельных осях отложены в одинаковом масштабе характеристические скорости  $c_i^+$  и  $c_j^-$  и скорость скачка  $W$ . *Разрыв эволюционен* в области перекрытия затемненных на рис. 7.1 отрезков на оси скоростей.

Разрывы, у которых скорость  $W$  совпадает с одной из характеристических скоростей, тоже могут оказаться эволюционными. Например, разрывы бесконечно малой амплитуды, рассмотренные в §2, для которых  $c_k^- = W = c_k^+$ , эволюционны. Поэтому в соотношениях, выражающих условия эволюционности, будем дополнять неравенства знаком равенства. Однако, эволюционность таких предельных разрывов (далее мы будем называть их *разрывами Жуге или ударными волнами Жуге*) надо проверить отдельно в каждом конкретном случае.

Наиболее важным для приложений является случай классических разрывов, когда  $n^- = n^+ = N = n$ . В дальнейшем это будет приниматься всегда, если не оговорено противное. Такой разрыв

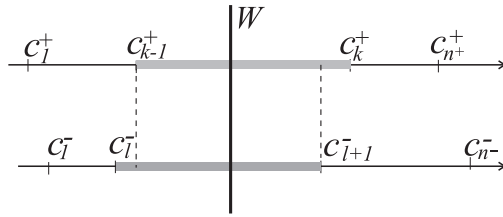


Рис. 7.1.

удовлетворяет условиям эволюционности, или просто эволюционен (Ландау и Лифшиц [38]), если выполнена система соотношений

$$\begin{aligned} c_{k-1}^+ \leq W \leq c_k^+, & \quad c_k^- \leq W \leq c_{k+1}^-, \\ c_0^+ = -\infty, & \quad c_{n+1}^- = \infty. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Будем называть его *разрывом  $k$ -го типа* ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Применительно к газовой динамике условия эволюционности были даны Ландау в 1944 г. (Ландау и Лифшиц [1987]). Условия (7.2), полученные Лаксом (Lax [57]) в случае системы  $n$  уравнений, выражающих законы сохранения, называются также *условиями Лакса*. Очевидно, условия (7.2) соответствуют  $n$  различным типам разрывов в зависимости от значения  $k = 1, 2, \dots, n$ .

В рассматриваемом классическом случае условие эволюционности заключается в том, что из существующих с обеих сторон от разрыва  $2n$  характеристик уходящих должно быть  $n-1$ . Это означает, что имеется  $n+1$  характеристика, приходящая на разрыв. Отсюда можно заключить, что две характеристики прекращают свое существование на разрыве. Из неравенств (7.2) видно, что для разрыва  $k$ -го типа обе они принадлежат к  $k$ -му типу характеристик и подходят к разрыву с разных сторон, образуя с разрывом “ёлочку” (рис. 7.2, см. характеристики, соответствующие  $c_1$ ).

Невыполнение требований (7.2) ведет к неэволюционности разрыва. В § 3 было показано, что неэволюционность границы можно трактовать как ее неустойчивость по отношению к малым возмущениям в рамках линейного приближения. Таким образом, условия (7.2) можно рассматривать как *необходимые условия устойчивости* (а значит и возможности существования) разрыва данного типа.

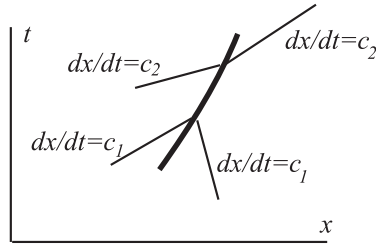


Рис. 7.2.

Часто бывает удобно изображать области, в которых выполнены соотношения (7.2), на схеме, где использованные ранее оси, по которым откладывались  $c^-$ ,  $c^+$ , расположены ортогонально одна другой (рис. 7.3).

Если рассматриваются ударные волны, распространяющиеся по некоторому заданному состоянию, то  $c_k^-$  фиксированы и можно представлять  $W$  и все  $c_k^-$  на горизонтальной оси в одном и том же масштабе величин. Вертикальные прямые, проведенные через точки  $c_k^-$ , выделяют на плоскости полосы, в которых выполнена вторая группа неравенств (7.2).

В то же время  $c_k^+$  меняют свои величины вдоль ударной адиабаты. Вертикальная ось служит для представления соотношений между величинами  $W$  и  $c_k^+$ . Это означает, что масштаб по вертикальной оси является условным, но нам необходимо только наглядное представление неравенств между отмеченными на оси величинами  $W$  и  $c_k^+$ . Области, где выполнены неравенства первой группы (7.2), расположены на рис. 7.3 между соответствующими прямыми линиями  $c = c_k^+$ , параллельными горизонтальной оси.

Точки с координатами  $(W, W)$ , удовлетворяющие неравенствам (7.2), заполняют на плоскости  $c^-, c^+$  прямоугольники вместе с их границами, отмеченные темным цветом на рис. 7.3. В случае  $n^- = n^+ = n$ , изображенном на рис. 7.3, имеется  $n$  затемненных прямоугольников, каждый из которых соответствует *одному из типов эволюционных разрывов*. На сетке плоскости  $c^-, c^+$  эволюционные прямоугольники расположены на одну клетку правее диагонали координатного угла.

Левее и выше затемненных клеток лежат области значений  $W$ , для которых число уходящих от разрыва волн *больше, чем условий на разрыве*, полученных из законов сохранения. Однако, как

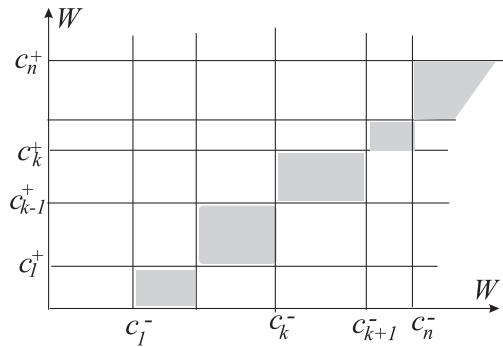


Рис. 7.3.

неоднократно отмечалось, бывают ситуации, когда на разрыве выставляются дополнительные граничные условия, вытекающие не из законов сохранения, а из учета физических процессов внутри *структуры* разрыва. Наличие дополнительных соотношений может сделать эволюционными ударные волны, соответствующие прямоугольникам, сдвинутым относительно исходных влево-вверх. Источник появления таких соотношений будет обсуждаться ниже, в § 16 и § 17.

Для прямоугольников, которые лежат правее и ниже заштрихованных на рис. 7.3, число уходящих характеристик *меньше*, чем необходимо для эволюционности разрывов. Как правило, эти неэволюционные разрывы представляют два или более слившихся эволюционных разрыва, которые при действии малых возмущений приобретают различные скорости и первоначальный разрыв распадается. Этот вопрос будет обсуждаться далее в § 10 и § 12.

Бывают случаи, когда линеаризованная система соотношений на разрыве *распадается* на две (или несколько) *независимые подсистемы*, и возмущение  $\delta W$  скорости скачка входит тогда лишь в одну из них. Условия эволюционности могут быть выставлены по-прежнему для всей системы в виде затемненных на рис. 7.3 прямоугольников, а затем, сверх того, для одной из двух подсистем нужны еще дополнительные условия эволюционности. Обычно удобно требовать выполнения условий эволюционности для той подсистемы, которая не содержит  $\delta W$ . Для нее число соотношений на разрыве равно числу уходящих характери-

стик, и эволюционные прямоугольники, которые соответствуют этой подсистеме, расположены вдоль диагонали координатного угла. Эволюционными для всей задачи будут разрывы, у которых  $W$  попало в *перекрывающиеся прямоугольники*.

Наиболее частая причина, приводящая к расщеплению линеаризованных граничных условий, связана с инвариантностью задачи относительно поворота на произвольный угол осей, лежащих в плоскости фронта ударной волны, вокруг нормали к фронту. Подобная ситуация имеет место в магнитной гидродинамике (см., например, Куликовский и Любимов [28]), а также в некоторых других случаях.

Когда системы уравнений различны по разные стороны разрыва, на плоскости  $c^-, c^+$  на рис. 7.3 эволюционным разрывам с одинаковым числом граничных условий будет также соответствовать некоторая последовательность прямоугольников, идущая снизу-слева наверх-направо, примыкающих один к другому углами.

При заданном состоянии перед разрывом условия эволюционности (7.2) накладывают дополнительные ограничения на множество тех состояний, которые могут осуществляться за разрывом, то есть выделяют на ударной адиабате, которая в случае систем уравнений законов сохранения представляет собой кривую, отрезки, отвечающие требованиям эволюционности. Будем для краткости называть их *эволюционными отрезками ударной адиабаты*. Каждому типу разрыва соответствует свой эволюционный отрезок (один или несколько) на ударной адиабате. Остальные состояния на ударной адиабате недостижимы посредством одного эволюционного скачка из начальной точки.

При исследовании эволюционности точек ударной адиабаты удобно для дальнейшего исследования схематически отобразить ее на плоскости скоростей  $W, c^-, c^+$ . Для этого используем выражение для скорости разрыва  $W$  как функции некоторого параметра  $\sigma$ , отсчитываемого вдоль ударной адиабаты. По горизонтальной оси можно откладывать скорость ударной волны  $W(\sigma)$  в фиксированном масштабе, а по вертикальной оси откладывать  $W(\sigma)$  схематически, качественно, соблюдая только знаки неравенств между  $W(\sigma)$  и  $c_i^+(\sigma)$ , а также непрерывность этих функций. Линия  $W(\sigma)$  изображает на плоскости  $c^-, c^+$  ударную адиабату. Отрезки кривой  $W(\sigma)$ , попавшие в заштрихованные прямоугольники, соответствуют *эволюционным участкам ударной*

*адиабаты.* Схема на плоскости  $c^-, c^+$  помогает наглядно представить их количество и расположение. Будем называть ее *диаграммой эволюционности*.

Точки пересечения таким образом построенного на плоскости  $c^-, c^+$  графика  $W(\sigma)$  с линиями  $c^- = c_i^-, c^+ = c_k^+$  нанесенной сетки соответствуют концам отрезков эволюционности. В этих точках  $W = c_i^-$  и  $W = c_k^+$  и скорость скачка совпадает с одной из характеристических скоростей впереди или сзади разрыва. Следуя терминологии, принятой в теории газодинамической детонации, будем называть эти состояния на ударной адиабате *точками Жуге*.

Ввиду симметрии условий на разрыве (6.2) по отношению к переменным  $u_i^-$  и  $u_i^+$ , ударная адиабата, которая представляет скачки из начальной точки  $u_i^-$  в произвольную точку  $u_i^+$  на ударной адиабате, также представляет скачки из точки  $u_i^+$  в начальную точку  $u_i^-$ . Легко понять из упомянутой выше симметрии, что эволюционные прямоугольники для скачков  $u_i^+ \rightarrow u_i^-$  расположены на плоскости  $c^-, c^+$  симметрично эволюционным прямоугольникам скачков  $u_i^- \rightarrow u_i^+$  по отношению к диагонали координатного угла.

При наличии у рассматриваемой системы обратимого разрыва (см. § 6), соответствующая этим разрывам часть ударной адиабаты отображается на плоскость  $c^-, c^+$  в виде одной точки  $(c_k^-, c_k^+)$ , поскольку в этом случае  $W = c_k^- = c_k^+$ .

## § 8. Разрывы малой интенсивности

Ранее, в § 2 при рассмотрении в линейном приближении малых возмущений, распространяющихся по однородному фону, было показано, что общее решение задачи представляет собой линейную комбинацию из  $n$  бегущих волн, каждая из которых движется с одной из характеристических скоростей  $c^{(k)}$  и содержит произвольную функцию от  $x - c^{(k)}t$ ,  $c^{(k)} = \text{const}$ . Поскольку эта функция может испытывать разрыв, то выражения, полученные в § 2, наряду с непрерывными волнами описывают также разрывы малой амплитуды в линейном приближении. В частности, из этих результатов следует, что малые разрывы могут принадлежать к одному из  $n$  типов и что скорость разрывов в линейном приближении совпадает со скоростью характеристик.

Пусть теперь изменение параметров на разрыве мало, но не настолько, чтобы пользоваться линейным приближением. Будем для краткости называть такие *разрывы малыми* в отличие от термина *слабые*, который занят за другим понятием. На ударной адиабате, заданной уравнениями (6.2) имеют место равенства

$$g_i(u_k^+) - g_i(u_k^-) = W(u_i^+ - u_i^-),$$

Сейчас нас интересует малая область, примыкающая к начальной точке  $u_i^-$ . Будем считать состояние перед скачком (начальное) заданным и фиксированным, то есть  $u_i^- = \text{const}$ . Состояние за скачком  $u_i^+$  можно рассматривать как функцию некоторого параметра  $\sigma$ , отсчитываемого вдоль дуги ударной адиабаты, начиная от точки  $u_i^-$ . Параметр  $\sigma$ , который считается малым, представляет порядок величины амплитуды скачка функции  $u_i$ , то есть величины  $[u_i]$ . Индекс “+” для обозначения параметров за скачком далее опускаем, считая  $u_i^+ = u_i(\sigma)$ . В окрестности начальной точки на ударной адиабате функции  $u_i(\sigma)$  и  $W(\sigma)$  можно исследовать, пользуясь их разложением по малому параметру  $\sigma$ .

Сравним изменение параметров в малом скачке и в волне Римана того же типа, то есть таких, которые в линейном приближении совпадают. Волны Римана являются решением системы (4.1), полученной при  $u_i = f_i$  из тех же интегральных законов сохранения (5.1), что и соотношения (6.2)

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + a_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} = 0, \quad a_{ij}(u_k) = \frac{\partial g_i}{\partial u_j}.$$

Изменение  $u_i$  в волне Римана задается интегральными кривыми, которые в каждой точке касаются правого собственного вектора  $r_i$  матрицы  $\|a_{ij}\|$ , а фазовой скоростью волны служит соответствующее собственное значение  $c(u_k)$  этой матрицы (§ 4). Обозначим в начальном состоянии перед волной Римана  $a_{ij}(u_k^-) = a_{ij}^-$ ,  $c(u_k^-) = c^-$  и будем считать, что  $c^-$  – однократное собственное значение.

Докажем следующие утверждения (Лакс [1957]): (1) Ударная адиабата и интегральная кривая соответствующей волны Римана с однократной характеристической скоростью  $c$  имеют в начальном состоянии *точку касания второго порядка* (то есть у них в точке  $u_i = u_i^-$  общие касательная и кривизна); (2) *скорость ударной волны равна полусумме характеристических скоростей*

перед и за разрывом с ошибкой, не превышающей по порядку величины квадрата изменений  $u_i$  в разрыве.

Для вычисления  $W(\sigma)$  на ударной адиабате воспользуемся разложением по  $\sigma$

$$W(\sigma) = W(0) + \dot{W}(0)\sigma + O(\sigma^2), \quad \dot{W} = \frac{dW}{d\sigma},$$

и найдем его коэффициенты в начальной точке  $\sigma = 0$ ,  $u_i = u_i^-$ . Для этого продифференцируем по  $\sigma$  (то есть вдоль ударной адиабаты) соотношения на разрыве (6.2), помня при этом, что  $u_i^- = \text{const}$ . Такое дифференцирование обозначим верхней точкой. Воспользовавшись равенством  $a_{ij} = \partial g_i / \partial u_j$ , получим

$$a_{ij}\dot{u}_j - W\dot{u}_i - \dot{W}(u_i - u_i^-) = 0. \quad (8.1)$$

При  $\sigma = 0$  последний член пропадает, тогда

$$(a_{ij}^- - W(0)\delta_{ij})\dot{u}_j = 0$$

Так как не все  $\dot{u}_j$  равны нулю, то из равенства нулю определителя этой линейной однородной системы получаем  $W(0) = c^-$ , где  $c^-$  – некоторое собственное значение матрицы  $\|a_{ij}\|$ , которое будем предполагать однократным и  $\dot{u}_i(0) = \lambda r_i^-$ , где  $\{r_i^-\}$  – правый собственный вектор той же матрицы,  $\lambda$  – численный множитель. Таким образом, ударная адиабата, так же как интегральная кривая волны Римана, касается собственного вектора  $\{r_i^-\}$ , то есть они имеют в начальной точке общую касательную.

Будем для определенности считать, что собственные векторы пронормированы,  $|r| = 1$ , а в качестве параметра  $\sigma$  использована длина дуги ударной адиабаты. Тогда величины  $\dot{u}_i$  тоже представляют компоненты единичного вектора, а  $\lambda = 1$ , то есть  $\dot{u}_i(0) = r_i^-$ .

Продифференцируем по  $\sigma$  равенство (8.1)

$$a_{ij}\ddot{u}_j + \dot{a}_{ij}\dot{u}_j - W\ddot{u}_i - 2\dot{W}\dot{u}_i - \ddot{W}(u_i - u_i^-) = 0.$$

Положим здесь  $\sigma = 0$  и, учитывая, что  $\dot{u}_k(0) = r_k^-$ ,  $W(0) = c^-$ , получим

$$(a_{ij}^- - c^- \delta_{ij})\ddot{u}_j + \dot{a}_{ij}^- r_j^- - 2\dot{W}(0)r_i^- = 0. \quad (8.2)$$

Продифференцируем по  $\sigma$  тождество  $(a_{ij} - c\delta_{ij})r_j = 0$ , определяющее собственный вектор  $r_j$

$$a_{ij}\dot{r}_j + \dot{a}_{ij}r_j - c\dot{r}_i - \dot{c}r_i = 0.$$

Положим в последнем равенстве  $\sigma = 0$ , вычтем его из (8.2). Получим

$$(a_{ij}^- - c^- \delta_{ij})(\ddot{u}_j^- - \dot{r}_j^-) - (2\dot{W}(0) - \dot{c}^-)r_i^- = 0. \quad (8.3)$$

Первое слагаемое можно обратить в нуль, домножив это соотношение скалярно на левый собственный вектор  $\mathbf{l} = \{l_i\}$  матрицы  $\|a_{ij}^-\|$ . Тогда

$$(2\dot{W}(0) - \dot{c}^-)r_i^- l_i^- = 0.$$

Из алгебры известно, что  $r_i^- l_i^- \neq 0$ , следовательно

$$\dot{W}(0) = \frac{1}{2}\dot{c}^-. \quad (8.4)$$

Таким образом, для  $W(\sigma)$  получаем

$$W(\sigma) = c^- + \frac{1}{2}\dot{c}^- \sigma + O(\sigma^2).$$

В то же время  $c(\sigma) = c^- + \dot{c}^- \sigma + O(\sigma^2) = c^+$ . Совместное использование этих двух равенств приводит к обещанному выражению для  $W(\sigma)$

$$W = \frac{1}{2}(c^- + c^+) + O(\sigma^2). \quad (8.5)$$

Соотношение (8.4) показывает, что в равенстве (8.3) второй член исчезает. Поэтому

$$\ddot{u}_j^- - \dot{r}_j^- = \mu r_j^-,$$

где  $\mu$  – некоторый коэффициент, подлежащий определению. Векторы  $r_j$  и  $\dot{u}_j$  оба единичные и  $\dot{u}_j^- = r_j^-$ . Поскольку производные от единичных векторов ортогональны этим векторам, то следует положить  $\mu = 0$ . Тогда

$$\ddot{u}_j^- = \dot{r}_j^- \quad (8.6)$$

Так как производные берутся здесь по касательной к ударной адиабате, то это равенство утверждает, что в начальной точке имеет место равенство векторов кривизны ударной адиабаты и интегральной кривой волны Римана, имеющих совпадающие касательные.

Следствия из полученных утверждений дают дополнительные полезные сведения об ударных волнах.

Кривая, изображающая ударную адиабату в пространстве  $u_i$ , имеет в начальной точке касание второго порядка с интегральной кривой волны Римана, то есть различие ударной адиабаты и интегральной кривой волны Римана имеет величину  $O(\sigma^3)$  или меньше, где  $\sigma$  – величина порядка амплитуды скачка. В окрестности начальной точки  $u_i^-$  для любой гладкой функции от  $u_i$  разница ее изменения на разрыве и в волне Римана не превышает величины  $\sigma^3$ . В частности, во многих задачах механики это используется для оценки изменения энтропии.

Если в пространстве  $u_k$  на интегральной кривой волны Римана характеристическая скорость  $c$  не постоянна, то от начальной точки  $u_k^-$  в сторону увеличения  $c$  рядом с интегральной кривой волны Римана идет *эволюционный отрезок ударной адиабаты*, так как, согласно (8.5) и условиям эволюционности, выполнены неравенства  $c^- < W = (c^- + c^+)/2 < c^+$ . Соответствующая волна Римана имеет на плоскости  $x, t$  *сходящуюся характеристики и тенденцию к опрокидыванию*. В сторону уменьшения  $c$  идет неэволюционный отрезок ударной адиабаты, для которого  $c^- > W > c^+$  и который с ошибкой порядка  $\sigma^3$  может быть заменен отрезком интегральной кривой *расширяющейся волны Римана*. Точки этого отрезка соответствуют обратным скачкам  $u_i^+ \rightarrow u_i^-$ , которые эволюционны.

Согласно предыдущему, при не кратной характеристической скорости  $c$  ударная адиабата касается в начальной точке собственного вектора матрицы  $\|a_{ij}\|$ . Независимых собственных векторов у этой матрицы  $n$  штук. Очевидно, что если все характеристические скорости различны, то в начальной точке происходит пересечение  $n$  ветвей ударной адиабаты, на каждой из которых  $W$  близко к соответствующему значению  $c$ . Если матрица  $\|a_{ij}\|$  симметрична, что часто бывает в задачах механики, то ее собственные векторы, а следовательно и ветви ударной адиабаты, так же как и интегральные кривые волн Римана в начальной точке *взаимно ортогональны*.

На диаграмме рис. 7.3, изображающей на плоскости  $c^-, c^+$  условия эволюционности, бесконечно малым разрывам соответствует  $n$  узловых точек сетки, где  $c_i^- = c_i^+$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Эти узловые точки представляют начальное состояние  $u_i^-$  и соответствуют одной точке в пространстве состояний  $\{u_i\}$ . График изменения вдоль ударной адиабаты скорости скачка  $W(\sigma)$  должен проходить через все эти точки. На кривой, представляющей изме-

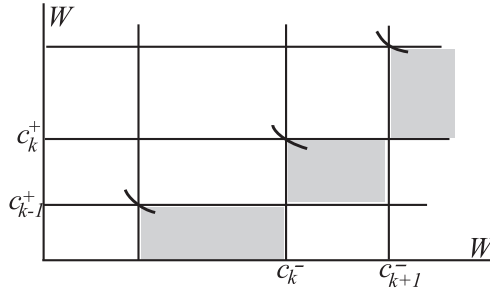


Рис. 8.1.

нение скорости разрыва  $W$  на плоскости  $c^-, c^+$ , тот участок, где  $W$  растет, идет из начальной точки (каждого узла сетки  $c_i^-, c_i^+$ ) в прямоугольник, выделенный темным цветом (рис. 8.1), так как согласно предыдущему, если  $W > c^-$ , то в окрестности начальной точки выполняются неравенства

$$c_i^- < W < c_{i+1}^-, \quad c_{i-1}^+ < W < c_i^+.$$

График зависимости  $W(\sigma)$  должен содержать, таким образом, по крайней мере,  $n$  отрезков, проходящих через все узловые точки сетки на диаграмме эволюционности, части которых, соответствующие  $W > c^-$ , лежат в эволюционных прямоугольниках (рис. 8.1).

Заметим сразу, что кроме таких отрезков, вообще говоря, могут существовать также эволюционные отрезки ударной адиабаты, которые не примыкают ни к одной точке, в которой  $c_i^+ = c_i^-$ . Эти отрезки соответствуют разрывам, интенсивность которых при заданном состоянии  $u_i^-$  не может быть сделана как угодно малой.

## § 9. Поведение ударной адиабаты в окрестности точек Жуге

Границами областей эволюционности на ударной адиабате служат точки, где скорость скачка  $W$  совпадает с одной из характеристических скоростей  $c_i^-, c_k^+$ . Мы будем называть их *точками*

*Жуге.* Однако, учитывая их разную роль в исследовании ударных волн, будем далее называть те точки, в которых  $W$  совпадает с характеристической скоростью перед разрывом ( $W = c_i^-$ ), *передними* точками Жуге, а те точки, в которых  $W = c_k^+$  – *задними*, или просто точками Жуге, как именно такие точки были названы в теории детонации.

В окрестности точек Жуге, где  $W = c^+$ , можно получить дополнительные сведения о поведении ударной адиабаты и изменении параметров вдоль нее (Напуга [54], Куликовский [25]).

Прежде всего покажем, что в случае общего положения равенства

$$\frac{dW}{d\sigma} = 0 \quad \text{и} \quad W = c^+ \quad (9.1)$$

могут выполняться на ударной адиабате только одновременно. Здесь  $\sigma$  – параметр на ударной адиабате в пространстве  $u_i$ , например, длина дуги,  $c^+$  – однократная характеристическая скорость в состоянии  $u_j^+$ . Если выполнено одно из равенств (9.1), то второе является его следствием. Как и в предыдущем параграфе, будем далее опускать индекс “+” при обозначении параметров за разрывом, сохраняя индекс “–” для состояний перед ним.

Для доказательства продифференцируем соотношения на разрыве (6.2) вдоль ударной адиабаты, считая  $u_k^-$  постоянными.

$$(a_{ij} - W\delta_{ij}) du_j = (u_i - u_i^-) dW \quad (9.2)$$

Уравнение (9.2) аналогично уравнению (8.1).

Пусть в равенстве (9.2)  $dW/d\sigma = 0$  и при этом не все  $du_j/d\sigma$  равны нулю. Тогда

$$\Delta = \det \|a_{ij} - W\delta_{ij}\| = 0. \quad (9.3)$$

Это значит, что  $W$  совпадает с одним из собственных значений матрицы  $\|a_{ij}(u_k)\|$ , то есть  $W = c$ .

Обратно, если  $W = c$ , то определитель (9.3) равен нулю. Тогда при домножении уравнения (9.2) на компоненты левого собственного вектора  $\{l_i\}$  матрицы  $\|a_{ij}\|$ , соответствующего  $c$ , после суммирования по  $i$  левая часть равенства исчезает, следовательно

$$dW(u_i - u_i^-)l_i = 0. \quad (9.4)$$

Предположим, что одновременно с равенством  $W = c$  не обращается в нуль коэффициент при  $dW$  в формуле (9.4) (случай общего

положения), то есть что

$$(u_i - u_i^-)l_i \neq 0. \quad (9.5)$$

Тогда из равенства (9.4) следует, что  $dW = 0$  при  $du_k$  не равных одновременно нулю, то есть  $dW/d\sigma = 0$ .

Равенство (9.2) показывает, что при  $dW/d\sigma = 0$  величины  $du_j$  пропорциональны компонентам правого собственного вектора матрицы  $\|a_{ij}\|$  и, следовательно, могут представлять малое изменение величины  $u_i$  в линейной волне или волне Римана, распространяющейся по состоянию  $u_i$  в точке Жуге. Это означает, что *ударная адиабата* в пространстве  $u_i$  в точке Жуге *касается интегральной кривой* соответствующей волны Римана.

Покажем, что, если на ударной адиабате величина  $W - c$  меняет знак в изолированной точке Жуге, то в этой точке меняет знак и  $dW$ . Систему уравнений (9.2) можно разрешить для функций  $du_j$  по правилу Крамера

$$du_j = \frac{b_j}{\Delta} dW.$$

При этом определитель системы  $\Delta$  в знаменателе меняет знак в точке Жуге вместе с разностью  $W - c$ , а величины  $b_j$  в числителе при выполнении условия (9.5) одновременно в нуль не обращаются. В то же время величины  $du_j$  при движении вдоль дуги ударной адиабаты в одном направлении одновременно знака не меняют. Значит в точке Жуге меняет знак  $dW$ .

Если в некоторой точке  $dW/d\sigma$  обращается в нуль и меняет при этом знак, то в этой точке функция  $W(\sigma)$  имеет экстремум. Очевидно верно и обратное. Таким образом, в случае общего положения, то есть при выполнении условия (9.5), в точке Жуге, где  $W = c^+$ , функция  $W(\sigma)$  имеет экстремум.

Из этого следует вывод относительно отображения ударной адиабаты на диаграмму эволюционности (рис. 8.1). Так как на диаграмме эволюционности по горизонтальной оси скорости откладываются в одном и том же масштабе, то линия  $W(\sigma)$ , изображающая ударную адиабату, пересекает в точках Жуге горизонтальные прямые сетки, имея в них вертикальные касательные (рис. 9.1) (в точках пересечения, отличных от узлов сетки).

Причина выполнения указанных выше свойств ударной адиабаты очень проста. Если выполнено условие Жуге  $W - c = 0$ , то наряду с исходным разрывом можно рассмотреть как один разрыв комбинацию из исходного разрыва и следующей за ним с той

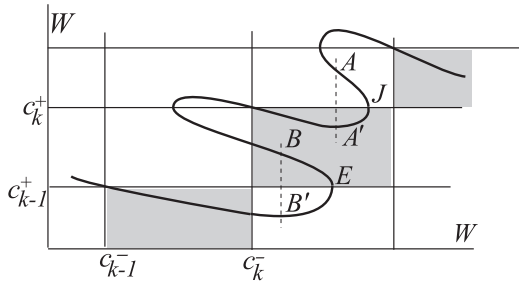


Рис. 9.1.

же скоростью линейной волны. Такой разрыв будет иметь ту же скорость, что и исходный, откуда следует, что  $dW/d\sigma = 0$  в рассматриваемой точке. Наоборот, если на ударной адиабате имеются две близкие точки, соответствующие разрывам, движущимся с одной и той же скоростью, то переход из одной точки в другую можно считать малым разрывом, движущимся с той же скоростью. Это означает, что условие Жуге  $W = c$  выполнено там, где эти точки совпадут, если величину разрыва устремить к нулю (то есть в точке экстремума  $W$ ).

Упомянутые выше свойства могут не выполняться при нарушении в точке Жуге условия (9.5). Условие (9.5) требует своей проверки в конкретных ситуациях.

Следствием доказанных выше утверждений является то, что решение в виде ударной волны Жуге может быть состыковано на плоскости  $x, t$  с решением в виде расширяющейся со временем волны Римана, так что их скорости в точке стыковки совпадают. В § 10, § 11 будет видно, что это важно для построения решений автомодельных задач.

Рассмотрим в пространстве  $u_i$  эволюционный отрезок ударной адиабаты с концом в точке Жуге и начинающуюся в этой точке часть интегральной кривой соответствующей неопрокидывающейся волны Римана.

Эти кривые, согласно изложенному, имеют общую касательную в точке Жуге. Однако, касание этих двух линий в пространстве  $u_i$  может происходить либо так, что одна из них служит продолжением другой, либо обе они направлены в одну сторону, образуя точку возврата.

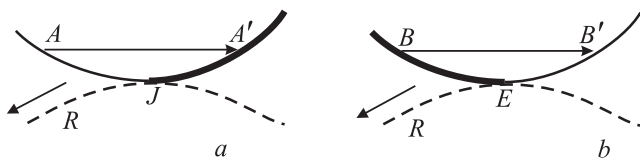


Рис. 9.2.

На рис. 9.2 сплошной линией изображены дуги ударной адиабаты в окрестности точек Жуге, а штриховой — участки интегральных кривых волн Римана, проходящих через эти точки. Жирной линией выделены эволюционные участки ударной адиабаты, стрелками на интегральных кривых волн Римана обозначены направления убывания характеристической скорости  $c$ , то есть направления изменения параметров в расширяющейся (неопрокидывающейся) волне Римана.

При выяснении, какой из этих вариантов осуществляется, поможет диаграмма на рис. 9.1. Для определения направления изменения параметров в пространстве  $u_i$  в расширяющейся со временем (неопрокидывающейся) волне Римана в точках Жуге воспользуемся исследованием малых скачков § 8.

Наличие экстремума на ударной адиабате у функции  $W(\sigma)$  скорости разрыва позволяет найти пару точек, соответствующих одному и тому же заданному значению  $W$ , близкому к экстремальному. Очевидно, скачок из одной такой точки в другую будет удовлетворять всем законам сохранения, а его скорость будет равна тому же значению  $W$ . Например, на рис. 9.1 изображены скачки  $A \rightarrow A'$  или  $B \rightarrow B'$ . Скорость такого малого разрыва равна  $W \approx c_i$ .

В § 8 показано, что малый разрыв, движущийся со скоростью, близкой к характеристической скорости  $c$ , эволюционен, если перед ним  $W > c$ , а за ним  $W < c$ . Это значит, что малый скачок эволюционен, если он совершается через прямую  $W = c^+$  (на диаграмме на плоскости  $c^-, c^+$ , рис. 9.1) сверху вниз. Как было показано в § 8, изменение параметров  $u_i$  в противоположном направлении (с точностью до  $\sigma^3$ ) дает расширяющаяся волна Римана, если начальное состояние для обеих волн принимается одинаковым.

Если ударная адиабата на рис. 9.1 пересекает верхнюю границу области эволюционности, например, в точке  $J$ , то этот малый

скачок относится к тому же типу, что и основной скачок, и совершается с неэволюционной части ударной адиабаты на эволюционную (из  $A$  в  $A'$ ). Будем в этом случае говорить, что точка  $J$  – *своя* точка Жуге. Так же из состояния  $A$  в  $A'$  происходит малый скачок в пространстве  $u_i$ . Тогда интегральная кривая в пространстве  $u_i$ , соответствующая расширяющейся волне Римана, идет в противоположную сторону, то есть вверх на диаграмме эволюционности, и является *продолжением эволюционной части ударной адиабаты* с общей касательной в своей точке Жуге (линия  $JR$  на рис. 9.2a)).

При пересечении ударной адиабатой *нижней границы области эволюционности* на диаграмме рис. 9.1 (например, в точке  $E$ ) упомянутый малый эволюционный скачок относится к другому типу по сравнению с основным скачком и совершается из точки  $B$  в  $B'$ , то есть с эволюционного участка ударной адиабаты на неэволюционный. Будем называть такую точку Жуге *не своей*. В расширяющейся волне Римана, которая также относится в этом случае к другому типу, по сравнению с ударной волной изменение  $u_k$  происходит в противоположном направлении, то есть вверх, так что волна Римана оказывается близкой к эволюционному отрезку ударной адиабаты. На рис. 9.2 этой волне Римана соответствует дуга  $ER$  на рис. 9.2b). Таким образом, эволюционный участок ударной адиабаты и часть интегральной кривой, соответствующая расширяющейся волне Римана, составляют в пространстве  $u_i$  кривую с *точкой возврата в не своей точке Жуге*.

Это качественное различие в сопряжении ударной адиабаты с интегральными кривыми волн Римана оказывает существенное влияние на строение решений автомодельных задач.

## § 10. Автомодельные задачи.

### Распад произвольного разрыва

Среди задач для гиперболических систем уравнений вида (2.4), решение которых состоит из центрированных волн Римана и ударных волн, важное место занимают автомодельные задачи и, в первую очередь, *задача о распаде произвольного разрыва*. Предполагается, что при  $t = 0$  начальные условия задаются следующим образом: при  $x > 0$  заданы  $u_i = U_i = \text{const}$ , при  $x < 0$  заданы  $u_i = u_i^* = \text{const}$ . Требуется построить решение при  $t > 0$

для всех  $x$ . Эта задача называется задачей о распаде произвольного начального разрыва. Кроме самостоятельного значения, она имеет также значение как тестовая. Отсутствие решения или его неединственность во многих случаях служат указанием на необходимость внесения уточнений в постановку задачи. Такое уточнение может заключаться в переходе к более конкретизированной модели среды.

Задача о распаде произвольного разрыва *автомодельна*, что позволяет разыскивать решение в виде

$$u_i = u_i \left( \frac{x}{t} \right). \quad (10.1)$$

Все непрерывные решения оказываются при этом центрированными волнами Римана, кроме того, решение может содержать разрывы и области постоянных значений всех искомым функций.

Наряду с задачей о распаде произвольного разрыва, в решении которой могут участвовать все имеющиеся типы волн Римана и ударных волн, в механике сплошной среды часто рассматривают более простую автомодельную задачу *о поршне* или о волнах в полупространстве. При этом начальные условия  $u_i = U_i = \text{const}$  задаются только при  $x > 0$  и выставляются также граничные условия обычно на плоскости, состоящей из одних и тех же частиц среды, которая в начальный момент времени занимала положение  $x = 0$ . Если  $x$  – эйлерова координата, то движение этой ограничивающей среду плоскости задается или находится при решении начально-краевой задачи, а если  $x$  – лагранжева координата, то граничные условия выставляются при  $x = 0$ .

Для автомодельности задачи необходимо, чтобы скорость движения плоскости, а также задаваемые на ней значения  $u_i$  были бы постоянны во времени. Поскольку решение задачи ищется в полупространстве, то оно должно конструироваться только из волн Римана и ударных волн, уходящих от границы. Соответственно, число граничных условий, задаваемых на границе, которое должно удовлетворять требованию эволюционности, как правило меньше порядка системы  $n$ . Обычно в конкретных задачах вопрос о постановке граничных условий не вызывает затруднений. Так, например, в задачах об упругих волнах в полупространстве на границе полупространства могут с равным успехом задаваться: (1) вектор скорости среды, (2) вектор нормальных напряжений, (3) три компоненты тензора деформаций.

Рассмотрим задачу о распаде произвольного разрыва сначала в линейной (или линеаризованной) постановке. Общее решение линейной задачи дается равенством (2.8), которое в данном случае запишем в виде суммы бегущих волн малых возмущений

$$u_i - U_i = \sum_{m=1}^n r_i^{(m)} Z_m(x - c^{(m)}t),$$

где  $r_i^{(m)}$  – компоненты  $m$ -го правого собственного вектора постоянной матрицы  $a_{ij}$ , входящей в систему (2.4),  $Z_m$  – функция, задающая амплитуду  $m$ -й волны,  $c^{(m)}$  – скорости этой волны малых возмущений,  $U_i$  – постоянные начальные значения  $u_i$  при  $x > 0$ .

Функции  $Z_m(\xi_m)$ , представляя собой ступенчатые функции своего аргумента  $\xi_m = x - c^{(m)}t$ , принимающие нулевые значения  $Z_m^- = 0$  при величинах аргумента больших нуля. Для нахождения значений  $Z_m^+$  при отрицательных аргументах необходимо при фиксированном  $t$  подставить в предыдущее равенство достаточно большое по модулю отрицательное значение  $x$ , что дает

$$u_i^* - U_i = \sum r_i^{(m)} Z_m^+.$$

В силу предполагаемой линейной независимости собственных векторов, выписанные выше равенства, рассматриваемые как система уравнений относительно  $Z_m^+$ , однозначно определяют эти величины. Таким образом, решение задачи о распаде произвольного разрыва в линейной постановке всегда существует и единственно.

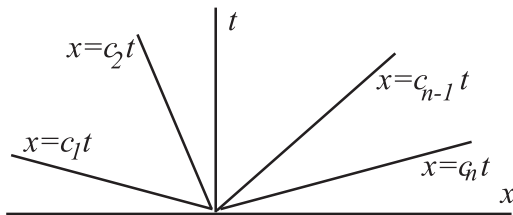


Рис. 10.1.

На плоскости  $x, t$  решение представлено на рис. 10.1. Вдоль лучей  $x = c^{(m)}t$  расположены разрывы, на которых функции  $u_i$  приобретают приращения равные  $\Delta_m u_i = r_i^{(m)} Z_m^+$ . В каждом из секторов между этими лучами все  $u_i$  постоянны.

В пространстве  $u_i$  решение задачи сводится к переходу от точки  $u_i^*$  в точку  $U_i$  с помощью  $n$  ступенек-скачков, каждый из которых совершается вдоль соответствующего собственного вектора  $\{r_i^{(m)}\}$ . Линии, параллельные  $n$  собственным векторам, могут быть приняты в качестве координатных линий новой системы переменных  $Z_m^+$ . Существование и единственность решения обеспечивается тем, что должен быть отличен от нуля якобиан преобразования  $|r_i^{(m)}| \neq 0$ .

Рассмотрим теперь задачу о распаде произвольного разрыва в нелинейной постановке, считая, однако, что изменение величин в волнах, входящих в решение, невелики и для ударных волн можно пользоваться результатами § 8. В нелинейной постановке появляется различие между ударными волнами и волнами Римана (в линейном решении и та, и другая представляются разрывами). В решении задачи могут присутствовать только расширяющиеся со временем (неопрокидывающиеся) волны Римана, в которых  $\partial c / \partial x \geq 0$ , поскольку в рассматриваемом случае  $c = x/t$ . Это требование определяет на кривой, представляющей волну Римана в пространстве  $u_i$ , вполне определенное направление изменения величин. Как показано в § 8, состояния за эволюционными ударными волнами лежат на отрезке ударной адиабаты, расположенном по одну сторону от начальной точки. Ударная адиабата касается в начальной точке интегральной кривой волны Римана и имеет с ней одинаковую кривизну, причем эволюционный отрезок ударной адиабаты является продолжением части интегральной кривой волны Римана, соответствующей неопрокидывающимся волнам, начинающимся в начальной точке. Изменение функций  $u_i$  в  $m$ -й волне (ударной или неопрокидывающейся волне Римана) представляется изменением  $u_i$  от точки, изображающей состояние перед волной (при больших  $x$ ), до некоторой точки, лежащей на рассмотренной выше составной кривой  $m$ -й волны.

Для слабых ударных волн неравенства (7.2), выражающие условия эволюционности, выполняются строго, если производная от характеристической скорости вдоль характеристического направления не равна нулю, то есть если  $c^+ \neq c^-$ . При этом  $W = (c^+ + c^-)/2$  и  $W \neq c^-$ ,  $W \neq c^+$ . В этом случае присутствие в решении  $k$ -й ударной волны исключает наличие в решении  $k$ -й волны Римана. (Ниже будет показано, что такое сосуществование волн одного типа в решении возможно, если для ударной волны выполнено условие Жуге  $W = c^-$  или  $W = c^+$ ).

Таким образом, в общем случае *решение задачи о распаде разрыва состоит из  $n$  волн различных типов, каждая из которых является либо ударной, либо неопрокидывающейся волной Римана*. При этом задача построения решения сводится к тому, чтобы в пространстве  $u_i$  перейти от точки  $u_i = u_i^*$  в точку  $u_i = U_i$ , двигаясь по  $n$  кривым, каждая из которых соответствует волне 1-го, 2-го, ...,  $n$ -го типа. В случае волн бесконечно малой амплитуды каждая из кривых заменялась касательной прямой и в силу некомпланарности этих прямых задача оказывалась однозначно разрешимой. Очевидно, что задача остается однозначно разрешимой и в случае волн конечной но достаточно малой амплитуды, поскольку она остается близкой к линейной.

Амплитуды изменения величин в волнах и их характер определяются величиной и направлением смещения точки по кривой, соответствующей  $k$ -ой волне. Точно так же решается задача о поршне и другие автомодельные задачи. Важно отметить, что в случае волн малой амплитуды число граничных условий, задаваемых на границе полупространства, равно числу уходящих от нее волн, поскольку это имеет место для случая волн бесконечно малой амплитуды.

## § 11. Автомодельные задачи, когда один из разрывов близок к разрыву с условием Жуге

При изучении автомодельных задач для волн конечной амплитуды, ограничимся только рассмотрением особенностей решения в случаях, когда для одной из ударных волн выполняется условие Жуге, или условие Жуге выполнено приближенно.

Рассмотрим сначала решение автомодельной задачи, когда один из разрывов близок к *своей* точке Жуге, в которой  $W = c_k^+$ , соответствующей на диаграмме эволюционности на рис. 9.1 пересечению ударной адиабаты с верхней границей эволюционного прямоугольника (на рисунке это точка  $J$ ). Как было показано в § 9, в пространстве  $u_i$  эволюционный участок ударной адиабаты, соответствующий разрывам  $k$ -го типа, касается в точке Жуге интегральной кривой волны Римана, соответствующей  $c_k$ . В случае общего положения продолжением эволюционного отрезка ударной адиабаты, расположенным вблизи ее неэволюционной части,

служит часть интегральной кривой волны Римана, на которой характеристическая скорость убывает при удалении от точки Жуге.

Такое взаимное расположение упомянутых кривых не препятствует непрерывной зависимости решения автомодельной задачи в окрестности точки Жуге от параметров, задающих состояние за автомодельной системой волн, распространяющихся по заданному состоянию впереди. Упомянутая непрерывная зависимость очевидна в случае, когда разрыв с рассматриваемой точкой Жуге – самый быстрый в системе волн, дающих решение рассматриваемой задачи. При малом изменении состояния за системой волн в общем случае решение будет содержать либо эволюционный разрыв рассматриваемого быстрого типа, близкий к точке Жуге, либо быстрый разрыв Жуге со следующей за ним быстрой автомодельной неопрокидывающейся волной Римана. Если измененное состояние за системой волн не лежит на эволюционном отрезке ударной адиабаты или на продолжающей ее части интегральной кривой волны Римана, то это приводит к появлению других (отличных от быстрой) волн малой амплитуды. При этом *задача всегда оказывается разрешимой*, поскольку система векторов, касательных к кривым, задающим изменение величин в этих волнах, и касательная к ударной адиабате в точке Жуге образуют невырожденную систему векторов, представляющую полную систему собственных векторов, отвечающих малым возмущениям относительно состояния, задаваемого точкой Жуге.

В случае, когда рассматриваемая точка Жуге не соответствует самой быстрой волне, разрешимость задачи об определении амплитуд волн выяснять сложнее. Разрешимость задачи об определении амплитуд волн соответствует случаю общего положения.

При наличии *не своей* точки Жуге, когда для разрыва  $k$ -го типа выполняется равенство  $W = c_{k-1}^+$ , ударная адиабата покидает эволюционный прямоугольник на диаграмме, пересекая его нижнюю границу (на рис. 9.1 такой точкой Жуге является точка  $E$ ). В этом случае в пространстве  $u_i$  отрезок ударной адиабаты, соответствующий  $k$ -ым ударным волнам, касается в точке Жуге интегральной кривой  $(k - 1)$ -й волны Римана (соответствующей характеристической скорости  $c_{k-1}$ ). Было показано ранее (§ 9), что в пространстве  $u_i$  эволюционная часть ударной адиабаты, соответствующая  $k$ -разрывам, вместе с автомодельной частью интегральной кривой  $(k - 1)$ -й волны Римана (на которой характеристическая скорость убывает при удалении от точки Жуге, а сама волна расширяется с ростом  $t$ ) имеют в точке Жуге точку

возврата. На рис. 11.1 буквами  $S_k$  и  $S_{k-1}$  обозначены соответствующие части ударной адиабаты, жирными линиями выделены их эволюционные части, тонкой линией – интегральные кривые автомодельной волны Римана  $R_{k-1}$ , штриховой линией изображен неэволюционный отрезок ударной адиабаты.

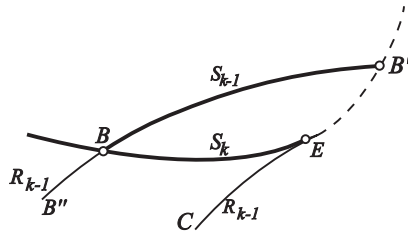


Рис. 11.1.

Если в малой окрестности точки Жуге  $E$  в пространстве  $u_i$  заменить ударную адиабату  $S_k$  и волну Римана  $R_{k-1}$  их совпадающей касательной, то видно, что изменение параметров, характеризующее две упомянутые волны, приводит к движению вдоль одного и того же луча. Из этого следует, что из амплитуд различных волн только  $n - 1$  амплитуда приводит к линейно независимым изменениям величин  $u_i$ . Это означает, что при заданных значениях  $u_i$  по одну сторону начального разрыва их значения по другую сторону разрыва должны принадлежать  $n - 1$  мерному множеству для того, чтобы задача о распаде произвольного разрыва имела решение. Это показывает возможность несуществования решения в принятом линейном приближении.

Для более аккуратного построения близких автомодельных решений заметим, что каждая точка (например, точка  $B$  на рис. 11.1), принадлежащая эволюционному отрезку  $S_k$  ударной адиабаты, соответствует, в силу своего положения, состоянию за  $k$ -м разрывом, за которым может следовать или  $(k - 1)$ -й эволюционный разрыв  $S_{k-1}$  или непрерывная автомодельная  $(k - 1)$ -я волна Римана  $R_{k-1}$ . В пространстве  $u_i$  состояние за упомянутыми волнами принадлежит кривой, составленной из эволюционной части  $BB'$  ударной адиабаты  $S_{k-1}$  и служащей продолжением ее интегральной кривой  $BB''$  волны Римана  $R_{k-1}$ . При движении точки  $B$  по эволюционной дуге ударной адиабаты  $S_k$  составная кривая  $B''BB'$  замечает некоторую двумерную поверхность,

для точек которой можно построить решение, состоящее из последовательности  $k$ -го эволюционного разрыва и  $(k - 1)$ -й волны (непрерывной или разрыва), близкое к решению, соответствующему точке Жуге  $E$ . Назовем это решение решением I.

Покажем, что это – поверхность с краем, по другую сторону которого автомодельного решения описанного типа не существует. Найдем кривую, представляющую собой этот край.

Если по состоянию  $B$  за эволюционным разрывом  $k$ -го типа, движущимся со скоростью  $W_B$ , следует достаточно малый эволюционный разрыв  $(k - 1)$ -го типа, то его скорость меньше, чем  $W_B$ , поскольку за разрывом  $k$ -го типа, согласно условиям эволюционности (7.2),  $W_B - c_{k-1}^+ > 0$ . Если, не меняя состояние  $B$ , увеличивать амплитуду  $(k - 1)$ -го скачка, то его скорость будет расти (согласно §8 это верно для достаточно слабых скачков) и, когда точка, представляющая состояние за этим разрывом, придет в состояние  $B'$  (рис. 11.1), скорость этого  $(k - 1)$ -го разрыва станет равной  $W_B$ . В физическом пространстве разрывы  $k$ -го и  $(k - 1)$ -го типов сольются, образуя один неэволюционный разрыв, соответствующий точке  $B'$ . Дальнейшее увеличение амплитуды скачка  $(k - 1)$ -го типа не имеет физического смысла и не соответствует решениям автомодельной задачи, так как  $(k - 1)$ -й разрыв не может обогнать  $k$ -й. Это приводит к тому, что в пространстве переменных  $u_i$  область, где существует решение, состоящее из двух разрывов  $k$ -го и  $(k - 1)$ -го типов,  $S_k S_{k-1}$ , представляет некоторую поверхность, ограниченную кривой, состоящей из точек  $B$  и  $B'$ , то есть ударной адиабатой. По другую сторону от эволюционного отрезка ударной адиабаты  $S_k$ , как было сказано выше, можно построить автомодельное решение, состоящее из разрыва  $k$ -го типа  $S_k$  и волны Римана  $(k - 1)$ -го типа  $R_{k-1}$ , которое будем обозначать  $S_k R_{k-1}$ . Двумерная поверхность, соответствующая решениям  $S_k S_{k-1}$  и  $S_k R_{k-1}$ , ограничена кривой, которая состоит из неэволюционной части ударной адиабаты (дуга  $EB'$  на рис. 11.1) и интегральной кривой волны Римана (дуга  $EC$ ), касающейся ударной адиабаты в точке  $E$ .

По другую сторону от упомянутого края двумерной поверхности *автомодельное решение может не существовать, а если существует, то должно иметь другое строение*. Как показало рассмотрение волн в анизотропном упругом теле и как следует из общих соображений, возможны два случая.

1. Возможен случай, когда область, в которой существует другое решение, ограничена тем же краем, так что решение в окрест-

ности точки  $E$  существует и единственно. Для этого необходимо, чтобы второе решение, так же как и рассмотренное выше первое, было генетически связано с неэволюционной частью ударной адиабаты (дуга  $EB'$  на рис. 11.1). Это возможно, если имеется другая, отличающаяся от рассмотренной выше, комбинация из двух разрывов, которые сливаются в один при приближении с другой стороны к линии, представляющей неэволюционный отрезок ударной адиабаты. Именно такая ситуация изображена на рис. 9.1, где  $W_J > W_E$  ( $W_J$  и  $W_E$  – скорости ударных волн, соответствующих точкам  $J$  и  $E$  ударной адиабаты), то есть в случае, когда точка  $J$  лежит правее точки  $E$ . В этом случае при скоростях, чуть меньше  $W_E$ , имеются две различных быстрых квазипоперечных ударных волны, соответствующих эволюционному прямоугольнику, которому принадлежат точки  $J$  и  $E$ , (рис. 9.1), которые вместе с более медленными волнами могут составить две комбинации, соответствующие неэволюционному разрыву, близкому к скачку в точку  $E$ .

Отметим, что автомодельные решения, получающиеся для точек, лежащих по разные стороны от неэволюционной ударной волны вблизи них, хотя не близки между собой, если оценивать их близость по максимуму модуля разности решений, но остаются все же близкими между собой, если использовать другие меры их различия, учитывающие величину области, где эти решения сильно различаются. Это связано с тем, что скорости ударных волн, образующих в результате их слияния в неэволюционную ударную волну, равны скорости образовавшейся волны.

2. Рассмотрим теперь случай, когда неэволюционная часть ударной адиабаты, примыкающая к точке Жуге, такова, что существует только одна (рассмотренная выше) комбинация из двух волн, слияние которых соответствует неэволюционному разрывам. Это всегда имеет место в случае  $W_J < W_E$ , когда на рис. 9.1 точка Жуге  $J$  лежит левее точки  $E$ . Тогда, если автомодельное решение существует для всех точек окрестности точки  $E$ , то второе решение, не будучи прямо связано с неэволюционным отрезком ударной адиабаты, который соответствует слиянию ударных волн  $k$ -го и  $(k - 1)$ -го типов, в общем случае не близко к рассмотренному выше решению I, а граница области, где это решение имеет место, в общем случае не проходит близко к точке  $E$ . Это означает, что в половине окрестности точки  $E$  имеются одновременно два не близких между собой автомодельных решения, одно

из которых решение I, а второе не близко к нему и существует в полной окрестности точки  $E$ . Если менять параметры, определяющие задачу, то можно пересечь границу области существования решения, после чего решение I перестанет существовать и должно мгновенно распасться на другую автомодельную систему волн. Такая ситуация может иметь место для задач теории упругости (Куликовский, Свешникова [30]). Не исключена также возможность отсутствия автомодельного решения в области, где не существует решения I (на рис. 11.1 правее линии  $B'EC$ ), хотя физической задачи такого типа авторам не известно.

Как видно из изложенного, упомянутые особенности автомодельных (и некоторых неавтомодельных) решений связаны с наличием тех или других точек Жуге на ударной адиабате. Например, в решениях автомодельных задач теории упругости имеет место неединственность рассмотренного выше типа, связанная с наличием на ударной адиабате *не своей* точки Жуге.

Все утверждения, доказанные для автомодельных решений с аргументом  $x/t$ , верны также и для стационарных автомодельных решений с аргументом  $\varphi = \arctg y/x$ .

## § 12. Признак несуществования или неединственности решений автомодельных задач

Нетрудно заметить, что рассуждение, приведшее к заключению о неединственности или несуществовании автомодельного решения в случае наличия на ударной адиабате не своей точки Жуге, допускает возможность распространения сделанного заключения на более общий случай (Куликовский, Свешникова [33]).

Пусть отображение ударной адиабаты на диаграмму эволюционности содержит отрезки, один из которых проходит по эволюционному прямоугольнику, а другой проходит по неэволюционному прямоугольнику, примыкающему к упомянутому эволюционному прямоугольнику снизу (рис. 12.1). Пусть на этих ветвях имеются точки  $M_1$  и  $M$ , лежащие на одной вертикали, то есть соответствующие разрывам  $A \rightarrow M_1$  и  $A \rightarrow M$ , движущимся с одной и той же скоростью  $W$ . Буквами  $A$  обозначено начальное состояние для ударной адиабаты (в пространстве  $u_i$  это одна точка).

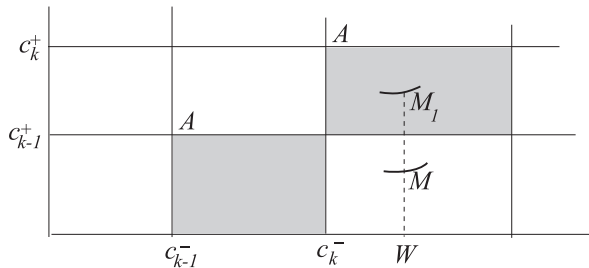


Рис. 12.1.

Разрыв  $A \rightarrow M_1$  эволюционный, а разрыв  $A \rightarrow M$  неэволюционный, поскольку от этого разрыва уходят  $n - 2$  характеристики, то есть на одну меньше, чем требуется для эволюционности. Так как на обоих упомянутых разрывах выполняются все  $n$  законов сохранения и они имеют одинаковую скорость, то отсюда следует, что на разрыве  $M_1 \rightarrow M$  также выполнены законы сохранения и этот разрыв имеет ту же скорость  $W$ .

Проверим, что разрыв  $M_1 \rightarrow M$  тоже эволюционный. Рассмотрим последовательность разрывов  $A \rightarrow M_1$ ,  $M_1 \rightarrow M$ , разделенных однородным состоянием, соответствующим точке  $M_1$ . Во вне этой последовательности, также как и от разрыва  $A \rightarrow M$ , уходит  $n - 2$  характеристики. Между этими разрывами имеется  $n$  характеристик и каждая уходит от одного из разрывов. Таким образом, суммарное число характеристик, уходящих от обоих разрывов, равно  $n - 2 + n = 2n - 2$ . Но от эволюционного разрыва  $A \rightarrow M_1$  уходит  $n - 1$  характеристика. Следовательно от разрыва  $M_1 \rightarrow M$  уходит также  $n - 1$  характеристика и он эволюционен.

Таким образом, неэволюционный разрыв  $A \rightarrow M$  может распадаться на два эволюционных разрыва, движущихся с одинаковыми скоростями.

Будем в дальнейшем при упоминании ударных адиабат указывать в скобках их начальные точки. Рассмотрим серию задач о распаде произвольного разрыва (или задач “о поршне”), в которых фиксированы все волны (которые могут быть разрывами или волнами Римана), кроме волн с номерами  $k$  и  $k - 1$ . При этом состояние перед  $k$ -й волной ( $A$ ) будет фиксировано и будет приниматься в качестве начального состояния для ударной адиабаты( $A$ ). Найдем в пространстве  $u_i$  множество точек, в которые можно попасть из точки  $A$  при помощи последовательности

двух разрывов  $k$ -го и  $(k - 1)$ -го типов. Согласно предыдущему, к этому множеству принадлежит та неэволюционная часть ударной адиабаты  $(A)$  на которой лежит точка  $M$ . На этой неэволюционной части ударной адиабаты  $(A)$  скорости  $k$ -го и  $(k - 1)$ -го разрывов совпадают. Очевидно, что в автомодельном решении скорость  $(k - 1)$ -го разрыва не должна превышать скорость  $k$ -го разрыва  $W_{k-1} \leq W_k$ . Если зафиксировать точку  $M_1$  и, следовательно,  $W_k$ , то при изменении  $W_{k-1}$  точка, представляющая состояние за последовательностью  $k$ -го и  $(k - 1)$ -го разрывов, будет двигаться в пространстве  $u_i$  вдоль ударной адиабаты с начальной точкой  $M_1$ . При совпадении скоростей  $W_{k-1}$  и  $W_k$  состояние за системой из двух разрывов, движущихся с одинаковой скоростью, должно принадлежать неэволюционному отрезку ударной адиабаты  $(A)$ . Будем рассматривать случай общего положения, когда скорость  $W_{k-1}$  не имеет экстремума на ударной адиабате  $(M_1)$  в точке  $M$  ее пересечения с ударной адиабатой  $(A)$ .

При движении точки  $M_1$  по ударной адиабате  $(A)$   $(k - 1)$ -я ударная адиабата  $(M_1)$  в пространстве  $u_i$  замечает двумерную поверхность. Так как в автомодельной задаче необходимо выполнение неравенства  $W_{k-1} \leq W_k$ , то состояние за двумя разрывами  $k$ -го и  $(k - 1)$ -го типов может принадлежать только части этой поверхности, ограниченной неэволюционным куском ударной адиабаты  $(A)$ .

Если теперь разрешить изменяться  $n - 2$  волнам, которые ранее считались фиксированными, то кривая, соответствующая рассматриваемой неэволюционной части ударной адиабаты, заметет, в случае общего положения, в пространстве  $u_i$  поверхность  $\Sigma$  размерности  $n - 1$  (гиперповерхность). Эта поверхность разделит пространство  $u_i$  на две части, в одной из которых решение задачи о распаде разрыва содержит ударные волны  $k$ -го и  $(k - 1)$ -го типов, скорости которых удовлетворяют необходимому неравенству  $W_{k-1} \leq W_k$ , которое превращается в равенство на поверхности  $\Sigma$ . Будем называть это решение решением I.

Предположим, что существует только одна пара разрывов  $k$ -го и  $(k - 1)$ -го типов с совпадающими скоростями, на которые распадается неэволюционный разрыв, тогда очевидно, что с другой стороны от поверхности  $\Sigma$  решение задачи не содержит одновременно разрывов  $k$ -го и  $(k - 1)$ -го типов, скорости которых удовлетворяют неравенству  $W_{k-1} \leq W_k$  и совпадают на поверхности  $\Sigma$ . Это означает, что, если решение в области, примыкающей к поверхности  $\Sigma$  с другой стороны, существует, то оно имеет другое

строение, например, содержит хотя бы одну из волн Римана  $k$ -го или  $(k - 1)$ -го типов, но не содержит одновременно разрывы  $k$ -го и  $(k - 1)$ -го типов. Такие решения (если они существуют) будем называть решениями II. Область существования решений II в общем случае не связана с ударной адиабатой ( $A$ ) и, следовательно, не ограничивается поверхностью  $\Sigma$ .

Действительно, границы области существования решений II не имеют отношения к возможности существования одного неэволюционного скачка из состояния перед  $k$ -й волной в некоторую точку поверхности  $\Sigma$ , поскольку в этих решениях отсутствуют комбинации ударных волн  $k$ -го и  $(k - 1)$ -го типов. Если решение II существует по ту сторону от поверхности  $\Sigma$ , где нет решений I, и область его существования не связана с поверхностью  $\Sigma$ , то в общем случае она может либо не доходить до поверхности  $\Sigma$ , что ведет к несуществованию решения в некоторой зоне, либо должна существовать область, где имеют место оба решения типов I и II, то есть область неединственности решений.

Таким образом, если при каком-либо задании начальной точки для ударной адиабаты существует неэволюционный ее отрезок, соответствующий возможности распада неэволюционного разрыва на два эволюционных, такой, что на некотором интервале скоростей наряду с неэволюционным имеется также эволюционный разрыв, причем только один, то можно указать такие условия для задачи о распаде разрыва, что решение либо не будет существовать, либо будет неединственным.

Приведенное выше утверждение о неединственности или несуществовании решения теряет силу, если нет эволюционных разрывов, имеющих те же скорости, что и неэволюционные, или если таких эволюционных разрывов два для каждого значения скорости. В первом случае возможные решения никак не связаны с наличием рассматриваемой неэволюционной волны и предложенным выше способом никаких заключений о решении сделать нельзя. Во втором случае на диаграмме рис. 12.1 в том же затемненном  $k$ -м эволюционном прямоугольнике имеется еще один эволюционный участок ударной адиабаты ( $A$ ). Тогда существуют две комбинации  $k$ -й и  $(k - 1)$ -й эволюционных волн в случае фиксированных амплитуд остальных  $n - 2$  волн.

Если теперь допустить произвольные изменения этих амплитуд, то отрезок ударной адиабаты, соответствующий неэволюционному разрывам, как и прежде, заметет  $n - 1$  мерную поверхность  $\Sigma$ . Но теперь может оказаться, что с одной стороны от

этой поверхности имеется решение I, содержащее одну комбинацию  $k$ -го и  $(k - 1)$ -го разрывов, а с другой стороны – решение II, содержащее другую комбинацию разрывов тех же типов, причем поверхность  $\Sigma$  разделяет области, соответствующие решениям I и II. Таким образом, в этом случае решения, содержащие разрывы  $k$ -го и  $(k - 1)$ -го типов, существуют по обе стороны от поверхности  $\Sigma$  и определяются единственным образом. Возможно, конечно, что решениям I и II отвечают области, примыкающие к поверхности  $\Sigma$  с одной и той же стороны. При этом решение, очевидно, неединственно. Отличить этот случай от предыдущего по форме ударной адиабаты на диаграмме эволюционности не представляется возможным.

Если эволюционных разрывов, имеющих ту же скорость, что и неэволюционный разрыв, три или более, то очевидно, что хотя бы с одной стороны от поверхности  $\Sigma$  будут существовать два или более решений, содержащих разрывы  $k$ -го и  $(k - 1)$ -го типов, то есть решение будет неединственным.

При исследовании автомодельных задач в упругих анизотропных средах было обнаружено (Куликовский, Свешникова [30], [31]), что, в соответствии с изложенным, если имеется только одна пара ударных волн, на которые может распасться неэволюционный разрыв, то решение автомодельных задач оказывается неединственным, а если таких пар ударных волн две, то решение автомодельных задач единственно. В последнем случае решение по разные стороны от неэволюционного отрезка ударной адиабаты устроено по-разному, то есть состоит из различных волн.

Рассмотрим случай, когда решение существует, но неединственно. Неединственность связана с присутствием решения (обозначенного выше как решение II), не связанного непосредственно с ударной адиабатой, которое действует в некоторой конечной области, содержащей внутри себя неэволюционный участок ударной адиабаты. Поэтому, если к такому неэволюционному отрезку примыкает на ударной адиабате эволюционный отрезок, то часть этого эволюционного отрезка попадает в область существования решения II, которое, как выше отмечалось, состоит из волн, движущихся с различными скоростями. Это означает, что ударные волны, соответствующие точкам эволюционных отрезков ударной адиабаты, примыкающих к неэволюционным отрезкам рассматриваемого типа, могут быть заменены системой волн с теми же значениями параметров перед системой волн и за ней. В этих случаях уравнения, выражающие законы сохранения, допускают

распад указанных выше эволюционных разрывов на систему волн (которая может включать в себя другие эволюционные разрывы).

Определение условий, при которых подобный распад эволюционной ударной волны может произойти фактически, должно служить предметом отдельного исследования в конкретных случаях. Этот вопрос здесь не рассматривается.

Упомянем, что при изучении квазипоперечных волн в анизотропной упругой среде были обнаружены такие эволюционные разрывы, которые могут распадаться на систему волн (Куликовский, Свешникова [30], [31]). Однако, как показали дальнейшие исследования (Чугайнова [48], Куликовский, Чугайнова [34]), основанные на численном решении уравнений упругости с учетом вязких напряжений, для того чтобы такой распад произошел, необходимы сильные возмущения (сильные приходящие волны или изменение фона).

### § 13. Уравнения законов сохранения в форме Годунова. Энтропия

Гиперболические системы уравнений, выражающие законы сохранения (§ 5), которые описывают поведение сплошных сред, обладают важным свойством. А именно, в качестве формального следствия правильно записанных уравнений сплошной среды можно получить еще одно дивергентное уравнение, которое в большинстве моделей сплошных сред выражает сохранение энтропии в случае непрерывных процессов. В других моделях оно может выражать сохранение механической энергии, как например, в случае изучения волн по теории мелкой воды. Естественно, это уравнение не представляет еще одного закона сохранения, поскольку соответствующее интегральное равенство может не выполняться на разрывах.

Как показано С. К. Годуновым (Годунов [11], [13]), это свойство позволяет записать исходные уравнения в изящной форме, в которой число функций, характеризующих систему уравнений, сокращается и становится равным числу независимых переменных. Кроме того, явное введение энтропии (так будем называть сохраняющуюся в непрерывных процессах величину) позволит изучить изменение ее плотности и производство энтропии на разрыве.

Итак, предполагаем, что в результате домножения уравнений исходной системы (5.2)

$$\frac{\partial f_i(u_k)}{\partial t} + \frac{\partial g_i(u_k)}{\partial x} = 0, \quad i, k = 1, 2, \dots, n, \quad (5.2)$$

на некоторые множители  $q_i(u_k)$  и суммирования по  $i$  получается еще одно уравнение вида

$$\frac{\partial f(u_k)}{\partial t} + \frac{\partial g(u_k)}{\partial x} = 0. \quad (13.1)$$

Мы ограничимся здесь, как и ранее, случаем одной пространственной переменной  $x$ . Возможность получения уравнения (13.1) означает, что

$$df = q_i df_i, \quad dg = q_i dg_i.$$

Рассмотрим новые функции  $F$  и  $G$

$$F = f - q_i f_i, \quad G = g - q_i g_i.$$

С помощью предыдущих равенств, рассматривая  $q_i$  как новые неизвестные функции (вместо  $u_i$ ), получим

$$dF = -f_i dq_i, \quad dG = -g_i dq_i \quad \text{или} \quad f_i = -\frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad g_i = -\frac{\partial G}{\partial q_i}.$$

Тогда

$$f = F - q_i \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad g = G - q_i \frac{\partial G}{\partial q_i}.$$

Приведенные здесь преобразования лишь знаками отличаются от обычных преобразований Лежандра.

Таким образом, система уравнений (5.2) и дополнительное дивергентное уравнение (13.1) примут вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (13.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( F - q_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( G - q_i \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) = 0. \quad (13.3)$$

Две функции  $F(q_i)$  и  $G(q_i)$  полностью характеризуют рассматриваемую систему уравнений. В случае большего числа пространственных переменных вместо одной функции  $G$  уравнения будут содержать несколько функций  $G_\alpha$  – по числу пространственных переменных. Уравнения (13.2) представляют запись системы (5.2) в форме Годунова.

При рассмотрении уравнений механики сплошных сред в качестве функции  $f$  удобно выбирать *плотность энтропии*  $s$ , а в качестве  $g$  – *поток энтропии*

$$f = F - q_i \frac{\partial F}{\partial q_i} = s.$$

При таком толковании  $f$  функция  $F(q_k)$  для важнейших моделей сплошной среды оказывается *выпуклой функцией* своих аргументов (Годунов [9], [13]). Под выпуклостью понимается выполнение неравенства

$$F(q_k^{(2)}) - F(q_k^{(1)}) - F_i(q_k^{(1)})(q_i^{(2)} - q_i^{(1)}) > 0, \quad F_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad (13.4)$$

где  $q_i^{(1)}$  и  $q_i^{(2)}$  – две любые не совпадающие точки пространства. Очевидно, условие (13.4) может быть заменено требованием положительной определенности матрицы вторых производных  $\|F_{ij}\|$  во всех точках, если эта матрица невырождена. Здесь обозначено

$$F_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j}.$$

Выпуклость функции  $F(q_i)$  будет предполагаться всюду далее.

Выпуклость  $F(q_i)$  связана с предположением об устойчивости однородного состояния среды в случае, если допускаются произвольные диссипативные механизмы (что это значит будет вскоре сказано). Пусть однородное состояние среды характеризуется величинами  $f_i(x, 0) = f_i^0 = \text{const}$ . Возмутим среду таким образом, что

$$\int \delta f_i dV = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad \text{где} \quad \delta f_i = f_i(x, t) - f_i^0,$$

$dV$  – элемент объема. Будет предполагаться, что процессы, которые затем происходят в среде, не противоречат законам сохранения, а система изолирована, откуда следует, что среднее значение  $\delta f_i$  будет равно нулю всегда:  $\int \delta f_i dV = 0$ . Рассмотрим случай периодических возмущений или возмущений в конечном объеме среды, когда  $\int \delta f_i dV$  берется по ограниченному объему. Предположение о произвольности диссипативных процессов заключается в том, что энтропия возрастает и в конце концов (при  $t \rightarrow \infty$ ) среда придет в состояние с максимальной энтропией, допускаемой связями  $\int \delta f_i dV = 0$ . Предположение об устойчивости заключается

в том, что состояние с наибольшей энтропией является однородным и, очевидно, представляется равенствами  $f_i = f_i^0$ . Например, если рассматриваются произвольные достаточно малые возмущения газа, то предполагается, что при учете вязкости и теплопроводности газ с течением времени стремится к однородному состоянию с постоянной скоростью. Сделанное предположение означает, что однородное состояние предполагается асимптотически устойчивым при заданных массе, импульсе и энергии рассматриваемого объема и действии всех возможных диссипативных механизмов.

Если возмущения малы, то линейную часть  $\delta s$  можно представить как линейную комбинацию  $\delta f_i$  с постоянными коэффициентами. Воспользовавшись равенством нулю средних значений  $\delta f_i$ , получим, что

$$\int \delta s dV = \int \delta^2 s dV,$$

где  $\delta^2 s$  – вторая вариация энтропии

$$\delta^2 s = \frac{\partial^2 f}{\partial f_i \partial f_j} \delta f_i \delta f_j.$$

В силу того, что согласно основному предположению однородное состояние среды обладает энтропией большей, чем любое другое с теми же средними значениями  $f_i$ , получим, что матрица  $\|\partial^2 f / \partial f_i \partial f_j\|$  должна быть отрицательно определена, а функция  $(-f)$  должна быть выпуклой функцией  $f_i$ . Поскольку свойство выпуклости сохраняется при преобразовании Лежандра,  $F$  также является выпуклой функцией от  $q_i$ .

Рассмотрим изменение энтропии на разрывах. Запишем условия на разрыве (6.1) для рассматриваемой системы уравнений в новых переменных

$$\left[ \frac{\partial G}{\partial q_i} \right] - W \left[ \frac{\partial F}{\partial q_i} \right] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (13.5)$$

Уравнение (13.3) не имеет соответствующего интегрального закона сохранения, поэтому соотношение в виде равенства этому уравнению поставить в соответствие нельзя. Можно предположить, однако, что может быть выписано некоторое неравенство, соответствующее на разрыве дифференциальному уравнению (13.3)

Если в качестве  $f$  выбрана энтропия, то выражение

$$P(q_i, W) = Wf - g = W(F - F_i q_i) - G + G_i q_i,$$

$$F_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad G_i = \frac{\partial G}{\partial q_i}.$$

представляет собой поток энтропии в отрицательном направлении оси  $x$  через поверхность, движущуюся со скоростью  $W$ . Изменение этой величины на фронте разрыва, движущегося со скоростью  $W$ , представляет собой *производство энтропии на фронте разрыва*, которое согласно, второму закону термодинамики, должно подчиняться требованию

$$[P] \geq 0.$$

Условие  $[P] \geq 0$  приводит к тому, что из множества разрывов, задаваемых ударной адиабатой, следует исключить как нереальные те разрывы, для которых указанное условие нарушено. Если  $[P] > 0$ , то это указывает на *термодинамически необратимый характер явлений внутри разрывов*.

В § 6 были указаны разрывы, представляющие предельный случай волн Римана с недеформирующимся профилем, в записи которых сама произвольная функция, задающая форму волны, выбирается разрывной. Так как изменение величин в таких разрывах совпадает с изменением их в непрерывных волнах, то производство энтропии в этих разрывах отсутствует и они *термодинамически обратимы*. К этому типу, наряду с другими, относятся разрывы, называемые *тангенциальными и контактными*, через поверхность которых отсутствует поток массы. Все эволюционные разрывы, не представляющие собой предельной формы неопрокидывающейся волны Римана, будем называть *ударными волнами*.

Найдем изменение производства энтропии  $[P]$  при малом смещении точки  $q_i$  вдоль ударной адиабаты

$$d[P] = (G_{ij} - W F_{ij}) q_i dq_j + (F - F_i q_i - F^- + F_i^- q_i^-) dW,$$

$$F_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j}, \quad G_{ij} = \frac{\partial^2 G}{\partial q_i \partial q_j}.$$

Ударная адиабата определяется уравнениями (13.5), поэтому  $dq_i$  и  $dW$  вдоль нее связаны соотношениями, получающимися из

(13.5) дифференцированием вдоль ударной адиабаты при условии  $q_i^- = \text{const}$

$$(G_{ij} - W F_{ij}) dq_j = (F_i - F_i^-) dW.$$

(Это уравнение отличается от уравнения (9.2) выбором независимых переменных). Используя эти равенства, находим

$$d[P] = (F - F^- - F_i^- (q_i - q_i^-)) dW. \quad (13.6)$$

Таким образом, с учетом условия (13.4) выпуклости функции  $F(q_k)$  из равенства (13.6) следует, что знак  $d[P]$  совпадает со знаком  $dW$  и они обращаются в нуль одновременно. Это значит, что максимумы и минимумы функций  $[P]$  и  $W$  совпадают на ударной адиабате и эти точки, как было показано в § 9, являются точками Жуге, где  $W = c^+$ .

Если можно указать такую систему отсчета, в которой тождественно равен нулю поток энтропии  $g = G - (\partial G / \partial q_i) q_i \equiv 0$ , то в ней  $P = Wf$  и условие  $[P] \geq 0$  превращается в *условие неубывания энтропии*  $[s] = [f] \geq 0$ . Для упругой среды или газа такой системой, где  $g \equiv 0$ , служит лагранжева система координат, связанная со средой.

Выясним, как изменяется плотность энтропии вдоль ударной адиабаты, предполагая при этом, что введена упомянутая выше система координат, в которой  $g \equiv 0$ . В этой системе

$$G - G_i q_i \equiv 0, \quad \frac{\partial}{\partial q_j} (G_i q_i - G) = G_{ij} q_i = 0.$$

Используя эти равенства и выражение для  $dq_i$  вдоль ударной адиабаты, получаем

$$df = d(F - F_i q_i) = -F_{ij} q_i dq_j = \frac{1}{W} [F_i] q_i dW.$$

Отсюда видно, что, если  $[F_i] q_i \neq 0$  в точке, где  $W$  достигает экстремума (точка Жуге), то в этой точке имеет экстремум также энтропия. В газовой динамике при сложных уравнениях состояния газа совпадение на ударной адиабате точек экстремума энтропии и скорости разрыва было известно (Ландау и Лифшиц [38]). Для квазипоперечных упругих ударных волн ненулевой интенсивности приращение энтропии совпадает по знаку с приращением скорости на ударной адиабате (Куликовский [25], Куликовский, Свешникова [32]).

Оценим величину производства энтропии, а также приращение энтропии для слабых ударных волн с амплитудой скачка  $[q_i] \sim \sigma$ , считая  $g \equiv 0$ . При малой интенсивности изменение  $F$  в ударной волне с точностью до  $\sigma^2$  можно представить формулой

$$F - F^- = F_i^- [q_i] + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j} \right)^- [q_i][q_j].$$

В начальной точке  $W = c^-$ , так что, используя равенство (13.6), а также равенство  $P = Wf$ , справедливое при  $g \equiv 0$ , получим

$$[P] = \frac{1}{2} \int_{c^-}^W \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j} [q_i][q_j] dW$$

Подынтегральное выражение положительно и не превосходит по порядку величины  $\sigma^2$ , а разность  $W - c^-$ , определяющая область интегрирования, как показано в § 8, не превосходит по порядку величины  $\sigma$ . Как следует из последнего выражения для  $[P]$ , во-первых, производство энтропии, а следовательно и изменение энтропии в слабых ударных волнах, не превосходят по порядку величины  $\sigma^3$ . Во-вторых, эти величины положительны только в ударных волнах, движущихся быстрее, чем  $c^-$ . Первое из этих утверждений независимо получается из доказанной в § 8 близости ударной адиабаты и интегральной кривой соответствующей волны Римана, а второе показывает, что именно эволюционные малые разрывы удовлетворяют требованию неубывания энтропии.

## § 14. Учет диссипации. Малые возмущения. Уравнение Бюргера

Условия эволюционности и неубывания энтропии, рассмотренные в § 7, § 13, имели целью отбросить некоторые из разрывов, удовлетворяющих законам сохранения, как нереальные.

В качестве еще одного принципа отбора разрывов используется требование существования структуры разрывов, о чем пойдет речь ниже.

При теоретическом подходе к изучению разрывов вводят в рассмотрение более сложные детализированные модели среды, учитывающие физические механизмы, обеспечивающие непрерывность изменения величин. Для газа, например, такими усложненными по сравнению с уравнениями газовой динамики моделями

могут служить уравнения теплопроводного вязкого газа Навье–Стокса или уравнения Больцмана. Гиперболические уравнения возникают как предельный случай, когда внешний масштаб задачи  $L$  становится много больше внутреннего масштаба, определяющего ширину областей с быстрым изменением решения.

Усложненные, уравнения обычно отличаются от предельной гиперболической системы наличием дополнительных членов в тех же уравнениях (в более сложных случаях возникает необходимость введения новых переменных и новых уравнений). Эти дополнительные члены, обеспечивающие непрерывность решений, обычно представляют *диссипативные процессы, связанные с производством энтропии*, а также процессы, связанные с дисперсией волн. Надо отметить, что, если диссипация отсутствует, а имеется только дисперсия, то опрокидывание волн Римана может не приводить к чему-либо, напоминающему образование разрыва, как это выявлено при изучении решений уравнения Кортевега–де Вриза (Карпман [21], Уизем [49]). При обращении к более сложным моделям по сравнению с гиперболическими системами законов сохранения мы будем предполагать всегда наличие диссипативных механизмов.

Приведем здесь некоторую систему уравнений, выражающих законы сохранения и содержащих диссипативные члены. Предположим (Годунов [9], [13]) в соответствии с идеями термодинамики необратимых процессов (де Гроот и Мазур [14]), что необратимость явлений проявляет себя в том, что в уравнениях (5.2), представляющих законы сохранения, к выражениям для потоков  $g_i$  добавляются члены пропорциональные производным от неизвестных функций  $u_i$  по координате, а плотности  $f_i$  не меняются. Это сохраняет дивергентный вид уравнений. Таким образом получим

$$\frac{\partial f_i(u_k)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( g_i(u_k) - \mu_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) = 0, \quad (14.1)$$

или в переменных  $q_i$ , введенных в § 13 и более удобных при изучении диссипативных процессов,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_j(q_k)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( G_j(q_k) - \nu_{jm} \frac{\partial q_m}{\partial x} \right) &= 0, & (14.2) \\ F_j &= \frac{\partial F}{\partial q_j}, & G_j &= \frac{\partial G}{\partial q_j}. \end{aligned}$$

Диссипативные коэффициенты  $\mu_{ij}$  и  $\nu_{jm}$  могут быть функциями  $u_k$  или  $q_k$  соответственно. Матрица коэффициентов  $\|\nu_{jm}\|$  легко может быть пересчитана из матрицы  $\|\mu_{ij}\|$  с помощью преобразования переменных. Очевидно, при  $L \rightarrow \infty$  или  $\nu_{jm} \rightarrow 0$  система (14.2) в пределе переходит в гиперболическую систему (13.2) (а система (14.1) соответственно в (5.2)).

Уравнение для изменения энтропии получается, как и ранее (§ 13), домножением уравнений (14.2) на  $q_j$  и последующим сложением

$$\frac{\partial}{\partial t}(F - q_j F_j) + \frac{\partial}{\partial x} \left( G - q_j G_j + q_j \nu_{jm} \frac{\partial q_m}{\partial x} \right) = \nu_{jm} \frac{\partial q_j}{\partial x} \frac{\partial q_m}{\partial x}. \quad (14.3)$$

Поскольку выражение  $F - q_j F_j$  может быть отождествлено с плотностью энтропии  $s$ , то  $G - q_j G_j + q_j \nu_{jm} \partial q_m / \partial x$  следует принять за поток энтропии. Тогда величина  $\nu_{jm} (\partial q_j / \partial x) (\partial q_m / \partial x)$  представляет *производство энтропии* в единице объема, обозначаемое в термодинамике необратимых процессов как  $d_i s / dt$ . Именно этот член приводит к производству энтропии на разрыве в решении соответствующей гиперболической системы, если разрыв рассматривать как предел непрерывного решения при  $\nu_{jm} \rightarrow 0$ .

Согласно второму закону термодинамики производство энтропии неотрицательно и, следовательно, квадратичная форма его выражающая, также неотрицательно определена, то есть при всевозможных значениях  $\partial q_i / \partial x$

$$\frac{d_i s}{dt} \equiv \nu_{kj} \frac{\partial q_k}{\partial x} \frac{\partial q_j}{\partial x} \geq 0. \quad (14.4)$$

Если матрица  $\|\nu_{jm}\|$  не зависит от аксиальных векторов (например, от магнитного поля), то она симметрична  $\nu_{jm} = \nu_{mj}$  (де Гроот и Мазур [14]).

Отметим, что термодинамика необратимых процессов хорошо описывает процессы, близкие к равновесным, а для сильно неравновесных процессов применяются более сложные модели.

Рассмотрим влияние дополнительных диссипативных членов на поведение малых возмущений. Произведем линеаризацию исходных уравнений, записанных в переменных  $u_k$  в виде (14.1) или в переменных  $q_k$  в виде (14.2), на однородном фоне  $u_k^0 = \text{const}$  или  $q_k^0 = \text{const}$  соответственно. Покажем, что возмущения затухают,

если их наличие приводит к отличному от нуля производству энтропии. При этом удобнее пользоваться переменными  $q_k$ . Для малых возмущений введем функции

$$p_j = q_j - q_j^0$$

для них получим линейную систему с постоянными коэффициентами

$$F_{mj} \frac{\partial p_j}{\partial t} + G_{mj} \frac{\partial p_j}{\partial x} = \nu_{mj} \frac{\partial^2 p_j}{\partial x^2}, \quad k, j = 1, 2, \dots, n. \quad (14.5)$$

Рассмотрим два вида возмущений: (а) периодические по  $x$  и (б) достаточно быстро убывающие при  $x \rightarrow \pm\infty$ . Домножая уравнения (14.5) на  $p_m$  и, после суммирования по  $m$ , интегрируя по  $x$  в случае (а) по периоду, а в случае (б) от  $-\infty$  до  $+\infty$ , получим

$$\frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} F_{mj} p_m p_j dx = - \int \nu_{mj} \frac{\partial p_m}{\partial x} \frac{\partial p_j}{\partial x} dx. \quad (14.6)$$

Было использовано интегрирование по частям и обращение в нуль внеинтегральных членов, которое имеет место в обоих рассматриваемых случаях. Так как  $\|F_{mj}\|$  принимается положительно определенной матрицей (см. § 13), то равенство (14.6) может служить для оценки решения, а величина  $F_{mj} p_m p_j$  может быть принята за плотность энергии возмущений. Уравнение (14.6) является аналогом *теоремы о кинетической энергии в механике*. Согласно соотношениям (14.4) и (14.6) *энергия возмущений не может расти*.

Если матрица  $\|\nu_{mj}\|$  достаточно богата элементами, отличными от нуля, то правая часть равенства (14.6) отрицательна и возмущения затухают. Это условие выполнено при положительно определенной матрице  $\|\nu_{mj}\|$ . В частности, можно показать, что применение равенства (14.6) к синусоидальным волнам вида

$$p_j = \operatorname{Re} \left\{ P_j e^{i(kx - \omega t)} \right\}, \quad \operatorname{Im} k = 0$$

(где  $i = \sqrt{-1}$ ,  $k$  – волновое число,  $P_j = a_j + ib_j$  – комплексные постоянные, которые находятся после подстановки предложенной выше формы решения в систему уравнений) приводит к затуханию возмущений, и следовательно, к неравенству  $\operatorname{Im} \omega < 0$ , если

$$\nu_{mj}(a_m a_j + b_m b_j) \neq 0.$$

Затухание синусоидальных возмущений приводит к затуханию произвольных возмущений, которые могут быть представлены интегралом Фурье.

Для выявления влияния диссипативных членов на поведение нелинейных решений рассмотрим приближенно частное решение уравнений (14.1), характеризующееся большим пространственным масштабом  $L$ , которое близко к волне Римана малой амплитуды. Домножив уравнения (14.1) на левый собственный вектор  $l = \{l_k\}$  матрицы  $\|f_{kj} - cg_{kj}\|$ , соответствующий характеристической скорости  $c$ , связанной с изучаемой волной, получим

$$l_k f_{kj} \left( \frac{\partial u_j}{\partial t} + c \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) = l_k \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_{kj} \frac{\partial u_j}{\partial x} \right). \quad (14.7)$$

Если  $f_{kj} = \delta_{kj}$  (где  $\delta_{kj}$  – символы Кронекера), то левая часть этого равенства совпадает с левой частью равенства (2.1), выражающего соотношение на характеристике. Для достаточно длинных волн правая часть равенства (14.7) мала по сравнению с каждым из слагаемых в левой части, поскольку содержит производную более высокого порядка.

В качестве нулевого приближения можно пренебречь правой частью и нелинейными членами в левой части. При этом решение нулевого приближения представляет бегущую волну

$$w = w(x - c^0 t), \quad \text{где } w = l_k^0 f_{kj}^0 (u_j - u_j^0),$$

где величины с индексом “0” соответствуют фону  $u_j = u_j^0$ . Это решение было получено ранее в § 2 для случая, когда  $f_{kj}^0 = \delta_{kj}$ . Величина  $w$  представляет собой один из *инвариантов Римана*. Остальные инварианты Римана будем считать в рассматриваемом нулевом приближении равными нулю.

В следующем, первом приближении будем считать, что  $c$ ,  $l_k$ ,  $f_{kj}$  и сами  $u_k$  выражаются через  $w$ . Тогда левую часть равенства (14.7) можно представить в виде

$$a(w) \left( \frac{\partial w}{\partial t} + c(w) \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad a(w) = l_k f_{kj} \frac{\partial u_j}{\partial w}$$

Для волн малой амплитуды в выражениях для  $a(w)$  и  $c(w)$  можно ограничиться линейным приближением

$$a(w) = a^0 + a^1 w, \quad c(w) = c^0 + c^1 w.$$

Поскольку правая часть в равенстве (14.7) представляет собой малую величину по сравнению с каждым из членов в левой части, то, деля равенство (14.7) на  $a(w)$  и записывая правую часть в главном (линейном) приближении, получим

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (c^0 + c^1 w) \frac{\partial w}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \mu = \frac{1}{a^0} l_k^0 \mu_{kj}^0 \frac{\partial u_j}{\partial w} = \text{const.} \quad (14.8)$$

где  $\mu_{kj}^0$  — значения  $\mu_{kj}$  при  $u_i = u_i^0$ ,  $c^0 = \text{const}$ ,  $c^1 = \text{const}$ .

Очевидно,  $\mu \geq 0$ , так как в противном случае линеаризованное уравнение (14.8) обладало бы растущими периодическими по  $x$  решениями, что запрещено условием неубывания энтропии. В дальнейшем будем считать величину  $\mu$  положительной.

Если ввести новую неизвестную  $c = c^0 + c^1 w$ , то уравнение (14.8) перейдет в известное уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial c}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}. \quad (14.9)$$

При  $\mu = 0$  оно переходит в исследованное в § 4 уравнение Хопфа, описывающее волну Римана.

Общее решение уравнения Бюргерса отыскивается в явном виде с помощью квадратур, что позволяет выписать явное решение задачи Коши с произвольными начальными условиями (Рождественский и Яненко [44], Уизем [49]). Исследование показывает, что решение этого уравнения остается непрерывным и гладким при всех значениях  $t$ . Если рассматривать решение задачи с фиксированными начальными условиями как функцию коэффициента  $\mu$ , то можно показать, что при малых значениях  $\mu$  существуют решения близкие к волнам Римана. Их опрокидывание заканчивается образованием узких слоев, внутри которых диссипативные члены сравниваются по порядку величины с нелинейными. В пределе при  $\mu \rightarrow 0$  они превращаются в разрывы, соединяющие области медленного изменения  $w(x, t)$ .

## § 15. Решения с разрывами как предел непрерывных решений уравнений усложненной модели. Структура ударных волн

В этом параграфе с помощью уравнений, содержащих диссипативные члены, введенные в § 14, изучаются решения представляющие бегущие волны в форме сглаженной ступеньки. Поскольку при  $x \rightarrow \pm\infty$ , то есть при удалении от области, где происходит быстрое изменение функций  $u_i$ , производные стремятся к нулю, величины  $u_i$  должны удовлетворять законам сохранения, соответствующим гиперболической части уравнений (то есть законам сохранения, не учитывающим диссипативных членов). Такая постановка называется задачей о структуре ударной волны.

Подчеркнем, что при изучении структуры разрывов в рассмотрение вводится, более сложная модель среды, использование которой приводит к тем или иным выводам, касающимся разрывов. При этом важно, чтобы эта модель соответствовала физике процессов, происходящих в среде. Исходной системой уравнений следует считать эту более полную модель, а гиперболическая система может рассматриваться как ее предельная форма. Важно при этом отметить, что одна и та же *гиперболическая система уравнений может соответствовать различным исходным полным уравнениям*, что отражается на выводах, касающихся структуры разрывов.

Рассмотрим в постановке § 14 решение уравнений (14.9) в виде бегущей волны и будем разыскивать решение, которое при  $x \rightarrow \pm\infty$  стремится к различным предельным значениям.

Таким образом, получим следующую задачу: найти решение уравнения (14.9) вида бегущей волны, то есть решение, зависящее от  $x - Wt$ , которое при  $x \rightarrow \pm\infty$  стремилось бы к однородным не зависящим от времени состояниям  $c^-$ ,  $c^+$ . Это решение называется решением задачи о стационарной структуре разрыва. Оно легко находится и имеет вид (Рождественский и Яненко [44], Уизем [49])

$$c = c^- + (c^+ - c^-) \frac{1}{1 + \exp(\zeta)}, \quad (15.1)$$

$$\zeta = \frac{c^+ - c^-}{2\mu} (x - Wt), \quad W = \frac{c^+ + c^-}{2}, \quad c^+ > c^-.$$

Здесь  $c^-$  и  $c^+$  – значения  $c$  на  $\pm\infty$ . Разность  $c^+ - c^-$  можно назвать амплитудой волны. Профиль функции  $c(x)$  при  $t = \text{const}$  качественно представлен на рис. 15.1.

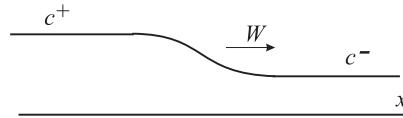


Рис. 15.1.

Характерная ширина переходной зоны по переменной  $\zeta$  всегда одна и та же, а в реальном масштабе по переменной  $x$ , как это видно из (15.1), она обратно пропорциональна амплитуде волны  $c^+ - c^-$ , что оправдывает при малых амплитудах сделанные при выводе уравнения (14.9) предположения о малости диссипативных членов в исходных уравнениях.

При  $\mu \rightarrow 0$ ,  $c^+ - c^- = \text{const}$  ширина переходного слоя убывает как  $1/\mu$  и решение в пределе обращается в разрывное, причем при таком предельном переходе меняется только масштаб  $x$  при сохранении вида решения. Скорость движения бегущей волны  $W$  (см. равенство (15.1)) совпадает со скоростью, полученной в § 8 для слабых ударных волн.

Заметим, что решение (15.1) существует только при условии  $c^+ > c^-$  и может рассматриваться в связи с этим как результат незавершенного опрокидывания волны Римана, остановленного диссипативным механизмом. Такое решение – одно из представляемых общим решением уравнения (14.9), упомянутым в § 14.

Полученное решение задачи о структуре ударной волны (15.1) часто называют стационарным, поскольку в системе координат, движущейся со скоростью  $W$ , оно не зависит от времени. Оно также является одномерным, зависящим от одной пространственной переменной. Поскольку решение (15.1) всегда оказывается результатом эволюции решения задачи Коши при  $\mu \rightarrow 0$ , то можно быть уверенным в том, что не существует периодически или стохастически зависящего от времени решения задачи о структуре разрыва. В более сложных случаях предположение о стационарности и одномерности решения задачи о структуре часто делается как наиболее простое.

Поскольку по решению (15.1) можно достроить решение исходной системы (14.1), то таким образом *доказано существова-*

ние структуры ударных волн малой амплитуды, для которых выполнены условия эволюционности. Действительно, так как, согласно предположению, характеристическая скорость  $c$ , для которой строится решение (15.1), является однократной, а амплитуда этой волны мала, то это означает, что характеристики остальных семейств пересекают этот разрыв, в то время как характеристики, соответствующие этому разрыву, образуют “елочку” (см. § 7).

Примыкающий к начальной точке эволюционный отрезок ударной адиабаты состоит из точек, каждая из которых соответствует разрыву, имеющему структуру, описываемую с помощью уравнений (14.1). Отметим, что существование решения (15.1) не связано с наличием у исходной системы законов сохранения.

Задача о стационарной структуре ударной волны, подобная рассмотренной выше, может быть поставлена и непосредственно сразу для полной системы уравнений (14.1) или для другой системы с диссипацией (без каких-либо дополнительных предположений о малости изменения величин в волне, сделанных при выводе уравнения (14.9)). При этом считается, что решение системы уравнений представляет собой бегущую волну  $u_i = u_i(\xi)$ ,  $\xi = -x + Wt$ , такую, что искомые функции стремятся к постоянным различным наборам значений  $u_i^+$  и  $u_i^-$  при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ .

Если полная система уравнений имеет вид (14.2), то для  $q_i(x)$  получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{d\xi} \nu_{ij} \frac{dq_j}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left( W \frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial G}{\partial q_i} \right)$$

каждое из которых можно один раз проинтегрировать по  $\xi$

$$\nu_{ij} \frac{dq_j}{d\xi} = P_i, \quad (15.2)$$

$$P_i = \frac{\partial P}{\partial q_i}, \quad P = WF - G - C_i q_i, \quad C_i = \text{const.}$$

Особые точки этой системы дифференциальных уравнений определяются системой уравнений

$$\frac{\partial P}{\partial q_i} = 0. \quad (15.3)$$

Постоянные интегрирования  $C_i$  в (15.2) при выбранном  $W$  вычисляются по значениям  $G_i$  и  $F_i$  в состоянии  $q_k^-$ , соответствующем

$\xi_k = -\infty$ , принятом за начальное.

$$C_i = G_i(q_k^-) - WF_i(q_k^-).$$

Вычитая эти равенства из выражений (15.3), видим, что для любой другой особой точки, отличающейся от начальной, ее координаты  $q_i = q_i^+$  должны удовлетворять соотношениям

$$[G_i] - W[F_i] = 0,$$

совпадающим с условиями на разрыве. Заметим, что в предыдущем рассуждении в качестве начальной и конечной особых точек может быть выбрана любая пара особых точек, соответствующая принятому значению  $W$ .

Получение решения задачи о стационарной структуре разрыва сводится к нахождению интегральной кривой системы обыкновенных дифференциальных уравнений (15.2) для функций  $q_i(\xi)$ , соединяющей в пространстве  $q_i$  две особые точки: точку с координатами  $q_i^-$ , соответствующую  $\xi = -\infty$ , и точку с координатами  $q_i^+$ , соответствующую  $\xi = \infty$ . Если такая интегральная кривая существует, то говорят, что у соответствующего скачка из состояния  $q_i^-$  в состояние  $q_i^+$  имеется *стационарная структура* (стационарное решение в системе, движущейся со скоростью разрыва  $W$ ). При этом вполне определенная точка  $u_i^-$  соответствует состоянию перед разрывом и соответственно точка  $u_i^+$  – за разрывом.

Для уравнения (14.8) доказано существование решений, представляющих структуру эволюционных ударных волн, то есть существование соответствующей интегральной кривой системы (15.2), если изменение величин в волне невелико.

Приведем здесь одно из доказательств, основанное на факте положительности производства энтропии. Изложим идею доказательства (Годунов [9]) на примере случая  $n = 3$  (для  $n > 3$  см. (Куликовский [23])). Существенным обстоятельством является существование функции  $P(q_k)$ , которая растет с ростом  $\xi$  вдоль интегральных кривых уравнений (15.2). Действительно,

$$\frac{dP}{d\xi} = P_i \frac{dq_i}{d\xi} = \nu_{ij} \frac{dq_i}{d\xi} \frac{dq_j}{d\xi} \geq 0, \quad \left( P_i = \frac{\partial P}{\partial q_i} \right).$$

Последнее выражение представляет производство энтропии, которое согласно (14.4) неотрицательно.

Будем предполагать, что матрица  $\nu_{ij}$  положительно определена, так что равенство имеет место только в особых точках системы (15.2). Особые точки совпадают со стационарными точками функции  $P(q_k)$ , в которых

$$P_i(q_k) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Тип стационарной точки функции  $P(q_k)$  определяется знаком собственных значений  $\lambda$  матрицы вторых производных этой функции

$$|WF_{ij} - G_{ij} - \lambda\delta_{ij}| = 0 \quad (15.4)$$

Здесь использованы обозначения

$$F_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j}, \quad G_{ij} = \frac{\partial^2 G}{\partial q_i \partial q_j}.$$

В силу выпуклости функции  $F(q_i)$  матрица  $F_{ij}$  положительно определена. Поэтому при достаточно больших значениях  $W$  все значения  $\lambda$  положительны. При уменьшении  $W$  все корни  $\lambda_k$  уравнения (15.4) уменьшаются и некоторые значения  $\lambda$  могут переходить через нуль, меняя знак с плюса на минус. Когда  $\lambda = 0$ , уравнение (15.4) показывает, что  $W$  совпадает с одной из характеристических скоростей. Если все характеристические скорости однократные, то при уменьшении  $W$  каждый переход  $W$  через  $c_i$  сопровождается изменением знака у одного из значений  $\lambda$  с плюса на минус, так что при больших отрицательных значениях  $W$  все  $\lambda$  оказываются отрицательными.

Перейдем к изучению структуры разрывов в случае трех уравнений ( $n = 3$ ). Рассмотрим поверхность  $P(q_i) = C$ ,  $C = \text{const}$  и интегральные кривые в окрестности особой точки. Разыскивая собственные числа  $\lambda$  и собственные векторы  $q_j^*$  системы (15.2) в окрестности особой точки, получим

$$(P_{ij} - \lambda\nu_{ij})q_j^* = 0.$$

Это система трех однородных алгебраических уравнений. Для существования нетривиального решения величина  $\lambda$  должна удовлетворять уравнению третьей степени, выражающему равенство нулю определителя этой системы

$$|P_{ij} - \lambda\nu_{ij}| = 0.$$

Перечислим возможные варианты значений корней последнего уравнения. Один корень всегда действителен. Если имеется три действительных положительных корня или один положительный корень и два комплексных с положительной действительной частью, то вся окрестность особой точки заполнена интегральными кривыми, вышедшими из этой точки. Соответственно поверхность  $P(q_i) = C$  топологически эквивалентна сфере. Скорость разрыва  $W$  больше всех трех характеристических скоростей, вычисленных в особой точке. Будем говорить, что это особая точка типа  $A_1$ .

Если все три корня действительны и один из корней отрицателен, а два положительны или один корень действителен и отрицателен, а два комплексны и их действительная часть положительна, то существуют две интегральные кривые, входящие в особую точку по собственному направлению, и двумерная поверхность, состоящая из интегральных кривых, выходящих из этой точки. Поверхность  $P(q_i) = C$  при  $C$ , меньших значения  $P$  в особой точке, представляет однополостный гиперboloид, а при  $C$ , больших значения  $P$  в особой точке, представляет двуполостный гиперboloид. Скорость разрыва  $W$  меньше одной из характеристических скоростей, но больше двух остальных характеристических скоростей в особой точке. Особую точку такого типа назовем  $A_2$ .

Если среди трех действительных корней  $\lambda_i$  два отрицательных и один положительный или комплексные корни имеют отрицательную действительную часть, а действительный корень положителен, то имеется двумерная поверхность, состоящая из интегральных кривых, входящих в особую точку, и две интегральные кривые, выходящие из особой точки по собственному направлению в противоположные стороны. Поверхность  $P(q_i) = C$  при  $C$ , меньших значения  $P$  в особой точке, представляется двуполостным гиперboloидом, а при  $C$ , больших значения  $P$  в особой точке, представляется однополостным гиперboloидом. Скорость разрыва  $W$  меньше двух характеристических скоростей, но больше третьей в особой точке. Такого типа точку будем называть  $A_3$ .

И наконец, если имеется три действительных отрицательных корня  $\lambda_i$  или один действительный отрицательный корень и два комплексных корня с отрицательной действительной частью, то вся окрестность особой точки заполнена интегральными кривыми, входящими в нее. Поверхность  $P(q_i) = C$  существует при  $C$ , меньших значения  $P$  в особой точке, и топологически эквивалент-

на сфере. С ростом  $C$  она сжимается к особой точке и исчезает. Скорость разрыва  $W$  больше всех характеристических скоростей в особой точке. Точки такого типа будем называть  $A_4$ .

Эволюционными являются разрывы  $A_1 \rightarrow A_2$ ,  $A_2 \rightarrow A_3$ ,  $A_3 \rightarrow A_4$ . Рассмотрим структуру этих разрывов. Будем рассматривать случаи, когда точки  $A_m$  и  $A_{m+1}$  ( $m = 1, 2, 3$ ) достаточно близки, так что влияние остальных точек не сказывается на качественной картине кривых в области точек  $A_1$  и  $A_2$ .

Поскольку  $P$  меняется вдоль интегральных кривых монотонно, эту величину можно выбрать вместо  $\xi$  в качестве параметра на интегральных кривых. Концы интегральных кривых, соответствующих значениям  $P \leq C$ , лежат на поверхности  $P(q_i) = C$ . Далее будем увеличивать значение  $C$  и следить за поверхностью  $P(q_i) = C$  и за концами интегральных кривых, лежащих на этой поверхности.

Рассмотрим область, содержащую точки  $A_1$  и  $A_2$ . При  $C$  слегка превосходящем  $P(q_k)$  в точке  $A_1$ , поверхность  $P(q_i) = C$  топологически эквивалентна сфере и точка  $A_1$  лежит внутри нее. С ростом  $C$  эта поверхность, состоящая из концов интегральных кривых, раздувается и до тех пор, пока не встретит особенностей поля интегральных кривых, остается непрерывной. Согласно предположению, ближайшей особенностью является точка  $A_2$ , на которую натывается поверхность  $P(q_i) = C$ , когда  $C$  достигает значения, равного значению  $P$  в точке  $A_2$ . Согласно предыдущему, существует одно собственное направление, по которому интегральная кривая входит в обобщенное седло  $A_2$  со стороны точки  $A_1$ . Эта интегральная кривая соединяет точки  $A_1$  и  $A_2$  и представляет структуру “быстрой” ударной волны  $A_1 \rightarrow A_2$ .

Рассмотрим теперь структуру “промежуточной” ударной волны  $A_2 \rightarrow A_3$ . В этом случае поведение поверхности  $P(q_i) = C$  при увеличении  $C$  и переходе значения  $C$  через  $P(A_2)$  сначала напоминает поведение оболочки воздушного шарика, которую продавливают внутрь с противоположных сторон так, что происходит соприкосновение различных элементов поверхности в точке  $A_2$ , а при дальнейшем увеличении  $C$  образуется поверхность типа бублика (тора). Когда  $C$  близко к значению  $P$  в точке  $A_2$ , согласно сказанному выше, из точки  $A_2$  выходит множество интегральных кривых, образующих двумерную поверхность. Пересечение этой поверхности с поверхностью бублика образует замкнутую кривую, охватывающую дырку бублика. При росте  $C$

эта кривая, состоящая из концов интегральных кривых, не может разорваться, пока не наткнется на особенность поля интегральных кривых. При дальнейшем увеличении  $C$  бублик становится тоньше и, наконец, его толщина (поперечное сечение) обращается в нуль в точке  $A_3$ . В момент разрыва бублика кривая, состоящая из концов интегральных кривых, вышедших из точки  $A_2$ , неминуемо должна пройти через точку  $A_3$ , в которой происходит разрыв бублика. Это доказывает существование хотя бы одной интегральной кривой, соединяющей точки  $A_2$  и  $A_3$ , то есть существование структуры промежуточной ударной волны  $A_2 \rightarrow A_3$ .

Существование структуры “медленной” ударной волны  $A_3 \rightarrow A_4$  доказывается так же, как и существование структуры быстрой ударной волны. Следует только вместо роста постоянной  $C$  рассматривать ее убывание от значения  $P(q_k)$  в точке  $A_4$  до значения  $P(q_k)$  в точке  $A_3$ . Таким образом, для всех эволюционных разрывов  $A_k \rightarrow A_{k+1}$  доказано существование структуры.

Рассмотрим изменение энтропии в решении, представляющем структуру. Из уравнения (14.3) получим

$$\frac{d}{d\xi} \left( WF - Wq_i F_i - G + q_i G_i + q_i \nu_{ij} \frac{dq_j}{d\xi} \right) = \nu_{ij} \frac{dq_i}{d\xi} \frac{dq_j}{d\xi}.$$

Проинтегрируем его по  $\xi$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  с учетом того, что  $dq_i/d\xi \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ . При этом разность значений на  $\pm\infty$  левой части полученного таким образом равенства представляет собой величину, названную в §13 производством энтропии на разрыве  $[P]$ :

$$[P] = [W(F - q_i F_i) - G + q_i G_i] = \int_{-\infty}^{+\infty} \nu_{ij} \frac{dq_i}{d\xi} \frac{dq_j}{d\xi} d\xi.$$

Объемная плотность производства энтропии, представленная подынтегральным выражением (ср. с формулой (14.4)), сосредоточена главным образом в области, где  $dq_i/d\xi$  не малы. Эта область сужается при  $\nu_{ij} \rightarrow 0$ , однако, суммарное производство энтропии  $[P]$  при этом не меняется, поскольку определяется значениями функции  $P$  в особых точках. Энтропийное неравенство  $[P] \geq 0$  показывает, какая особая точка из заданной пары особых точек может быть принята за начальное состояние, а какая за конечное состояние в задаче о структуре разрыва, хотя и не гарантирует соединения их интегральной кривой.

## § 16. Дополнительные соотношения на разрыве

В этом параграфе рассматривается структура разрывных решений для еще одного нелинейного уравнения и на основании этого делаются заключения относительно возможности реализации разрывов. Такого типа заключения типичны для многих разделов механики сплошной среды. В частности, они важны в случаях, когда естественным образом возникающие задачи для системы гиперболических уравнений имеют неединственное решение.

Известно, что существуют гиперболические системы уравнений, такие, что построение решений автомодельных задач с использованием непрерывных решений и ударных волн оказывается неоднозначным (Галин [5], Олейник [43]).

При неединственности решений в гиперболической постановке требование существования структуры у используемых разрывов в ряде случаев приводит к отбрасыванию некоторой части ударных волн, в результате чего решение задачи может стать единственным (Галин [6], Олейник [43]). Требование существования структуры выделяет то или иное множество допустимых разрывов. При этом в зависимости от мелкомасштабных процессов, протекающих внутри структуры, множество допустимых разрывов может оказаться различным, и тем самым решение задачи о структуре влияет на решение задачи в целом. Это было продемонстрировано на примерах (Годунов [10], Дьяченко [15]), а Введенская приводит пример гиперболической системы, для которой требование существования структуры разрывов, используемых при построении решения, не приводит к единственности решений (Введенская [4]).

В ряде случаев оказывается необходимым рассмотрение и введение в решения задач неклассических, *особых разрывов*, на которых кроме соотношений, следующих из законов сохранения, должны выполняться также некоторые *дополнительные соотношения*. К особым разрывам относятся хорошо известные фронты горения в газах (Ландау и Лифшиц [38], Зельдович и др. [18]), которые распространяются по горючей смеси так, что относительная скорость газа с обеих сторон от фронта меньше скорости звука. В качестве дополнительного условия на фронте обычно задается скорость фронта по отношению к газу перед фронтом. Эта скорость теоретически определяется как условие существования структуры фронта горения с учетом химической кинетики, теп-

лопроводности и вязкости. Известны и другие задачи, в решениях которых существенную роль играют особые разрывы. В частности, исследованы разрывы, требование существования структуры которых приводит к нескольким дополнительным условиям, как, например, это имеет место, если газ, проходя через разрыв, приобретает или теряет электропроводность в присутствии магнитного поля. Неоднозначность с “гиперболической” точки зрения определено имеет место при построении решений автомодельных задач, связанных с распространением особых разрывов, свойства которых заведомо не определяются только гиперболическими законами сохранения.

Во всех перечисленных случаях проводился выход за рамки гиперболической системы уравнений, причем добавляемые в эти уравнения члены существенно влияли на множество допустимых разрывов и их свойства, и, следовательно, и на решения задач в целом. Поэтому, вообще говоря, оказывается недостаточным знание только вида гиперболических уравнений, а требуется знание полной системы уравнений, которая описывает, как крупномасштабные, так и мелкомасштабные явления.

Однако, при рассмотрении явлений с точки зрения крупного масштаба, часто бывает достаточно меньшего объема дополнительных сведений. Например, как уже упомянуто, в задачах с фронтами горения достаточно знания скорости этих фронтов. Будем называть *гиперболической моделью* гиперболическую систему уравнений для описания непрерывных решений и определение множества разрывов, которые могут использоваться при построении решений. Эти разрывы будем называть *допустимыми*.

Множество допустимых разрывов для одной и той же гиперболической системы уравнений может определяться различным образом, порождая разные гиперболические модели. В идеале множество допустимых разрывов должно совпасть с множеством разрывов, которые могут физически осуществляться. Однако, последнее не всегда заранее известно. Уже упоминалось, что во многих случаях множество допустимых разрывов определяется, как множество разрывов, которым соответствует решение задачи о структуре в рамках некоторой полной системы уравнений. При этом обычно дополнительно считается, что структура одномерна и стационарна, то есть представляется бегущей волной. Такой подход к определению множества допустимых разрывов

будет использоваться ниже. Однако, при определенных условиях структура разрывов не представляется бегущей волной, а в ней происходят внутренние колебания. Внутренние колебания и неоднородность движения внутри структуры ранее были обнаружены в ряде задач механики сплошных сред и, в частности, в теории горения и детонации (Левин и др. [39], Седов, Коробейников, Марков [46]). Внутренние колебания в структуре обнаруживаются и в других задачах. В ряде случаев структура разрывов оказывается стохастической, как это имеет место в гидравлическом прыжке (Уизем [49], Ляпидевский и Тешуков [42]). Поэтому выбор множества допустимых разрывов представляет во многих случаях сложную проблему.

Разумное определение множества допустимых разрывов не всегда должно приводить к единственности решений, получаемых в рамках гиперболической модели. Это известно, например, из упоминавшейся теории горения и детонации в газе. Существуют, кроме того, автомодельные задачи, решения которых не существуют в рамках разумно определяемого множества допустимых разрывов (Бармин, Успенский [3]).

Всюду далее предполагается, что в мелкомасштабных процессах и, в том числе, в структуре разрывов, определенную роль играют диссипативные процессы, которые запрещают образование периодических незатухающих колебаний или близких к ним структур. В случае полного отсутствия диссипации возникают своеобразные явления, которые здесь не будут рассматриваться. С этими проблемами можно ознакомиться в книгах (Бахолдин [1], Захаров и др. [16], Ильичев [19], Карпман [21]).

Как следует из предыдущего параграфа, требованию существования структуры удовлетворяют все достаточно малые эволюционные разрывы и поэтому это требование не накладывает дополнительных ограничений на малые разрывы. Как будет видно из дальнейшего, конечные разрывы (даже эволюционные с неубывающей энтропией) могут не иметь структуры. В качестве условий, обеспечивающих существование структуры, могут возникать неравенства (выделяющие части ударной адиабаты) или равенства. Эти равенства будем называть *дополнительными соотношениями на разрыве*. Будем сначала предполагать, что разрывы, которые могут реально существовать, должны иметь одномерную стационарную структуру в виде бегущей волны (это не очевидное утверждение будет обсуждаться в конце этого параграфа).

фа). Будем употреблять для таких разрывов термин *допустимые* (Гельфанд [7]). Часть ударной адиабаты, соответствующую допустимым разрывам, будем называть *допустимой* частью ударной адиабаты.

Рассмотрим простой пример с одним законом сохранения (Куликовский [26]). Пусть функция  $u(x, t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - m \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \quad (16.1)$$

где  $\mu = \text{const} > 0$ ,  $m = \text{const} \geq 0$ . Отметим, что первое из этих неравенств обеспечивает устойчивость решения  $u = \text{const}$  уравнения (16.1), в то время как второе неравенство взято для определенности, как один из возможных случаев. График функции  $\varphi(u)$  будем предполагать имеющим вид кривой с двумя минимумами, изображенный на рис. 16.1. Начальное состояние перед разрывом  $u^-$  изображено на кривой  $\varphi(u)$  точкой  $A$ .

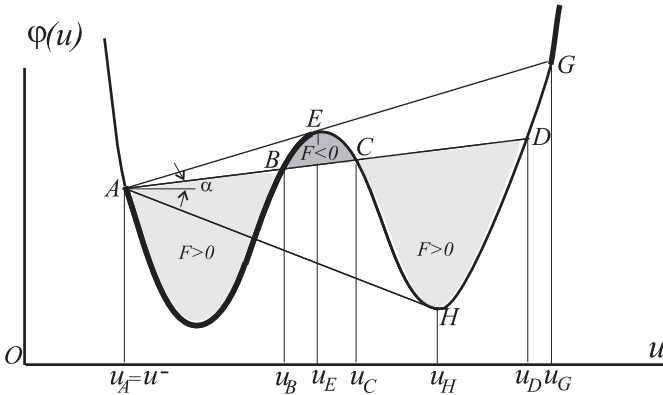


Рис. 16.1.

При  $L \rightarrow \infty$ , где  $L$  – характерный пространственный масштаб, высшие производные убывают быстрее первых производных и уравнение (16.1) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = 0. \quad (16.2)$$

В соответствии с определением § 2 это уравнение следует считать гиперболическим, поскольку оно может быть записано в виде производной от функции  $u(x, t)$  вдоль некоторого направления на плоскости  $x, t$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad c(u) = \frac{d\varphi}{du}.$$

Любое непрерывное решение этого уравнения можно рассматривать как волну Римана, поскольку имеется только одно семейство характеристик. Волны Римана могут опрокидываться, образуя разрывы.

Соотношения на разрывах для уравнения (16.2) будем получать, изучая структуру разрывов с помощью уравнения (16.1). Уравнение (16.2) – первого порядка и имеет характеристическую скорость  $c(u) = d\varphi/du$ . Величина  $c(u)$  определяется наклоном касательной к кривой на графике функции  $\varphi(u)$  на рис. 16.1. Решение уравнения с ростом  $t$  не опрокидывается, если  $c(u)$  убывает с ростом  $t$  при  $x = \text{const}$ , то есть если при этом  $u$  меняется так, что мы движемся по выпуклой части кривой  $\varphi(u)$ , где  $\varphi'' < 0$ , направо или по вогнутой части кривой  $\varphi(u)$  (где  $\varphi'' > 0$ ) налево.

Рассмотрим решение уравнения (16.1) вида  $u = u(\xi)$ ,  $\xi = Wt - x$ , стремящееся при  $\xi \rightarrow \pm\infty$  к постоянным значениям  $u^+$ ,  $u^-$ . Подставляя  $u = u(\xi)$  в уравнение (16.1) и интегрируя по  $\xi$ , получим

$$m \frac{d^2 u}{d\xi^2} + \mu \frac{du}{d\xi} = F(u), \quad F(u) = Wu - \varphi(u) + C. \quad (16.3)$$

Считая известным значение  $u^-$ , получим  $C = \varphi(u^-) - Wu^-$ . Для любого решения, стремящегося при  $\xi \rightarrow +\infty$  к постоянному значению  $u^+$ , получаем также выражение  $C = \varphi(u^+) - Wu^+$ . Сравнение с предыдущим дает

$$[\varphi(u)] = W[u], \quad [u] = u^+ - u^-. \quad (16.4)$$

Это условие совпадает с условием на разрыве для уравнения (16.2), если считать, что это уравнение выражает закон сохранения величины  $u$ .

Таким образом, уравнение (16.2) вместе с соотношением (16.4) обеспечивают выполнение закона сохранения для  $u$  ( $u$  выполняет роль плотности,  $\varphi(u)$  – потока). Уравнению (16.4), кроме

точки  $u^-$ , удовлетворяют абсциссы точек пересечения графика функции  $\varphi(u)$  с секущей (рис. 16.1), проведенной через начальную точку  $(u^-, \varphi(u^-))$  под углом  $\alpha$  к оси  $x$ , где  $\operatorname{tg} \alpha = W$ . Таких точек может быть три (им соответствуют  $u_B, u_C, u_D$  на рис. 16.1), или одна в зависимости от значений  $u^-$  и  $W$ .

Если считать, что равенство (16.4) – единственное соотношение на разрыве решения уравнения (16.2), то скачки  $u^- \rightarrow u_B$  и  $u^- \rightarrow u_D$  эволюционны, а разрыв  $u^- \rightarrow u_C$  неэволюционен, что видно из сравнения в начальной и конечной точках угла наклона секущей, тангенс которого согласно (16.4) равен  $W$ , и угла наклона касательной к линии  $\varphi(u)$ , тангенс которого равен характеристической скорости  $c(u)$ .

Для качественного исследования решения заметим, что  $F(u)$  в соотношении (16.3) представляет при заданном  $u$  разность ординат на рис. 16.1 упомянутой выше секущей и кривой  $\varphi(u)$ . Если не интересоваться масштабом переменной  $\xi$ , то из вида уравнения (16.3) следует, что форма решения, то есть вид функции  $u(\xi)$ , рассматриваемой с точностью до изменения масштаба переменной  $\xi$ , зависит только от комбинации  $m/\mu^2$ , а не от  $m$  и  $\mu$  в отдельности. Действительно, при изменении масштаба происходит изменение коэффициентов  $m$  и  $\mu$  при неизменном отношении  $m/\mu^2$ . В частности, от этой же величины зависит и то значение  $u^+$ , к которому стремится решение при  $\xi \rightarrow \infty$  (то есть выбор в качестве  $u^+$  одного из значений  $u_B, u_C$  или  $u_D$ ).

Если  $m = 0, \mu \neq 0$ , то  $du/d\xi = F(u)/\mu$ . Направление изменения  $u$  определяется знаком  $F(u)$ . Это приводит к тому, что структуру имеет разрыв, заканчивающийся в точке  $u_B$ , ближайшей к  $u^-$ , при условии, что эта точка лежит правее  $u^-$  на рис. 16.1. Множество точек с координатами  $u, \varphi(u)$ , которые могут представлять состояние за разрывом при некотором подходящем значении  $W$ , выделено на рисунке жирными линиями. В рассматриваемом случае все разрывы, имеющие структуру, априорно эволюционны, но не все априорно эволюционные разрывы имеют структуру. Не имеют структуры эволюционные разрывы, состояние за которыми соответствует точкам отрезка  $HG$  кривой  $\varphi(u)$  на рис. 16.1 (точки  $H$  и  $E$  – точки касания кривой  $\varphi(u)$  с прямыми, проведенными из точки  $A$ ). Среди допустимых при  $m = 0$  разрывы с дополнительными условиями отсутствуют. Множество  $u$ , представляющее конечные состояния  $u^+$ , в структуре разрыва, имеет вид двух отрезков оси  $u$ :  $[u^-, u_E]$  и  $[u_C, \infty]$  (Олейник [43],

Калашников [20]) и, следовательно, ограничения, накладываемые на состояния за допустимыми разрывами, могут быть записаны в рассматриваемом случае как неравенства.

Рассмотрим теперь случай, когда  $m > 0$  и  $\mu > 0$ . Тогда уравнение (16.3) можно рассматривать как уравнение движения тела массы  $m$  под действием силы  $F(u)$ , зависящей от координаты  $u$ , при наличии трения, задаваемого выражением  $\mu du/d\xi$ , причем  $\xi$  играет роль времени. При выборе начального состояния, изображенного точкой  $A$  на рис. 16.1, при изменении  $W$  в некотором интервале значений, имеется четыре положения равновесия, где  $F(u) = 0$ . Это начальная точка  $A$  (неустойчивая, поскольку при малом отклонении точки от положения  $A$  знак  $F$  совпадает со знаком  $u - u_A$ ), точка  $B$  (устойчивая), точка  $C$  (неустойчивая) и точка  $D$  (устойчивая). Только одна из этих точек при заданных  $u^-$  и  $W$  представляет, в силу решения уравнения (16.3), состояние за разрывом, или в модельном рассмотрении точку остановки тела массы  $m$ .

Аналогия решений уравнения (16.3) с колебательными движениями тела позволяет, меняя  $W$ , качественно исследовать строение множества  $\{u^+\}$ . На рис. 16.2 жирными отрезками и точками изображено множество точек  $u^+$ , то есть допустимая часть ударной адиабаты для некоторого умеренного значения  $m/\mu^2$ . Допустимая часть ударной адиабаты состоит из интервалов  $AR$ ,  $JK$ ,  $MN$  и  $(Q, \infty)$ , изображенных жирными линиями на рис. 16.2, и отдельных точек  $I$ ,  $L$  и  $P$ . Число отдельных интервалов при заданной функции  $\varphi(u)$  зависит от отношения  $m/\mu^2$  и неограниченно растет вместе с этой величиной).

Для того чтобы убедиться в справедливости сделанного утверждения, заметим, что при малых  $W$  (соответствующих точкам интервала  $AR$  на рис. 16.2) тело массы  $m$  разгоняется на отрезке  $AB$  (рис. 16.1), где  $F > 0$ , двигаясь от  $A$  к  $B$ , и при достаточно больших  $m/\mu^2$ , проскакивает точку равновесия  $B$ , попадая в область, где  $F < 0$  (при меньших  $m/\mu^2$  приближение к точке  $B$  может быть монотонным). Если  $W$  достаточно мало, то тело не может преодолеть отрезка, на котором  $F < 0$ , возвращается к точке  $B$ , лежащей на отрезке  $AR$  графика  $\varphi(u)$ , и, поколебавшись около этой точки, останавливается в ней вследствие наличия трения  $\mu > 0$ .

При увеличении  $W$  уменьшается по модулю сила  $F$  на отрезке  $BC$  (рис. 16.1) и уменьшается длина этого отрезка. Одновременно усиливается разгон тела массы  $m$  на отрезке  $AB$ . Поэтому

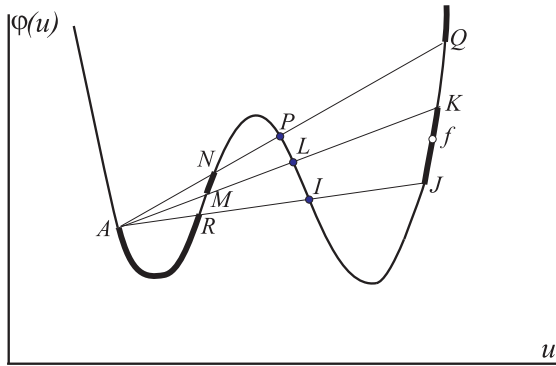


Рис. 16.2.

при достаточно малых  $m/\mu^2$  найдется такое значение  $W = W_I$ , что тело, проскочив устойчивое положение равновесия  $B$ , будет при  $t \rightarrow \infty$  приближаться к неустойчивой точке равновесия типа  $C$  (точка  $I$  на рис. 16.2). Эта точка при  $W = W_I$  соответствует состоянию за допустимым разрывом.

Если еще увеличить  $W$ , то рассматриваемое тело массы  $m$  перейдет через неустойчивую точку типа  $C$  и окажется в области притяжения устойчивой точки равновесия типа  $D$  и, поколебавшись, остановится в ней. Нетрудно понять, что существует интервал значений  $W$ , таких, что состояния за допустимой ударной волной соответствуют таким точкам (интервал  $JK$  на рис. 16.2).

При дальнейшем увеличении  $W$ , если отношение  $m/\mu^2$  достаточно велико, то найдется такое значение  $W = W_L$ , что тело, разогнавшись на отрезке  $AB$ , с такой скоростью проходит через точки  $C$  и  $D$  направо, что при возвратном движении будет при  $t \rightarrow \infty$  неограниченно приближаться к неустойчивой точке равновесия типа  $C$  справа. Эта точка  $L$  принадлежит допустимой части ударной адиабаты и соответствует  $W = W_L$ .

Если еще увеличить  $W$ , то тело перейдет справа налево через неустойчивую точку типа  $C$  и при  $t \rightarrow \infty$  будет стремиться к устойчивой точке равновесия типа  $B$ . Таким решениям соответствуют точки отрезка  $MN$  на рис. 16.2.

Подобные рассуждения можно продолжать и дальше. При еще больших  $W$  решения будут, очевидно, оканчиваться в устойчивых точках типа  $D$  (интервал  $(Q, \infty)$  на рис. 16.2). Число отрезков и

отдельных точек на допустимой части ударной адиабаты определяется тем, какое наибольшее число раз рассматриваемое тело массы  $m$  может при заданном  $m/\mu^2$  перейти через неустойчивую точку типа  $C$  (максимум берется по  $W$ ). Очевидно, что при уменьшении  $\mu$  и  $m = \text{const}$  трение уменьшается и максимально возможное число таких переходов увеличивается.

Приведенные выше рассуждения были основаны на аналогии уравнения (16.3) и уравнения движения материальной точки. Можно было бы провести качественное исследование поля интегральных кривых на плоскости переменных  $u$  и  $p = m du/d\xi$  и зависимости этого поля от  $W$ . В качестве иллюстрации на рис. 16.3 изображено упомянутое поле интегральных кривых, соответствующее случаю, когда конечной точкой является устойчивая точка  $f$  типа  $D$  на рис. 16.2.

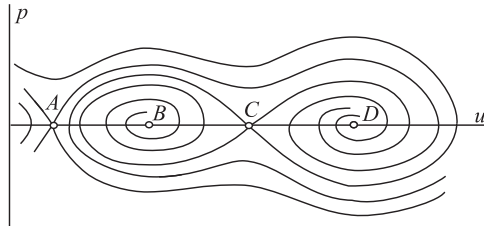


Рис. 16.3.

Отдельные точки  $I$ ,  $L$ ,  $P$  принадлежат допустимой части ударной адиабаты и соответствуют некоторым определенным значениям скорости разрыва  $W$ . Равенство  $W$  одному из этих значений представляет собой дополнительное граничное условие, или *дополнительное соотношение на разрыве*, необходимое для эволюционности соответствующего разрыва и следующее из требования существования его структуры.

Для случая, когда  $m < 0$ , исследование допустимой части ударной адиабаты может быть проведено аналогично, если ввести новую независимую переменную  $\eta = -\xi$  так, чтобы в уравнении (16.3) коэффициенты при первой и второй производной имели одинаковые знаки. При этом уравнение будет по-прежнему описывать движение точки при наличии трения под действием силы  $-F(u)$ .

Если  $m$  и  $\mu$  устремить к нулю, оставляя при этом отношение  $m/\mu^2$  постоянным, то получим, что решение, представляющее структуру, превратится в разрыв, допустимый для заданных  $\varphi(u)$ ,  $m/\mu^2$ ,  $u^-$ . Точно такой же предельный переход будет иметь место, если характерный линейный масштаб  $L$ , входящий в постановку задачи, устремить к бесконечности и одновременно вместо координаты  $x$  ввести новую переменную, равную  $x/L$ .

В этом случае можно ожидать, что решения задач будут состоять из областей, где решение непрерывно и описывается уравнением (16.2), причем области непрерывности решений могут разделяться допустимыми разрывами. В такой постановке существуют автомодельные решения.

Отметим очевидную неединственность решений автомодельных задач. Возьмем в качестве примера задачу о распаде начального разрыва с состоянием при  $x > 0$ , задаваемым точкой  $A$ , и с состоянием при  $x < 0$ , задаваемым какой-нибудь точкой  $f$  интервала  $JK$  (рис. 16.2). Очевидно, существует решение, состоящее из одного разрыва  $A \rightarrow f$ . Кроме того, существует решение, состоящее из скачка  $A \rightarrow L$  и движущегося с меньшей скоростью скачка  $L \rightarrow f$ . Еще одна подобная комбинация разрывов состоит из скачков  $A \rightarrow P$  и  $P \rightarrow f$ . Нетрудно убедиться, что скачки  $L \rightarrow f$  и  $P \rightarrow f$  обладают структурой. Неединственность может иметь место и для других начальных условий, а также и при  $m < 0$ . Это показывает, что одна и та же неавтомодельная задача может иметь различные автомодельные асимптотики при  $t \rightarrow \infty$ .

Обнаруженное при достаточно больших значениях  $m/\mu^2$  сложное строение действующей ударной адиабаты обусловлено наличием нескольких точек на ударной адиабате, соответствующих одному и тому же значению  $W$  и достаточно сложному строению интегральных кривых уравнений структуры разрыва (вызванному в рассматриваемом случае наличием колебаний внутри структуры).

Для выяснения, какое из автомодельных решений реализуется и от каких причин это зависит, было проведено численное исследование проблемы (Куликовский, Чугайнова [35]). Рассчитывались неавтомодельные решения уравнений (16.1) в случаях, когда с ростом времени можно ожидать выхода решения на автомодельную асимптотику.

Было обнаружено, что все особые разрывы устойчивы по отношению к достаточно малым возмущениям, но могут быть неустой-

чивы по отношению к конечным возмущениям. Устойчивость к конечным возмущениям проявляет только разрыв  $A \rightarrow I$ , имеющий наименьшую скорость и самую простую структуру. Если автомодельная задача имеет неединственное решение и если среди этих решений имеется решение, содержащее такой разрыв, то при решении неавтомодельной задачи с течением времени, как правило, формируется именно решение с такой автомодельной асимптотикой. Решения с другими особыми разрывами образуются в качестве асимптотики только в случае специального задания начальных или граничных условий, обеспечивающих формирование структуры этих особых разрывов.

Были обнаружены также разрывы с нестационарной структурой, внутри которой происходят периодические колебания, и были качественно исследованы условия появления решений с такими разрывами. Интересно, что решения с колебательной структурой возникают в тех случаях, когда автомодельное решение, которое можно построить с помощью разрывов со стационарной структурой, должно содержать особые разрывы, отличные от абсолютно устойчивого разрыва  $A \rightarrow I$ . Вероятно причиной возникновения решения с колебательной структурой (такие решения возникают как асимптотика при больших временах при численном построении решений уравнения (16.1)) является неустойчивость структур всех особых разрывов, кроме разрыва  $A \rightarrow I$  по отношению к конечным возмущениям. Устойчивость этих разрывов по отношению к достаточно малым возмущениям приводит к тому, что имеются задачи в гиперболической постановке, имеющие два автомодельных решения, одно из которых содержит разрывы, имеющие стационарные структуры, а другое решение содержит разрыв с колебательной структурой. Какое из них реализуется можно выяснить только рассматривая задачу в полной постановке, учитывая полностью уравнение (16.1) и детальную постановку начальных и граничных условий.

## § 17. Еще о структуре и о числе дополнительных соотношений

Рассмотрим с общей точки зрения вопрос о разрывах, для описания которых требуется выполнение дополнительных граничных условий. Наряду с разрывами, по обе стороны от которых действует одна и та же система гиперболических уравнений, бу-

дуг изучаться также разрывы, по разные стороны от которых действуют разные уравнения. Такие случаи встречаются, например, при изучении *фронтов фазовых переходов*.

Основное содержание этого параграфа заключается в оценке числа дополнительных соотношений на разрывах (Куликовский [24], Куликовский, Свешникова [32], Куликовский, Погорелов, Семенов [29]). Результат можно кратко выразить следующим образом. При некоторых естественных и общих предположениях, сформулированных ниже в пунктах а) и б), доказано, что из требования существования стационарной структуры разрыва следует столько дополнительных соотношений, что полное число условий на разрыве (вместе с основными соотношениями, выражающими законы сохранения, если они имеются) обеспечивает эволюционность этого разрыва.

Идея доказательства заключается в исследовании для обыкновенных уравнений, описывающих структуру, двух множеств решений, стремящихся к постоянным значениям вдали от переходной зоны. Каждое из этих множеств решений зависит не только от скорости разрыва  $W$  и от значений величин  $u_j^\pm$  вдали от переходной зоны, но также и от некоторого количества произвольных постоянных  $C_i^+$  или  $C_i^-$ . Число этих постоянных оценивается в пункте в). Для получения решения, описывающего структуру и пригодного для всех значений  $x$ , решения с обеих сторон от переходной зоны должны быть сопряжены в некоторой точке внутри структуры. Простейший вариант сопряжения – это условия непрерывной склейки решений.

Если из соотношений склейки исключить величины  $C_i^+$  и  $C_i^-$ , которые характеризуют то, как происходит изменение величин внутри структуры, то получившиеся соотношения будут связывать  $W$  и величины  $u_j^\pm$  с обеих сторон от переходной зоны и будут представлять, тем самым, условия на разрыве. Подсчет числа полученных таким образом соотношений, проведенный в пункте г), приводит в случае общего положения к сформулированному выше результату. В пункте г) обсуждается полученный результат и возможные случаи, когда он может оказаться несправедливым (например, когда число основных соотношений на разрыве больше, чем требуется для эволюционности разрыва). В пункте д) обсуждается возможность существования внутри структуры внутренних разрывов.

**а. Уравнения, описывающие структуру разрывов.**

Прежде всего, рассмотрим вопрос об уравнениях, которые должны использоваться для описания структуры разрывов.

Существуют случаи, когда структура разрыва может быть описана той же гиперболической системой уравнений, решения которой терпят разрыв. Так обстоит дело для разрывов решений линейных уравнений или для разрывов, соответствующих волнам Римана, не изменяющим при распространении своей формы. Однако в общем случае для того, чтобы можно было построить решение задачи о структуре разрыва, система уравнений, описывающая структуру, должна отличаться от исходной гиперболической системы уравнений.

Уравнения для описания структуры разрыва, должны отражать физику явлений, происходящих в разрыве. Уравнения для структуры могут быть *различными* для одной и той же гиперболической системы уравнений, разрывы решений которой изучаются, в зависимости от процессов, происходящих внутри структуры.

Будем предполагать, что, если характерные масштабы времени  $T$  и длины  $L$  велики, то уравнения, описывающие структуру, переходят в гиперболическую систему уравнений или соответственно в гиперболические системы уравнений, если эти системы различны по разные стороны от разрыва.

Таким образом, будем считать, что существует и действует всюду некоторая *полная* система уравнений (которая будет использоваться для описания структуры разрыва и которая переходит в соответствующие гиперболические системы вдали от разрыва), которую можно записать в виде системы первого порядка

$$A_{mj} \frac{\partial v_j}{\partial t} + B_{mj} \frac{\partial v_j}{\partial x} + C_m = 0, \quad m, j = 1, 2, \dots, N. \quad (17.1)$$

Коэффициенты  $A_{mj}$ ,  $B_{mj}$ ,  $C_m$  считаются функциями  $v_j$ . Допускаются матрицы  $\|A_{mj}\|$ , ранг которых всюду меньше  $N$ . В частности, система (17.1) может быть параболической. Предполагается, что решения  $v_k$  системы уравнений

$$C_m(v_k) = 0, \quad m, k = 1, 2, \dots, N, \quad (17.2)$$

зависят от  $n$  независимых величин  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , то есть среди уравнений (17.2) имеется  $N - n$  независимых уравнений. Это означает, что систему (17.1) можно записать таким образом, что первые  $n$  уравнений не содержат  $C_m$  ( $C_m \equiv 0$  при  $m = 1, 2, \dots, n$ ).

Система (17.1) сведется к (17.2), если  $\partial/\partial t$  и  $\partial/\partial x$  от всех неизвестных функций  $v_j$  обращаются в нуль. Величины  $u_1, u_2, \dots, u_n$  характеризуют стационарные однородные состояния рассматриваемой системы.

Будет допускаться, что внутри структуры разрыва может существовать поверхность (для простоты считаем, что таких поверхностей не более одной), при переходе через которую могут терпеть разрыв или обращаться в тождественный нуль некоторые из недифференциальных членов уравнений, описывающих структуру. Именно это может приводить к упомянутому выше различию гиперболических систем уравнений, действующих по разные стороны от разрыва.

По разные стороны от поверхности, которую будем называть критической, число независимых уравнений (17.2) может быть различным, то есть по разные стороны число  $n$  принимает разные значения  $n_1$  и  $n_2$ . Соответственно, переменные  $u_m$ , вообще говоря, различны по разные стороны от критической поверхности:  $u_m^{(1)}$ ,  $m = 1, 2, \dots, n_1$ ,  $u_j^{(2)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_2$ .

Так например, при изучении фронтов в электромагнитном поле, на которых возникает (или исчезает) электропроводность среды (Бармин и Куликовский [2]), используется закон Ома в виде (одномерный случай)

$$\frac{c}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} = \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right).$$

Электропроводность  $\sigma$  зависит от температуры, причем  $\sigma \equiv 0$  при температуре ниже критической  $T \leq T^*$ , ( $T^*$  также может зависеть от плотности и других величин). Если внутри структуры происходит переход  $T$  через  $T^*$ , то поверхность  $T = T^*$  является критической поверхностью и с одной стороны от нее  $\sigma \equiv 0$ . В непроводящей области величины  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$  – независимые неизвестные величины, а в проводящей области при рассмотрении крупномасштабных явлений, когда можно считать  $\sigma = \infty$ , они, очевидно, связаны соотношением  $\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{v}/c$ . Точно также при переходе упругого твердого тела в жидкое состояние (или обратно) исчезает (или возникает) упругий коэффициент отвечающий за упругость при сдвиге.

При рассмотрении явлений, характеризующихся медленными изменениями в пространстве и во времени, в частности, явлений вдали от переходной зоны (структуры) разрыва, в системе уравнений (17.1) можно пренебречь членами с производными по  $x$  и  $t$

в тех уравнениях, где  $C_m \neq 0$ . В оставшихся уравнениях это позволит выразить  $v_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) через  $u_m^{(\alpha)}$ ,  $m = 1, 2, \dots, n_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ . При этом возникнет система, содержащая  $n_1$  уравнений, с  $n_1$  неизвестными  $u_m^{(1)}$  и система из  $n_2$  уравнений с  $n_2$  неизвестными  $u_m^{(2)}$ . Обе системы будем предполагать гиперболическими и отождествлять с системами гиперболических уравнений, действующих при  $\alpha = 1$  с одной стороны и при  $\alpha = 2$  с другой стороны от переходной зоны разрыва

$$a_{mj}^{(\alpha)} \frac{\partial u_j^{(\alpha)}}{\partial t} + b_{mj}^{(\alpha)} \frac{\partial u_j^{(\alpha)}}{\partial x} = 0, \quad j, m = 1, 2, \dots, n_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \quad (17.3)$$

где  $a_{mj}^{(\alpha)}$  и  $b_{mj}^{(\alpha)}$  зависят от  $u_k^{(\alpha)}$ . Полученная таким образом гиперболическая система уравнений может в общем случае иметь более высокий порядок  $n$ , чем имеется законов сохранения и мы откажемся от требования, что каждое уравнение выражает свой закон сохранения. Систему (17.3) будем далее называть *упрощенной* (по отношению к системе (17.1)) гиперболической системой.

Проведем преобразование независимых переменных, полезное для дальнейшего. А именно, вместо  $x$  введем переменную  $\xi = -x + Wt$ . Тогда уравнения (17.1) примут вид

$$A_{mj} \frac{\partial v_j}{\partial t} - B'_{mj} \frac{\partial v_j}{\partial \xi} + C_m = 0, \quad B'_{mj} = B_{mj} - W A_{mj}. \quad (17.4)$$

Соответственно, уравнения (17.3) в новых переменных примут вид

$$a_{mj}^{(\alpha)} \frac{\partial u_j^{(\alpha)}}{\partial t} + b_{mj}^{(\alpha)} \frac{\partial u_j^{(\alpha)}}{\partial \xi} = 0, \quad b_{mj}^{(\alpha)} = b_{mj}^{(\alpha)} - W a_{mj}^{(\alpha)}. \quad (17.5)$$

Сделаем некоторые дополнительные предположения о системе (17.4). Первое предположение касается поведения решений линеаризованной полной системы (17.4) и, тем самым, накладывает ограничения на вид полной системы уравнений (17.1). Если уравнения (17.4) линеаризовать около постоянных значений  $v_j^0$ , удовлетворяющих соотношениям (17.2), то получим систему с постоянными коэффициентами. Для получившейся системы можно разыскивать решения вида

$$v_j = v_j^0 + v_j^* e^{i(k\xi - \omega t)},$$

где  $v_j^*$  – некоторые постоянные,  $k$  – волновое число,  $\omega$  – частота,  $i = \sqrt{-1}$ . Подстановка указанного вида решения в линейризованную систему (17.4) приводит к равенствам

$$(-i\omega A_{mj}^0 - ikB_{mj}'^0 + C_{mj}^0)v_j^* = 0,$$

где  $A_{mj}^0$ ,  $B_{mj}'^0$  и  $C_{mj}^0$  – значения  $A_{mj}$ ,  $B_{mj}'$  и  $\partial C_m/\partial v_j$  при  $v_j = v_j^0$ . Эта система имеет нетривиальное решение для  $v_j^*$ , если ее определитель равен нулю

$$|C_{mj}^0 - i\omega A_{mj}^0 - ikB_{mj}'^0| = 0. \quad (17.6)$$

Это уравнение при заданных  $v_j^0$  связывает  $\omega$  и  $k$  и называется *дисперсионным уравнением*. Для краткости левую часть уравнения (17.6) будем в некоторых случаях обозначать  $D(\omega, k)$ . Дисперсионное уравнение позволяет найти функции  $\omega(k)$  или  $k(\omega)$ , которые удовлетворяют этому уравнению и представляют собой многозначные аналитические функции. Число ветвей этих функций определяется наивысшими степенями  $k$  и  $\omega$  в дисперсионном уравнении (17.6). Будем считать выполненным следующее условие, которое называется *условием диссипативности*: если  $\omega$  и  $k$  связаны дисперсионным уравнением, то  $\text{Im } \omega < 0$  для всех действительных  $k$ , отличных от нуля

$$\text{Im } \omega < 0 \quad \text{для} \quad \text{Im } k = 0, \quad k \neq 0. \quad (17.7)$$

Таким образом, *система диссипативна*, если любое решение линейризованных относительно  $v_j^0 = \text{const}$  уравнений (17.1), синусоидально зависящее от  $\xi$ , экспоненциально убывает со временем при любой конечной длине волны синусоиды.

Очевидно, если система (17.4) диссипативна, то диссипативна и система (17.1), и обратно. Действительно, решения вида  $e^{i(k'x - \omega't)}$  для линейризованной системы (17.1) и решения вида  $e^{i(k\xi - \omega t)}$  для линейризованной системы (17.1) представляют собой одни и те же решения, записанные в разных системах координат. Убывание со временем одних решений означает убывание со временем и других. Из совпадения показателей экспонент следует:  $\omega'(k') = \omega(k) - kW$  при  $k' = -k$ , где функция  $\omega(k)$  удовлетворяет дисперсионному уравнению (17.6). Очевидно  $\text{Im } \omega'(k') = \text{Im } \omega(-k)$  при действительных  $k$ .

Следующее предположение, как будет видно из дальнейшего, обеспечивает непрерывность решения задачи о структуре разрыва.

Будем предполагать, что определитель матрицы  $B'_{mj}$  отличен от нуля

$$|B'_{mj}| \neq 0 \quad (17.8)$$

в некоторой интересующей нас области значений  $v_j$  и  $W$  (в дальнейшем  $W$  будет скоростью движения волны, представляющей структуру разрыва). Предположение (17.8) сделано для удобства. В п. д) будет показано, что отказ от этого предположения не меняет числа дополнительных соотношений на разрыве.

### б. Постановка задачи о стационарной структуре и дополнительные предположения.

Рассмотрим вопрос о существовании решения задачи о стационарной структуре разрыва, то есть о существовании решения системы (17.4) в виде бегущей волны, принимающего постоянные (различные) значения при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ ,  $t = \text{const}$ . Решение ищем в виде

$$\begin{aligned} v_m &= v_m(\xi), & \xi &= -x + Wt, & (17.9) \\ v_m &= v_m^- \quad \text{при } \xi \rightarrow -\infty, & v_m &= v_m^+ \quad \text{при } \xi \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Очевидно, величины  $v_m^-$ , а также  $v_m^+$  удовлетворяют системе (17.2) и, следовательно, им могут быть поставлены в соответствие наборы переменных  $u_1^-, u_2^-, \dots, u_{n_1}^-$ , а также  $u_1^+, u_2^+, \dots, u_{n_2}^+$ .

Вопрос, подлежащий изучению, заключается в том, сколько связей между переменными  $u_m^-$  и  $u_m^+$  накладывает требование существования решения вида (17.9). При изучении структуры разрывов будет предполагаться, что скорость разрыва  $W$  не совпадает ни с одной из характеристических скоростей упрощенных гиперболических систем уравнений (17.3) при  $u_m = u_m^-$ ,  $m = 1, 2, \dots, n_1$ , и при  $u_j = u_j^+$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_2$ . Это позволяет четко определить, сколько граничных условий требуется для эволюционности разрыва.

Помимо этого в дальнейшем будут всегда рассматриваться случаи общего положения.

Как уже отмечалось выше, будет предполагаться, что внутри структуры может существовать критическая поверхность (для простоты – одна; случай, когда их несколько, не приводит к изменению результата), на которой могут рваться или при переходе через которую могут обращаться в нуль некоторые из функций  $C_m$ , входящих в уравнение. Эта поверхность соответствует некоторому физическому превращению, происходящему в веществе,

и ее положение должно определяться некоторым соотношением, связывающим переменные  $v_j$ , определяющие состояние среды

$$\Phi_0(v_j) = 0. \quad (17.10)$$

Уравнения, описывающие стационарную структуру разрыва в системе координат, движущейся со скоростью разрыва  $W$ , имеют вид

$$B'_{mj} \frac{dv_j}{d\xi} = C_m, \quad (17.11)$$

где  $B'_{mj}$  определены равенствами (17.4).

В силу условия (17.8) решение должно быть всюду непрерывным (ограниченность  $C_m$  предполагается), а на критической поверхности предполагается непрерывность всех  $v_j$  ( $N$  условий) или выполнение других  $N$  условий. Таким образом, полное число условий на критической поверхности (с учетом соотношения (17.10), определяющего ее положение) равно  $N + 1$ . Эти  $N + 1$  условия далее будем называть *условиями склейки*. Если внутри структуры фактически нет критической поверхности, то при построении решения (которое будет строиться с двух сторон от состояний, соответствующих  $\xi = \pm\infty$ ) будем формально задавать некоторое соотношение (17.10), связывающее  $v_j$  (не имеющее определенного физического смысла), и на поверхности, определяемой этим уравнением, будем требовать непрерывность всех  $v_j$ . Таким образом, случай отсутствия критической поверхности формально не отличается от случая, когда она есть.

Итак, были приняты следующие предположения:

- (1) полные системы уравнений для явлений больших масштабов переходят в гиперболические системы уравнений, для которых разыскиваются условия на разрыве;
- (2) выполнены условия диссипативности уравнений (17.7);
- (3) выполнено соотношение (17.8), обеспечивающее непрерывность решений уравнений структуры;
- (4) скорость разрыва  $W$  не совпадает с какой-либо из характеристических скоростей перед или за разрывом.

Кроме того, принимается выполнение  $N + 1$  условия склейки решений, что, однако, естественно и не следует считать предположением.

### в. Поведение решения при $\xi \rightarrow \pm\infty$ .

Линеаризуем систему (17.4) в окрестности постоянных значений, принимаемых решением при  $\xi \rightarrow \pm\infty$  и получим некоторые

следствия из предположений (17.7) и (17.8) (Любарский [40]). Из этих предположений следует, что, если  $\text{Im } \omega > 0$ , то у линеаризованной системы (17.4) не существует решений вида  $e^{i(k\xi - \omega t)}$  с действительными  $k$ . Обозначим через  $p$  число корней  $k$  (с учетом возможной кратности) дисперсионного уравнения, соответствующего линеаризованной системе (17.4), лежащих в верхней полуплоскости комплексной плоскости  $k$ , и через  $q$  – число корней  $k$  дисперсионного уравнения, лежащих в нижней полуплоскости  $k$  при заданном  $\omega$  таком, что  $\text{Im } \omega > 0$ .

Из условия (17.8) следует, что  $p + q = N$ . Если непрерывным образом менять параметры  $v_j$ , характеризующие состояние, около которого производится линеаризация, а также  $W$ , то  $p$  и  $q$  меняться не будут, если  $\text{Im } \omega$  остается в верхней полуплоскости  $\omega$ . Действительно, если  $\omega$  конечно, то никакой из корней  $k$  дисперсионного уравнения не может при таком изменении параметров в силу условия (17.7) пересечь действительную ось  $k$ , а в силу требования (17.8) не может поменять знак  $\text{Im } k$ , пройдя через бесконечность.

Кроме того, поскольку при больших по модулю значениях  $\omega$  значения  $k$  в главной своей части определяются, как это видно из строения определителя (17.6), элементами матриц  $B'_{mj}$  и  $A^0_{mj}$ , то различие матриц  $C^0_{mj}$ , которое может иметь место по разные стороны от переходной зоны, не может изменить значений  $p$  и  $q$ . Таким образом, с обеих сторон от переходной зоны при достаточно большом  $\text{Im } \omega$  число корней  $k$  дисперсионного уравнения, имеющих положительную мнимую часть, равно  $p$ , а число корней, имеющих отрицательную мнимую часть, равно  $q$ .

Оценим число корней  $k_j(\omega)$  дисперсионного уравнения линеаризованной системы (17.4), имеющих  $\text{Im } k > 0$  при  $\omega = 0$ . Если  $\omega \rightarrow 0$  на верхней полуплоскости  $\omega > 0$ , то некоторые из корней  $k$  дисперсионного уравнения также будут стремиться к нулю из верхней полуплоскости  $k$  и в пределе обратятся в нуль. Найдем число таких корней. Заметим прежде всего, что если  $\omega$  и  $k$  одновременно стремятся к нулю, то для соответствующего решения временной и пространственный масштабы стремятся к бесконечности. Поэтому соответствующее экспоненциальное решение должно описываться упрощенной системой уравнений (17.5), а  $\omega$  и  $k$  должны удовлетворять дисперсионному уравнению системы, которая получается линеаризацией уравнений (17.5). Поскольку система эта гиперболическая и не содержит членов без производ-

ных, то решение дисперсионного уравнения имеет вид

$$k_j^{(\alpha)} = \frac{\omega}{c_j^{(\alpha)}}, \quad j = 1, 2, \dots, n_\alpha, \quad \alpha = 1, 2;$$

здесь  $c_j^{(\alpha)}$  – характеристическая скорость упрощенной системы уравнений (17.5).

Согласно сделанному выше предположению все  $c_j^{(\alpha)}$  отличны от нуля. Из сказанного следует, что у полной линеаризованной системы уравнений (17.4) имеется ровно  $n_\alpha$  корней  $k(\omega)$ , стремящихся к нулю при  $\omega \rightarrow 0$ , причем из верхней полуплоскости стремятся к нулю столько корней  $k_j$ , сколько имеется характеристических скоростей у упрощенной системы (17.5), удовлетворяющих неравенствам  $c_j^{(\alpha)} > 0$ . Обозначим далее это число через  $r_\alpha$ .

Очевидно,  $r_\alpha$  зависит от значений  $v_j^\pm$ , около которых произведена линеаризация системы уравнений, и от  $W$ . Из нижней полуплоскости  $k$  будут стремиться к нулю  $l_\alpha = n_\alpha - r_\alpha$  корней при  $\omega \rightarrow 0$ . Таким образом, в верхней полуплоскости при  $\omega = 0$  останется  $p - r_\alpha$ , а в нижней  $q - l_\alpha$  корней  $k$  дисперсионного уравнения (17.5) линеаризованной полной системы уравнений (17.4).

Будем строить решение задачи о стационарной структуре ударной волны, представляющее решение системы (17.11), начиная с  $\xi = \pm\infty$ . При больших отрицательных  $\xi$  и при фиксированных значениях  $v_j^-$  решение должно мало отличаться от  $v_j^-$  и поэтому добавки к  $v_j^-$  могут находиться из линеаризованных уравнений. Решение этих уравнений в общем случае экспоненциально зависят от  $\xi$ . В свете изложенного выше, удобно эти решения получать из решений вида  $e^{i(k\xi - \omega t)}$  предельным переходом при  $\omega \rightarrow 0$ .

Поскольку эти решения линеаризованных уравнений должны стремиться к нулю при  $\xi \rightarrow -\infty$ , то экспоненты, из которых состоит решение, могут соответствовать только тем значениям  $k = k_m^{(1)}$ , которые остаются в верхней полуплоскости после обращения  $\omega$  в нуль. Можно заключить, что разыскиваемое решение зависит от  $p - r_1$  произвольных постоянных  $C_m^-$ , стоящих при слагаемых, содержащих экспоненты  $e^{-ik_m^{(1)}\xi}$ . С ростом  $\xi$  решения однозначно могут быть продолжены, что обеспечивается выполнением условия (17.8).

Таким образом, совокупность решений системы (17.11), стремящихся к постоянным значениям при  $\xi \rightarrow -\infty$  при заданном  $W$ ,

определяется  $p - r_1$  произвольными постоянными  $C_m^-$  и состоянием  $u_1^-, u_2^-, \dots, u_{n_1}^-$  при  $\xi = -\infty$ . Аналогично, при том же  $W$  совокупность решений, которые стремятся к постоянным значениям при  $\xi \rightarrow \infty$ , определяется  $q - l_2$  произвольными постоянными  $C_j^+$ , которые стоят при экспонентах, убывающих с ростом  $\xi$ , и  $n_2$  значениями  $u_1^+, u_2^+, \dots, u_{n_2}^+$ . Напомним, что  $p - r_1$  и  $q - l_2$  равны разности числа малых возмущений, описываемых полной и упрощенной системами, которые распространяются соответственно вперед (в область  $x > 0$ ) и назад (в область  $x < 0$ ) от разрыва.

#### г. Дополнительные соотношения на разрывах.

Как было сказано выше, для того чтобы получить решение задачи о структуре разрыва, необходимо выполнить  $N + 1$  условие склейки. Условия склейки можно рассматривать как условия, связывающие параметры, от которых зависят решения по разные стороны от точки склейки

$$F_a(u_1^-, \dots, u_{n_1}^-, C_1^-, \dots, C_{p-r_1}^-, u_1^+, \dots, u_{n_2}^+, C_1^+, \dots, C_{q-l_2}^+, W) = 0, \\ a = 1, 2, \dots, N + 1. \quad (17.12)$$

В число аргументов функций  $F_a$  добавлена величина  $W$ , поскольку от  $W$  зависит строение склеиваемых решений. Из этих соотношений в случае общего положения можно исключить  $p - r_1 + q - l_2 = N - r_1 - l_2$  величин  $C_i^-$  и  $C_j^+$ . Тогда в случае общего положения останутся  $N + 1 - (N - r_1 - l_2) = r_1 + l_2 + 1$  соотношений вида

$$\Theta_b(u_1^-, \dots, u_{n_1}^-, u_1^+, \dots, u_{n_2}^+, W) = 0, \quad b = 1, 2, \dots, r_1 + l_2 + 1, \quad (17.13)$$

где  $\Theta$  – некоторые функции своих аргументов. Поскольку сумма  $r_1 + l_2$  представляет собой число различных типов характеристик гиперболических упрощенных систем уравнений, уходящих от разрыва в обе стороны, то число соотношений, получаемых из требования существования решения, представляющего структуру разрыва, соответствует требованию эволюционности разрыва с точки зрения упрощенных гиперболических систем уравнений, описывающих явления крупного масштаба.

Сделаем некоторые замечания, связанные с полученным результатом. Если уравнения (17.11) описывают стационарное движение сплошной среды, то они должны иметь в качестве следствий законы сохранения массы, импульса, энергии и, возможно,

другие законы сохранения, о чем шла речь в § 5. Законам сохранения соответствуют первые интегралы рассматриваемой системы уравнений, позволяющие написать соответствующие соотношения, связывающие  $u_i^-$ ,  $u_j^+$  и  $W$ . Очевидно, они должны сохраняться среди соотношений (17.13). Однако, для их написания можно не обращаться к изучению структуры. Соотношения на разрывах, выражающие законы сохранения, не зависят от процессов внутри структуры (если эти процессы не противоречат законам сохранения) и, как правило, известны заранее. Их будем называть *основными соотношениями* на разрыве.

Если кроме основных, система (17.13) содержит еще другие соотношения на разрыве, то их будем называть *дополнительными*. Дополнительные соотношения зависят от процессов, происходящих внутри структуры, то есть от выбора полной системы уравнений (17.1) (в противном случае существовал бы физический закон типа закона сохранения).

Известным примером дополнительного соотношения является выражение для скорости движения фронта пламени в газе, которая определяется теплопроводностью, диффузией и химическими реакциями в узкой зоне, где происходит горение. На некоторых разрывах, например на фронтах ионизации и рекомбинации в газах, находящихся в магнитном поле, число дополнительных соотношений оказывается больше единицы (Бармин и Куликовский [2]).

При выводе соотношений (17.13) предполагалось, что решение задачи о структуре разрыва существует. Относительно существования решений, представляющих структуры разрывов, получены некоторые достаточно общие результаты только в том случае, когда по обе стороны от разрыва среда описывается одними и теми же уравнениями и когда число основных граничных условий равно числу уравнений упрощенной системы (Любарский [41], Годунов [10], [11], Куликовский [23], Gordon [53], Smoller [58]). При изучении волн малой амплитуды в общем случае можно провести разложение решения по амплитуде волны. При этом из полной системы уравнений достаточно общего вида при любом числе или отсутствии законов сохранения можно получить уравнение Бюргерса, обладающее переходными решениями (рассмотренными ранее в § 14), которые можно рассматривать как структуру разрыва. Эти решения дают  $n = n_1 = n_2$  соотношений между  $u_m^-$ ,  $u_m^+$  и  $W$ . Кроме перечисленных общих результатов, исследовано большое число конкретных моделей структуры разрывов.

Требование существования решения может накладываться на  $u_r^+$  и  $u_s^-$  ограничения типа неравенств

$$\Psi_q(u_r^+, u_s^-, W) \geq 0. \quad (17.14)$$

В число таких неравенств должно входить, например, часто используемое условие неубывания энтропии на разрывах без отвода тепла, которое, очевидно, должно выполняться для разрывов, имеющих структуру.

Отметим еще одно важное обстоятельство. При получении соотношения (17.13) из (17.12) предполагалось, что часть равенств (17.11) можно использовать для нахождения величин  $C_m^-, C_j^+$ , а затем подставить их в оставшиеся выражения. Нахождение указанных функций возможно при условии невырожденности какого-нибудь минора, соответствующего этим величинам, в якобиане от левых частей соотношений (17.12). Если последнее условие не выполнено, то это означает, что величины  $C_m^-, C_j^+$  входят в соотношения (17.12) не независимо, а в виде некоторых комбинаций. Тогда из системы (17.12) нужно исключить эти комбинации, чтобы получить соотношения (17.13), которых при этом будет больше, чем  $r_1 + l_2 + 1$ . Этот случай, очевидно, соответствует неэволюционным разрывам.

Решение, представляющее структуру неэволюционных разрывов, если оно существует, определяется неоднозначно в силу неоднозначности нахождения величин  $C_m^-, C_j^+$ , задающих это решение. Вырождение всех миноров якобиана, соответствующих величинам  $C_m^-, C_j^+$ , как и всякое вырождение, можно было бы считать исключительным случаем. Однако, если состояния перед и за разрывом таковы, что  $r_1 + l_2 + 1$  меньше числа основных соотношений, то, с учетом сказанного выше, вырождение упомянутых миноров якобиана будет предопределено. Примеры таких неэволюционных разрывов известны в магнитной гидродинамике, причем было показано (Germain [51]), что их структура, если существует, то неединственна (содержит произвольные параметры), что соответствует выводу, полученному выше.

#### **д. Основной результат и его обсуждение.**

Приведенные выше соображения позволяют сформулировать окончательный результат следующим образом. Если основных соотношений на разрыве меньше, чем требуется для его эволюционности, то из требования существования решения (разумеется, если такое решение существует), представляющего структуру

разрыва, можно найти столько дополнительных соотношений, сколько необходимо, чтобы разрыв с учетом основных и дополнительных соотношений был эволюционным. Конкретный вид дополнительных соотношений зависит от уравнений, описывающих структуру разрыва.

Если число основных соотношений на разрыве соответствует условиям эволюционности, то из рассмотрения структуры разрыва не следует дополнительных соотношений типа равенств, однако, могут возникнуть неравенства, при выполнении которых существует (или не существует) решение, представляющее структуру разрыва.

Когда число основных соотношений больше, чем требуется для эволюционности, то такой разрыв при взаимодействии с малыми возмущениями должен распасться. Структура таких неэволюционных разрывов, если существует, то неединственна (решение задачи о структуре содержит произвольные параметры).

Заметим, что наряду с нетривиальными разрывами фазовых переходов, в которых не все  $C_m^-$  и  $C_j^+$  одновременно равны нулю, возможны ситуации, когда все эти величины равны нулю. Это приводит к отсутствию в решении изменения величин при переходе через поверхность раздела и соответствует непрерывным фронтам, по разные стороны от которых действуют различные упрощенные системы уравнений. Например, в магнитной гидродинамике известны такие непрерывные фронты ионизации и рекомбинации (Butler [50]), когда считается, что электропроводность газа отлична от нуля только при достаточно высокой температуре  $T > T_*$ .

В заключение отметим, что выше рассматривалась стационарная одномерная структура разрывов, однако, реальная структура может быть нестационарной и неодномерной, то есть внутри узкой зоны разрыва возможны колебания и неодномерные течения. При этом решение, представляющее одномерную стационарную структуру, может вообще не существовать либо быть неустойчивым. Кроме того, как уже упоминалось выше, переходная зона разрыва может расширяться со временем, оставаясь, однако, узкой по сравнению с внешним размером задачи.

Поэтому, строго говоря, отсутствие решения, представляющего стационарную структуру разрыва, не означает, что такой разрыв не существует, поскольку у этого разрыва может существовать неодномерная нестационарная структура. (Вопрос о получении дополнительных соотношений в случае, когда структура

в системе координат, движущейся со средней скоростью разрыва, периодична по времени и относительно координат, лежащих в плоскости волны, рассматривался с общих позиций в (Куликовский [27])). Существование стационарной структуры не гарантирует физической осуществимости разрыва. Для уверенности в физической осуществимости необходимо, кроме того, убедиться в устойчивости соответствующего решения. Это является трудной задачей, которая редко решается.

**е. Замечание о получении дополнительных соотношений при нарушении условия (17.8).**

При рассмотрении конкретных задач о структуре разрывов полная система уравнений иногда не удовлетворяет требованию (17.8), обеспечивающему непрерывность решения задачи о структуре разрыва. В большинстве случаев такой вид системы уравнений обусловлен переупрощением рассматриваемых диссипативных механизмов. Для многих задач, связанных с течениями сплошной среды, можно добиться выполнения требования (17.8), если включить в рассмотрение хотя бы малую вязкость среды. Если считать, что для описания структуры используется система уравнений с достаточно полным набором диссипативных механизмов, то условие (17.8) будет выполнено, а переход к более простой системе уравнений, для которой условие (17.8) не выполняется, можно произвести, устремляя часть диссипативных коэффициентов к нулю. При этом внутри структуры в пределе могут появляться разрывы, причем устремленные к нулю диссипативные коэффициенты будут существенны только в малой окрестности возникающих разрывов. Если соотношения на этих внутренних разрывах известны или получены путем указанного предельного перехода, то при построении структуры разрывов и нахождении дополнительных соотношений на них можно пользоваться и такими системами уравнений, которые допускают существование слабых и сильных разрывов, учитывая возможность их появления в структуре. Выводы относительно числа соотношений на разрыве, сформулированные в п. д), не меняются при указанном предельном переходе.

## Заключение

В лекциях рассмотрен круг вопросов, связанных с построением и свойствами одномерных нестационарных решений гиперболических систем уравнений, типичных для механики сплошной среды. Выделен класс гиперболических уравнений, выражающих законы сохранения. Рассмотрено образование и свойства разрывов. Введено понятие их эволюционности. Рассмотрена структура разрывов. Для этого гиперболические уравнения дополнены членами более высокого порядка дифференцирования, согласующимися с представлениями термодинамики необратимых процессов. Показано, что требование существования решения задачи о структуре может приводить к появлению “дополнительных” (не зависящих от законов сохранения) соотношений, связывающих величины по разные стороны от разрыва. Выявлено влияние мелкомасштабных процессов, происходящих в структуре разрывов на соотношения, связывающие величины по разные стороны от фронта и, таким образом, на устройство решений в крупномасштабном гиперболическом приближении.

## Список литературы

- [1] Бахолдин И. Б., *Бездиссипативные разрывы в механике сплошной среды*, Физматлит, М., 2004.
- [2] Бармин А. А., Куликовский А. Г., “Фронты ионизации и рекомбинации в электромагнитном поле”, *Итоги науки. Гидромеханика*, **5**, Наука, М., 1971, 5–31.
- [3] Бармин А. А., Успенский В. С., “Развитие пульсационных режимов в одномерных нестационарных МГД-течениях с выключением электропроводности”, *Изв. АН СССР. МЖГ*, **14**:4 (1986), 115–122.
- [4] Введенская Н. Д., “Пример неединственности обобщенного решения квазилинейной системы уравнений”, *ДАН СССР*, **136**:3 (1961), 532–533 [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#).
- [5] Галин Г. Я., “Об ударных волнах в средах с произвольным уравнением состояния”, *ДАН СССР*, **119**:6 (1958), 1106–1109 [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#).
- [6] Галин Г. Я., “К теории ударных волн”, *ДАН СССР*, **127**:1 (1959), 55–58 [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#).
- [7] Гельфанд И. М., “Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений”, *УМН*, **14**:2 (86) (1959), 87–158 [MathNet.Ru](#) [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#).
- [8] Годунов С. К., “О понятии обобщенного решения”, *ДАН СССР*, **134**:6 (1960), 1279–1282 [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#).
- [9] Годунов С. К., “Интересный класс квазилинейных систем”, *ДАН СССР*, **139**:3 (1961), 521–523 [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#).
- [10] Годунов С. К., “О неединственности “размазывания” разрывов в решениях квазилинейных систем”, *ДАН СССР*, **136**:2 (1961), 272–273 [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#).
- [11] Годунов С. К., “Проблема обобщенного решения в теории квазилинейных уравнений и в газовой динамике”, *УМН*, **17**:3 (105) (1962), 147–158 [MathNet.Ru](#) [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#).
- [12] Годунов С. К., *Уравнения математической физики*, Физматлит, М., 1971, 416 с. [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#).
- [13] Годунов С. К., Роменский Е. И., *Элементы механики сплошных сред и законы сохранения*, Университетская серия, **4**, Научная книга, Новосибирск, 1998, 267 с. [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#).
- [14] Де Гроот С. Р., Мазур П., *Неравновесная термодинамика*, Мир, М., 1964, 456 с.
- [15] Дьяченко В. Ф., “О задаче Коши для квазилинейных систем”, *ДАН СССР*, **136**:1 (1961), 16–17 [ZentralMATH](#).
- [16] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П., *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980 [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#).

- [17] Жермен П., *Курс механики сплошных сред*, Высшая школа, М., 1983, 400 с.
- [18] Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М., *Математическая теория горения и взрыва*, Наука, М., 1980 [MathSciNet](#).
- [19] Ильичев А. Т., *Уединенные волны в моделях гидромеханики*, Физматлит, М., 2003, 256 с.
- [20] Калашников А. С., “Построение обобщенных решений квазилинейных уравнений первого порядка без условия выпуклости как пределов решений параболических уравнений с малым параметром”, *ДАН СССР*, **127**:1 (1959), 27–30 [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#).
- [21] Карпман В. И., *Нелинейные волны в диспергирующих средах*, Наука, М., 1973, 175 с. [MathSciNet](#).
- [22] Кружков С. Н., *Труды С. Н. Кружкова*, ред. Бахвалов Н. С., Галкин В. А., Дубинский Ю. А., Физматлит, М., 2000, 334 с. [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#).
- [23] Куликовский А. Г., “О структуре ударных волн”, *ПММ*, **26**:4 (1962), 631–641 [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#).
- [24] Куликовский А. Г., “О поверхностях разрыва, разделяющих идеальные среды с различными свойствами. Волны рекомбинации”, *ПММ*, **32**:6 (1968), 1125–1131 [ZentralMATH](#).
- [25] Куликовский А. Г., “О свойствах ударных адиабат в окрестности точек Жуге”, *Известия АН СССР. МЖТ*, **14**:2 (1979), 317–319.
- [26] Куликовский А. Г., “О возможном влиянии колебаний в структуре разрыва на множество допустимых разрывов”, *ДАН СССР*, **275**:6 (1984), 1349–1352 [Math-Net.Ru](#) [MathSciNet](#).
- [27] Куликовский А. Г., “Сильные разрывы в течениях сплошных сред и их структура”, *Теория вероятностей, теория функций, механика*, Тр. МИАН СССР, **182**, Наука, М., 1988, 261–291 [Math-Net.Ru](#) [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#).
- [28] Куликовский А. Г., Любимов Г. А., *Магнитная гидродинамика*, Физматгиз, М., 1962, 246 с. [ZentralMATH](#).
- [29] Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю., *Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений*, Физматлит, М., 2001, 608 с. [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#).
- [30] Куликовский А. Г., Свешникова Е. И., “Автомодельная задача о действии внезапной нагрузки на границу упругого полупространства”, *ПММ*, **49**:2 (1985), 284–291 [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#).
- [31] Куликовский А. Г., Свешникова Е. И., “О распаде произвольного начального разрыва в упругой среде”, *ПММ*, **52**:6 (1988), 1007–1012 [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#).
- [32] Куликовский А. Г., Свешникова Е. И., *Нелинейные волны в упругих средах*, Моск. лицей, М., 1998, 412 с.

- [33] Куликовский А. Г., Свешникова Е. И., “Признак несуществования или неединственности решений автомодельных задач”, *ПММ*, **65**:6 (2001), 971–982 [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#).
- [34] Куликовский А. Г., Чугайнова А. П., “Об условиях распада нелинейной волны в вязкоупругой среде”, *ЖВМ и МФ*, **38**:2 (1998), 315–323 [Math.Net.Ru](#) [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#).
- [35] Куликовский А. Г., Чугайнова А. П., “Моделирование влияния мелкомасштабных дисперсионных процессов в сплошной среде на формирование крупномасштабных явлений”, *ЖВМ и МФ*, **44**:6 (2004), 1119–1126 [Math.Net.Ru](#) [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#).
- [36] Курант Р., *Уравнения с частными производными*, Мир, М., 1964, 830 с. [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#).
- [37] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., *Методы теории функций комплексного переменного*, Физматгиз, М., 1958, 678 с. [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#).
- [38] Ландау Л. В., Лифшиц Е. М., *Теоретическая физика*. Т. 6: *Гидродинамика*, Наука, М., 1986, 736 с. [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#).
- [39] Левин В. А., Марков В. В., Журавская Т. А., Осинкин С. Ф., “Нелинейные волновые процессы при инициировании и распространении газовой детонации”, *Нелинейная динамика*, Тр. МИАН, **25**1, Наука, М., 2005, 200–214 [Math.Net.Ru](#) [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#).
- [40] Любарский Г. Я., “О структуре ударных волн”, *ПММ*, **25**:6 (1961), 1041–1049 [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#).
- [41] Любарский Г. Я., “О существовании ударных волн малой интенсивности”, *ПММ*, **26**:3 (1962), 511–519 [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#).
- [42] Ляпидевский В. Ю., Тешуков В. М., *Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости*, Изд-во Сиб. отд-ния РАН, Новосибирск, 2000, 419 с.
- [43] Олейник О. А., “О построении обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка путем введения “исчезающей вязкости””, *УМН*, **14**:2 (86) (1959), 159–164 [Math.Net.Ru](#) [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#).
- [44] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н., *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике*, Наука, М., 1978, 687 с. [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#).
- [45] Седов Л. И., *Механика сплошной среды*. Т. 1, 2, Наука, М., 1994, Т. 1: 528 с., Т. 2: 560 с. [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#).
- [46] Седов Л. И., Коробейников В. П., Марков В. В., “Теория распространения взрывных волн”, *Теоретическая и математическая физика*, Тр. МИАН СССР, **175**, Наука, М., 1986, 178–216 [Math.Net.Ru](#) [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#).
- [47] Соболев С. Л., “О смешанной задаче для уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными”, *ДАН СССР*, **122**:4 (1958), 555–558 [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#).

- [48] Чугайнова А. П., “О формировании автомодельного решения в задаче о нелинейных волнах в упругом полупространстве”, *ИММ*, **52:4** (1988), 692–697 [MathSciNet](#) .
- [49] Уизем Дж. Б., *Линейные и нелинейные волны*, Мир, М., 1977, 622 с. [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#) .
- [50] Butler D. S., “One-dimensional flow in an ionizing gas”, *J. Fluid Mech.*, **23** (1965), 1–21 [crossref](#) [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#) [ads](#) .
- [51] Germain P., *Contribution à la théorie des ondes de choc en magnétodynamique des fluides*, Publ. 97, Office National d’Etudes et de Recherches Aeronautiques, Paris, 1959 [MathSciNet](#) .
- [52] Germain P., *Cours de Mécanique des Milieux Continus. V. 1: Théorie Générale*, Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1973 [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#) .
- [53] Gordon P., “Paths connecting elementary critical points of dynamical systems”, *SIAM J. Appl. Math.*, **26:1** (1974), 35–102 [crossref](#) [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#) .
- [54] Hanyga A., *On the solution to the Riemann problem for arbitrary hyperbolic system of conservation laws*, Publications of Institute of Geophysics, No. A-1(98), PWN, Warszawa, 1976.
- [55] Hersh R., “Boundary conditions for equations of evolution”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **16:4** (1964), 243–264 [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#) [ads](#) .
- [56] Kulikovskii A., Sveshnikova E., *Nonlinear Waves in Elastic Media*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1995, x+237 pp. [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#) .
- [57] Lax P. D., “Hyperbolic systems of conservation laws. II”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **10:4** (1957), 537–566 [crossref](#) [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#) .
- [58] Smoller J., *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Grundlehren Math. Wiss., **258**, Springer-Verlag, New York, 1983, xxi+581 pp. [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#) [ads](#) .