



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Горгорова, И. В. Павлов, О свойствах хааровской единственности для векторнозначных случайных процессов, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 6, 169–170

DOI: 10.4213/rm8557

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.170

24 марта 2025 г., 16:11:32



## О свойствах хааровской единственности для векторнозначных случайных процессов

В. В. Горгорова, И. В. Павлов

Рассмотрим фильтрованное пространство (ф.п.)  $(\Omega, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_k)_{k=0}^N, \mathcal{F})$ , где число  $N$  конечно, все  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_k$  конечны,  $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_N$  и  $\mathcal{F}_k \neq \mathcal{F}_{k+1}$  при любом  $k$ . Обозначим через  $\mathcal{P}$  множество вероятностных мер на  $(\Omega, \mathcal{F})$ , каждая из которых нагружает все атомы из  $\mathcal{F}$ . Пусть  $Z = (Z_k, \mathcal{F}_k)_{k=0}^N$  – адаптированный векторнозначный случайный процесс (в.с.п.) на  $(\Omega, \mathcal{F})$ , где  $Z_k = (Z_k^{(1)}, \dots, Z_k^{(l)})$ . Как обычно, символ  $f|_A$  означает ограничение случайной величины (с.в.)  $f$  на событие  $A \in \mathcal{F}$ . Пусть

$$A = B_1 + \dots + B_m,$$

где  $A$  – атом в  $\mathcal{F}_k$ ,  $B_i$  – атом в  $\mathcal{F}_{k+1}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) и  $1 \leq m < \infty$  ( $m$  зависит от  $A$ ; это число мы будем называть характеристикой дробления атома  $A \in \mathcal{F}_k$ ). Обозначим через  $\mathcal{P}(Z, \mathbb{F})$  (соответственно  $\mathcal{P}(Z^{(i)}, \mathbb{F})$ ) множество мер  $\mathbb{P}$  из  $\mathcal{P}$ , относительно которых в.с.п.  $Z = (Z_k, \mathcal{F}_k, \mathbb{P})_{k=0}^N$  (соответственно процесс  $Z^{(i)} = (Z_k^{(i)}, \mathcal{F}_k^{(i)}, \mathbb{P})_{k=0}^N$ ) является мартингалом. Имеем:  $\mathcal{P}(Z, \mathbb{F}) = \bigcap_{i=1}^l \mathcal{P}(Z^{(i)}, \mathbb{F})$ .

Фильтрация  $\mathbb{H} = (\mathcal{H}_n)_{n=0}^L$  на  $(\Omega, \mathcal{F})$  называется хааровской, если для любого  $n$  ( $0 \leq n < L$ )  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{H}_n$  порождена разбиением  $\Omega$  ровно на  $n + 1$  атом. Хааровская фильтрация  $\mathbb{H} = (\mathcal{H}_n)_{n=0}^L$  называется интерполирующей хааровской фильтрацией (и.х.ф.) исходной фильтрации  $\mathbb{F}$ , если существует последовательность натуральных чисел  $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_N = L$ , для которой  $\mathcal{H}_{n_k} = \mathcal{F}_{k_0}$ .

Предположим, что  $\mathcal{P}(Z, \mathbb{F}) \neq \emptyset$ , и зафиксируем меру  $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(Z, \mathbb{F})$ . По мартингалу  $Z = (Z_k, \mathcal{F}_k, \mathbb{P})_{k=0}^N$  построим мартингальную хааровскую интерполяцию  $Y = (Y_n, \mathcal{H}_n)_{n=0}^L$ , используя формулу  $Y_n = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_N | \mathcal{H}_n]$  (вероятностное решение задачи Дирихле). Если и.х.ф.  $\mathbb{H}$  фильтрации  $\mathbb{F}$  фиксирована, то процесс  $Y$  определяется по мартингалу  $Z$  однозначно.

Пусть  $|M|$  обозначает число элементов множества  $M$ . Говорят, что мартингальная мера  $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(Z, \mathbb{F})$  удовлетворяет свойству хааровской единственности ( $\mathbb{P} \in \text{HUP}(Z)$ ), если для исходной фильтрации  $\mathbb{F}$  можно построить такую и.х.ф.  $\mathbb{H}$ , что для соответствующей мартингальной интерполяции  $Y = (Y_n, \mathcal{H}_n)_{n=0}^L$  имеет место соотношение  $|\mathcal{P}(Y, \mathbb{H})| = 1$  (т.е. только относительно исходной меры  $\mathbb{P}$  процесс  $Y$  является мартингалом). Более важным является следующее определение. Говорят, что мартингальная мера  $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(Z, \mathbb{F})$  удовлетворяет свойству универсальной хааровской единственности ( $\mathbb{P} \in \text{UHUP}(Z)$ ), если для любой и.х.ф.  $\mathbb{H}$  исходной фильтрации  $\mathbb{F}$  имеет место соотношение  $|\mathcal{P}(Y, \mathbb{H})| = 1$ , где  $Y = (Y_n, \mathcal{H}_n)_{n=0}^L$  – соответствующая мартингальная интерполяция процесса  $Z$ . Аналогично определяются включения  $\mathbb{P} \in \text{HUP}(Z^{(i)})$  и  $\mathbb{P} \in \text{UHUP}(Z^{(i)})$ . Ясно, что для любого  $i$  ( $0 \leq i \leq l$ ) справедливо  $\mathcal{P}(Z, \mathbb{F}) \cap \text{HUP}(Z^{(i)}) \subset \text{HUP}(Z)$  и  $\mathcal{P}(Z, \mathbb{F}) \cap \text{UHUP}(Z^{(i)}) \subset \text{UHUP}(Z)$ . Из результатов работы [1] вытекает, что если  $\text{HUP}(Z^{(i)}) \neq \emptyset$  (соответственно  $\text{UHUP}(Z^{(i)}) \neq \emptyset$ ) и для любого  $k$  ( $0 \leq k < N$ ) и любого атома  $A \in \mathcal{F}_k$  характеристика дробления  $m$  не превосходит 3, то  $\text{HUP}(Z^{(i)}) = \mathcal{P}(Z^{(i)}, \mathbb{F})$  (соответственно  $\text{UHUP}(Z^{(i)}) = \mathcal{P}(Z^{(i)}, \mathbb{F})$ ). Отсюда вытекает справедливость следующей леммы.

**ЛЕММА 1.** *Если  $\text{HUP}(Z^{(i)}) \neq \emptyset$  (соответственно  $\text{UHUP}(Z^{(i)}) \neq \emptyset$ ) и для любого  $k$  ( $0 \leq k < N$ ) и любого атома  $A \in \mathcal{F}_k$  характеристика дробления  $m$  не превосходит 3, то  $\text{HUP}(Z) = \mathcal{P}(Z, \mathbb{F})$  (соответственно  $\text{UHUP}(Z) = \mathcal{P}(Z, \mathbb{F})$ ).*

На самом деле справедлива следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 1.** 1) *Если  $\text{HUP}(Z) \neq \emptyset$ , то для любого  $k$  ( $0 \leq k < N$ ) и любого атома  $A \in \mathcal{F}_k$  с характеристикой дробления  $m$ , строго большей 1, существует номер  $i$*

такой, что выполняется неравенство

$$\min_{1 \leq j \leq m} Z_{k+1}^{(i)}|_{B_j} < Z_k^{(i)}|_A < \max_{1 \leq j \leq m} Z_{k+1}^{(i)}|_{B_j}. \quad (1)$$

2) Если для любого  $k$  ( $0 \leq k < N$ ) и любого атома  $A \in \mathcal{F}_k$  с характеристикой дробления  $m$ , строго большей 1, существует номер  $i$  такой, что выполняется неравенство (1), то  $\text{HUP}(Z) = \mathcal{P}(Z, \mathbb{F})$ .

Данная теорема является обобщением на случай векторнозначных процессов соответствующего одномерного результата из [2].

СЛЕДСТВИЕ 1. Если  $\mathbb{F}$  – естественная фильтрация процесса  $Z$ , то выполняется условие (1) и поэтому  $\text{HUP}(Z) = \mathcal{P}(Z, \mathbb{F})$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Сформулированная теорема 1 остается верной, если  $l = \infty$ , а также в случае, когда  $\Omega$  счетно, а  $l < \infty$  (определение в последнем случае интерполирующей хааровской фильтрации, а также обсуждение случая  $l = 1$  имеется в [2]).

ТЕОРЕМА 2. Пусть для любого  $k$  ( $0 \leq k < N$ ) и любого атома  $A \in \mathcal{F}_k$  характеристика дробления  $m$  не превосходит 3 и существует номер  $i$  такой, что числа  $Z_k^{(i)}|_A, Z_{k+1}^{(i)}|_{B_1}, \dots, Z_{k+1}^{(i)}|_{B_m}$  различны. Тогда  $\text{UHUP}(Z) = \mathcal{P}(Z, \mathbb{F})$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Утверждение, обратное теореме 2, неверно. Действительно, пусть  $N = 1$ ,  $l = 2$  и множество  $\Omega$  дробится на три атома  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ . Пусть  $Z_0^{(1)} = Z_0^{(2)} = 2$ ,  $Z_1^{(1)}(\omega_1) = 4$ ,  $Z_1^{(1)}(\omega_2) = 2$ ,  $Z_1^{(1)}(\omega_3) = 1$ ,  $Z_1^{(2)}(\omega_1) = 1$ ,  $Z_1^{(2)}(\omega_2) = 4$ ,  $Z_1^{(2)}(\omega_3) = 2$ . Легко видеть, что в данном случае  $|\mathcal{P}(Z, \mathbb{F})| = 1$ , т. е.  $\text{UHUP}(Z) = \mathcal{P}(Z, \mathbb{F})$ . Однако условия теоремы 2 не выполняются ни при  $i = 1$ , ни при  $i = 2$ . Таким образом, из того, что  $\text{UHUP}(Z) \neq \emptyset$ , не следует существование такого номера  $i$ , что  $\text{UHUP}(Z^{(i)}) \neq \emptyset$ .

Приведем также один результат, дающий конструкцию мартингальной меры из множества  $\text{UHUP}(Z)$ , когда условия теоремы 2 не выполняются. Пусть  $(\Omega^{(i)}, (\mathcal{F}_k^{(i)})_{k=0}^N, \mathcal{F}^{(i)})$  – ф.п. ( $i = 1, 2$ ), где  $N < \infty$ ,  $\mathcal{F}_0^{(i)} = \{\Omega^{(i)}, \emptyset\}$ , а  $\mathcal{F}^{(i)} = \mathcal{F}_N^{(i)}$  – конечные  $\sigma$ -алгебры. Обозначим через  $\mathbb{F}^{(i)}$  фильтрацию  $(\mathcal{F}_k^{(i)})_{k=0}^N$ . Рассмотрим  $\Omega = \Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}$ ,  $\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_k^{(1)} \otimes \mathcal{F}_k^{(2)}$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{(1)} \otimes \mathcal{F}^{(2)}$  и обозначим  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_k^{(1)} \otimes \mathcal{F}_k^{(2)})_{k=0}^N$ .

ТЕОРЕМА 3. Пусть процесс  $(Z_k^{(i)}, \mathcal{F}_k^{(i)})_{k=0}^N$  допускает единственную мартингальную меру  $\mathbb{P}^{(i)}$ , нагружающую все атомы  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ). Тогда мера  $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{(1)} \otimes \mathbb{P}^{(2)}$  принадлежит множеству  $\text{UHUP}(Z)$ .

#### Список литературы

- [1] М. Н. Богачева, И. В. Павлов, УМН, 57:3 (2002), 143–144; англ. пер.: M. N. Bogacheva, I. V. Pavlov, Russian Math. Surveys, 57:3 (2002), 581–583. [2] И. В. Павлов, А. Г. Данекянц, Обозрение прикл. и промышл. матем., 11:1 (2004), 73–82.

**В. В. Горгорова (V. V. Gorgorova)**  
Ростовский государственный строительный университет  
E-mail: gorgorovav@aaanet.ru

Представлено Д. В. Трещёвым  
Принято редколлегией  
08.10.2007

**И. В. Павлов (I. V. Pavlov)**  
Ростовский государственный строительный университет  
E-mail: pavloviv2005@mail.ru