Математические заметки

Том 98 выпуск 2 август 2015

УДК 517.946

Разрушение решений некоторых нелинейных неравенств с особенностями на неограниченных множествах

Е. И. Галахов, О. А. Салиева

Получены результаты об отсутствии нетривиальных неотрицательных решений для нескольких классов нелинейных неравенств в частных производных с особенностями на неограниченных множествах.

Библиография: 14 названий.

DOI: 10.4213/mzm10622

1. Введение. В последние годы многими математиками исследуется проблема глобальной разрешимости нелинейных уравнений и неравенств в частных производных с сингулярными коэффициентами. При этом нелинейные слагаемые могут зависеть как от значений неизвестной функции, так и от ее производных. Указанная проблема представляет не только самостоятельный интерес, но имеет также важные внутриматематические и физические приложения. Так, теоремы типа Лиувилля об отсутствии положительных решений нелинейных уравнений во всем пространстве или в полупространстве могут использоваться для получения априорных оценок решений соответствующих задач в ограниченных областях [1], [2]. С другой стороны, к рассматриваемому классу относятся, в частности, уравнения Гамильтона–Якоби и Кортевега–де Фриза, играющие важную роль в современной математической физике [3], [4].

В работах [5]–[12] получены точные необходимые условия существования глобальных решений различных классов эллиптических уравнений второго порядка с градиентными слагаемыми. При этом использовались как техника обыкновенных дифференциальных уравнений для радиально симметричных решений, так и метод нелинейной емкости, разработанный Похожаевым [13], [14]. Однако вопрос о разрешимости аналогичных уравнений более высоких порядков остался открытым.

В настоящей работе получены достаточные условия возникновения ситуации blow-up для ряда классов неравенств, имеющих сингулярные коэффициенты на неограниченных множествах, таких как прямые и плоскости, а также гладкие кривые и поверхности в трехмерном пространстве.

Результаты получены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 13-01-12460-офи-м и 14-01-00736) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-4479.2014.1).

© Е. И. Галахов, О. А. Салиева, 2015

Основные результаты статьи сформулированы в п. 2. В п. 3 доказывается теорема об отсутствии решений эллиптического неравенства высокого порядка с нелинейностью, зависящей только от значений неизвестной функции u; в п. 4 получен аналогичный результат для неравенства с нелинейностью, содержащей $|Du|$. В п. 5 и п. 6 соответствующие утверждения переносятся на случай эллиптических неравенств второго порядка с нелинейной главной частью. В п. 7 рассматриваются параболические неравенства.

2. Основные результаты. Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ – замкнутое неограниченное множество. Пусть $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Обозначим

$$\rho(x) = \operatorname{dist}(x, S), \qquad S^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, S) < \varepsilon\}.$$

Предположим, что существует семейство функций $\xi_R \in C_0^k(\mathbb{R}^n \setminus S; [0,1])$ таких, что

$$\xi_R(x) = \begin{cases} 0, & x \in S^{1/(2R)} \cup (\mathbb{R}^n \setminus S^{2R}), \\ 1, & x \in S^R \setminus S^{1/R}, \end{cases} \tag{1}$$

и существует константа $c > 0$ такая, что

$$|D^\alpha \xi_R(x)| \leqslant c\rho^{-|\alpha|}, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Пример. В качестве множества S можно рассматривать гиперплоскость

$$S = \Pi_n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}.$$

Тогда можно выбрать $\xi_R(x) = \widetilde{\xi}_R(x_n)$, где

$$\widetilde{\xi}_R(x_n) = \begin{cases} 0, & |x_n| \leqslant \dfrac{1}{2R} \quad \text{или} \quad |x_n| \geqslant 2R, \\ 1, & \dfrac{1}{R} \leqslant |x_n| \leqslant R. \end{cases}$$

Рассмотрим неравенства вида

$$\sum_{|\alpha| \leqslant k} D^\alpha(A^\alpha(x,u)) \geqslant u^q |x|^\beta \rho^{-\gamma}, \qquad x \in \mathbb{R}^n \setminus S, \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{|\alpha| \leqslant k} D^\alpha \left(a_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \geqslant |Du|^q |x|^\beta \rho^{-\gamma}, \qquad x \in \mathbb{R}^n \setminus S, \tag{4}$$

с некоторыми $k \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $q, \gamma > 0$ и

$$-\Delta_p u \geqslant u^q |x|^\beta \rho^{-\gamma}, \qquad x \in \mathbb{R}^n \setminus S, \tag{5}$$

$$-\Delta_p u \geqslant |Du|^q |x|^\beta \rho^{-\gamma}, \qquad x \in \mathbb{R}^n \setminus S \tag{6}$$

с некоторыми $p > 1$, $q > p - 1$ и $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Здесь мы используем обозначение $\Delta_p u = \operatorname{div}(|Du|^{p-2} Du)$. Решения этих неравенств (3)–(6) понимаются в смысле распределений.

Наши основные результаты о задачах (3)–(6) можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1. *Пусть $q > 0$. Предположим, что $A^\alpha\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – функции Каратеодори, причем для всех α, $|\alpha| \leqslant k$, существуют функции*

$$a_\alpha\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+, \qquad a_\alpha \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_+),$$

такие, что

$$|A^\alpha(x,t)| \leqslant a_\alpha(x)|t|^p \qquad \text{для п.в.} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$$

и $n + (|\gamma - kq| - \beta)/q \leqslant 0$.

Тогда задача (3) не имеет неотрицательных решений $u \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n \setminus S)$, отличных от тождественного нуля п.в.

Теорема 2. *Пусть*

$$a_\alpha\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+, \qquad a_\alpha \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N_+) \qquad \text{для всех} \quad \alpha, \quad |\alpha| \leqslant k,$$

и $n + (|\gamma - (k+1)q| - \beta)/q \leqslant 0$.

Тогда задача (4) не имеет решений $u \in W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n \setminus S)$, отличных от константы п.в.

Теорема 3. *Пусть $q > p - 1$ и $n + (|\gamma - pq| - \beta)/(q - p + 1) \leqslant 0$. Тогда задача (5) не имеет неотрицательных нетривиальных решений $u \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n \setminus S)$, отличных от тождественного нуля п.в.*

Теорема 4. *Пусть $q > p - 1$ и*

$$n + \frac{|\gamma(p-1) - pq| - \beta(p-1)}{q - p + 1} \leqslant 0.$$

Тогда задача (6) не имеет нетривиальных решений $u \in W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n \setminus S)$, отличных от константы п.в.

Результат об отсутствии решений имеет место и для эволюционного неравенства

$$u_t - \sum_{|\alpha| \leqslant k} D^\alpha(A^\alpha(x,u)) \geqslant u^q \rho^{-\gamma} |x|^\beta, \qquad x \in \mathbb{R}^n \setminus S, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{7}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n \setminus S. \tag{8}$$

Предполагается, что начальная функция $u_0 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n \setminus S)$.

Решение задачи (7), (8) понимается в смысле распределений.

Типичный результат о задаче (7), (8) можно сформулировать следующим образом.

Теорема 5. *Пусть $A^\alpha(x,u)$ удовлетворяют условиям теоремы 1, $q > 1$, $\alpha > kq$ и $n + k + (\alpha - kq - \beta)/q \leqslant 0$.*

Тогда задача (7), (8) не имеет неотрицательных решений $u \in L^q_{\mathrm{loc}}((\mathbb{R}^n \setminus S) \times [0,T])$, отличных от тождественного нуля, ни для какого $T > 0$.

Замечание 1. Отсутствие решений задачи (7), (8) называют *ситуацией мгновенного разрушения решений* (instantaneous blow-up).

3. Доказательство теоремы 1. Введем семейство пробных функций $\varphi = \varphi_R \in C_0^k(\mathbb{R}^n \setminus S; [0,1])$ вида

$$\varphi_R(x) = \xi_R^{\varkappa}(x)\psi_R^{\varkappa}(x)$$

с $\varkappa > kq'$, $\xi_R \in C_0^k(\mathbb{R}^n \setminus S; [0,1])$, удовлетворяющими условиям (1) и (2), и $\psi_R \in C_0^k(\mathbb{R}^n; [0,1])$ такими, что

$$\psi_R(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant R, \\ 0, & |x| \geqslant 2R, \end{cases} \tag{9}$$

причем существует константа $c > 0$ такая, что

$$|D^\alpha \psi_R(x)| \leqslant cR^{-|\alpha|}, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{10}$$

для всех мультииндексов α с $0 \leqslant |\alpha| \leqslant k$.

Структура этих пробных функций позволяет избавиться от особенностей как на S, так и на бесконечности.

Теперь предположим, что решение u задачи (5) существует. Умножая обе части неравенства (5) на φ_R и интегрируя по частям k раз, получаем

$$\begin{aligned}
&\int_{\operatorname{supp}\varphi_R} u^q \rho^{-\gamma} |x|^\beta \varphi_R \, dx \\
&\quad \leqslant c \int_{\operatorname{supp}\varphi_R} u D^\alpha \varphi_R \, dx \leqslant c \int_{\operatorname{supp}\varphi_R} u |D^\alpha \varphi_R| \, dx \\
&\quad \leqslant c \biggl(\int_{\operatorname{supp}\varphi_R} u^q \rho^{-\gamma} |x|^\beta \varphi_R \, dx \biggr)^{p/q} \\
&\qquad \times \biggl(\int_{\operatorname{supp}\varphi_R} \rho^{\gamma p/(q-p)} |x|^{-\beta q/(q-p)} \sum_{|\alpha| \leqslant k} |D^\alpha \varphi_R|^{q/(q-p)} \varphi_R^{-p/(q-p)} \, dx \biggr)^{(q-p)/q},
\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
&\int_{\operatorname{supp}\varphi_R} u^q \rho^{-\gamma} |x|^\beta \varphi_R \, dx \\
&\qquad \leqslant c \int_{\operatorname{supp}\varphi_R} \rho^{\gamma p/(-pq)} |x|^{-\beta q/(q-p)} \sum_{|\alpha| \leqslant k} |D^\alpha \varphi_R|^{q/(q-p)} \varphi_R^{-p/(q-p)} \, dx.
\end{aligned}$$

В силу выбора φ_R мы можем уменьшить области интегрирования в обеих частях этого неравенства:

$$\begin{aligned}
&\int_{(S^R \setminus S^{1/R}) \cap B_R(0)} u^q \rho^{-\gamma} |x|^\beta \varphi_R \, dx \\
&\qquad \leqslant \int_{(S^{2R} \setminus S^{1/(2R)}) \cap B_{2R}(0)} \rho^{\gamma q'/q} |x|^{-\beta q'/q} |D^\alpha \varphi_R|^{q'} \varphi_R^{1-q'} \, dx.
\end{aligned}$$

Заметим, что $\varphi_R \equiv 1$ во всей области интегрирования в левой части неравенства. Используя условия (2) и (10), получим

$$\int_{(S^R \setminus S^{1/R}) \cap B_R(0)} u^q \rho^{-\gamma} |x|^\beta \, dx \leqslant cR^{n + (|\alpha - kq| - \beta)/q},$$

что приводит к противоречию при $R \to \infty$, если показатель степени в правой части неравенства отрицателен. Случай показателя, равного нулю, рассматривается стандартным образом (см. [13]).

Замечание 2. Можно обобщить этот результат на более широкий класс стационарных дифференциальных операторов высокого порядка с постоянными или переменными коэффициентами, в том числе на системы вида

$$\begin{cases} Au \geqslant v^q \rho^{-\gamma} |x|^\beta, & x \in \mathbb{R}^n \setminus S, \\ Bv \geqslant u^p \rho^{-\delta} |x|^\eta, & x \in \mathbb{R}^n \setminus S, \end{cases}$$

с соответствующими параметрами $p, q > 1$, $\beta, \gamma, \delta, \eta \in \mathbb{R}$.

4. Доказательство теоремы 2. Для доказательства теоремы 2 возьмем $\varphi = \varphi_R \in C_0^{k-1}(\mathbb{R}^n \setminus S; [0,1])$ того же вида, что и в предыдущем пункте, с $\varkappa > (k-1)q'$, $\xi_R \in C_0^{k-1}(\mathbb{R}^n \setminus S; [0,1])$, удовлетворяющими условиям (1) и (2) и $\psi_R \in C_0^{k-1}(\mathbb{R}^n; [0,1])$, удовлетворяющими условиям (9) и (10) Достаточно, чтобы условия (2) и (10) выполнялись при $0 \leqslant |\alpha| \leqslant k-1$.

Как и выше, предположим, что решение u задачи (5) существует. Умножая обе части (5) на φ_R и интегрируя по частям $k-1$ раз, получаем

$$\begin{aligned} &\int_{\operatorname{supp}\varphi_R} |Du|^q \rho^{-\alpha} |x|^\beta \varphi_R \, dx \\ &\quad \leqslant \int_{\operatorname{supp}\varphi_R} \Big(Du, D\Big(\sum_{|\alpha| \leqslant k} D^\alpha \varphi_R \Big) \Big) \, dx \leqslant \int_{\operatorname{supp}\varphi_R} |Du| \cdot \Big| D\Big(\sum_{|\alpha| \leqslant k} D^\alpha \varphi_R \Big) \Big| \, dx \\ &\quad \leqslant \Big(\int_{\operatorname{supp}\varphi_R} |Du|^q \rho^{-\alpha} |x|^\beta \varphi_R \, dx \Big)^{1/q} \\ &\qquad \times \Big(\int_{\operatorname{supp}\varphi_R} \rho^{\alpha q'/q} |x|^{-\beta q'/q} \Big| D\Big(\sum_{|\alpha| \leqslant k} D^\alpha \varphi_R \Big) \Big|^{q'} \varphi_R^{1-q'} \, dx \Big)^{1/q'}, \end{aligned}$$

откуда

$$\int_{\operatorname{supp}\varphi_R} |Du|^q \rho^{-\alpha} |x|^\beta \varphi_R \, dx \leqslant \int_{\operatorname{supp}\varphi_R} \rho^{\alpha q'/q} |x|^{-\beta q'/q} \Big| D\Big(\sum_{|\alpha| \leqslant k} D^\alpha \varphi_R \Big) \Big|^{q'} \varphi_R^{1-q'} \, dx.$$

В силу выбора φ_R мы можем уменьшить области интегрирования в обеих частях этого неравенства:

$$\begin{aligned} &\int_{(S^R \setminus S^{1/R}) \cap B_R(0)} |Du|^q \rho^{-\alpha} |x|^\beta \varphi_R \, dx \\ &\quad \leqslant \int_{(S^{2R} \setminus S^{1/(2R)}) \cap B_{2R}(0)} \rho^{\alpha q'/q} |x|^{-\beta q'/q} \Big| D\Big(\sum_{|\alpha| \leqslant k} D^\alpha \varphi_R \Big) \Big|^{q'} \varphi_R^{1-q'} \, dx. \end{aligned}$$

Заметим, что $\varphi_R \equiv 1$ во всей области интегрирования в левой части неравенства. Используя условия (2) и (10), получим

$$\int_{(S^R \setminus S^{1/R}) \cap B_R(0)} |Du|^q \rho^{-\gamma} |x|^\beta \, dx \leqslant c R^{n + (|\gamma - (k-1)q| - \beta)/q},$$

что приводит к противоречию при $R \to \infty$, если показатель степени в правой части неравенства отрицателен. Случай показателя, равного нулю, рассматривается как в [13].

Замечание 3. Можно обобщить этот результат на более широкий класс стационарных дифференциальных операторов высокого порядка с постоянными или переменными коэффициентами, в том числе на системы вида

$$\begin{cases} Au \geqslant |Dv|^q \rho^{-\gamma} |x|^\beta, & x \in \mathbb{R}^n \setminus S, \\ Bv \geqslant |Du|^p \rho^{-\delta} |x|^\eta, & x \in \mathbb{R}^n \setminus S, \end{cases}$$

с соответствующими параметрами $p, q > 1$, $\beta, \gamma, \delta, \eta \in \mathbb{R}$.

5. Доказательство теоремы 3. Здесь мы умножаем обе части неравенства (5) на $u^\lambda \varphi_R$ с $1 - p < \lambda < 0$. Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} u^{q+\lambda} \rho^{-\gamma} |x|^\beta \varphi_R \, dx &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} (|Du|^{p-2} Du, D(u^\lambda \varphi_R)) \, dx \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}^n} u^{\lambda-1} |Du|^p \varphi_R \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} |Du|^{p-2} (Du, D\varphi_R) \, dx \\ &\leqslant \lambda \int_{\mathbb{R}^n} u^{\lambda-1} |Du|^p \varphi_R \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} |Du|^{p-1} |D\varphi_R| \, dx \end{aligned}$$

и в силу неравенства Юнга

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} u^{q+\lambda} \rho^{-\gamma} |x|^\beta \varphi_R \, dx + |\lambda| \int_{\mathbb{R}^n} u^{\lambda-1} |Du|^p \varphi_R \, dx \\ &\qquad \leqslant |\lambda| \int_{\mathbb{R}^n} u^{\lambda-1} |Du|^p \varphi_R \, dx + c(\lambda) \int_{\mathbb{R}^n} u^{\lambda+p-1} |D\varphi|^p \varphi^{1-p} \, dx, \end{aligned}$$

т.е.

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^{q+\lambda} \rho^{-\gamma} |x|^\beta \varphi_R \, dx \leqslant c(\lambda) \int_{\mathbb{R}^n} u^{\lambda+p-1} |D\varphi|^p \varphi^{1-p} \, dx.$$

Повторно применяя неравенство Юнга, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} u^{q+\lambda} \rho^{-\gamma} |x|^\beta \varphi_R \, dx \\ &\qquad \leqslant c(\lambda) \int_{\mathbb{R}^n} |D\varphi|^{p(q+\lambda)/(q-p+1)} (\rho^\alpha |x|^{-\beta})^{(\lambda+p-1)/(q-p+1)} \varphi^{1-p(q+\lambda)/(q-p+1)} \, dx. \end{aligned}$$

Сужая область интегрирования, получим в левой части этого неравенства

$$\frac{1}{2} \int_{(S^R \setminus S^{1/R}) \cap B_R(0)} u^{q+\lambda} \rho^{-\gamma} |x|^\beta \varphi_R \, dx = \frac{1}{2} \int_{(S^R \setminus S^{1/R}) \cap B_R(0)} u^{q+\lambda} \rho^{-\gamma} |x|^\beta \, dx,$$

а в правой части –

$$\int_{(S^{2R} \setminus S^{1/(2R)}) \cap B_{2R}(0)} |D\varphi|^{p(q+\lambda)/(q-p+1)} (\rho^\alpha |x|^{-\beta})^{(\lambda+p-1)/(q-p+1)} \varphi^{1-p(q+\lambda)/(q-p+1)} \, dx.$$

Используя условия (2) и (10) аналогично предыдущему пункту, получим

$$\int_{(S^R \setminus S^{1/R}) \cap B_R(0)} u^{q+\lambda} \rho^{-\gamma} |x|^\beta \, dx \leqslant c R^{n+(|\gamma - pq| - \beta)/(q-1)},$$

что при предположениях теоремы приводит к противоречию при $R \to \infty$.

Замечание 4. Этот результат можно обобщить на более широкий класс существенно нелинейных стационарных операторов, в частности, на системы вида

$$-\Delta_p u \geqslant v^s \rho^{-\gamma}|x|^\beta, \qquad x \in \mathbb{R}^n \setminus S,$$
$$-\Delta_q v \geqslant u^z \rho^{-\gamma}|x|^\delta, \qquad x \in \mathbb{R}^n \setminus S,$$

с соответствующими параметрами $p, q > 1$, $s, z, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

6. Доказательство теоремы 4. Умножая обе части (5) на φ_R и интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned}
&\int_{\operatorname{supp}\varphi_R} |Du|^q \rho^{-\gamma}|x|^\beta \varphi_R\,dx \\
&\quad\leqslant \int_{\operatorname{supp}\varphi_R} (|Du|^{p-2}Du, D\varphi_R)\,dx \leqslant \int_{\operatorname{supp}\varphi_R} |Du|^{p-1}\cdot|D\varphi_R|\,dx \\
&\quad\leqslant \biggl(\int_{\operatorname{supp}\varphi_R} |Du|^q \rho^{-\gamma}|x|^\beta \varphi_R\,dx\biggr)^{(p-1)/q} \\
&\qquad\times \biggl(\int_{\operatorname{supp}\varphi_R} (\rho^\alpha|x|^{-\beta})^{(p-1)/(q-p+1)}|D\varphi_R|^{q/(q-p+1)}\varphi_R^{-(p-1)/(q-p+1)}\,dx\biggr)^{(q-p+1)/q},
\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
&\int_{\operatorname{supp}\varphi_R} |Du|^q \rho^{-\gamma}|x|^\beta \varphi_R\,dx \\
&\qquad\leqslant \int_{\operatorname{supp}\varphi_R} (\rho^\alpha|x|^{-\beta})^{(p-1)/(q-p+1)}|D\varphi_R|^{q/(q-p+1)}\varphi_R^{-(p-1)/(q-p+1)}\,dx.
\end{aligned}$$

В силу выбора φ_R мы можем уменьшить области интегрирования в обеих частях этого неравенства:

$$\begin{aligned}
&\int_{(S^R\setminus S^{1/R})\cap B_R(0)} |Du|^q \rho^{-\gamma}|x|^\beta \varphi_R\,dx \\
&\qquad\leqslant \int_{(S^{2R}\setminus S^{1/(2R)})\cap B_{2R}(0)} (\rho^\alpha|x|^{-\beta})^{(p-1)/(q-p+1)}|D\varphi_R|^{q/(q-p+1)}\varphi_R^{-(p-1)/(q-p+1)}\,dx.
\end{aligned}$$

Заметим, что $\varphi_R \equiv 1$ во всей области интегрирования в левой части неравенства. Используя условия (2) и (10) получим

$$\int_{(S^R\setminus S^{1/R})\cap B_R(0)} |Du|^q \rho^{-\gamma}|x|^\beta\,dx \leqslant cR^{n+(|\alpha(p-1)-q|-\beta(p-1))/(q-p+1)},$$

что приводит к противоречию при $R \to \infty$, если показатель степени в правой части неравенства отрицателен. Случай показателя, равного нулю, рассматривается как в [13].

Замечание 5. Можно обобщить этот результат на более широкий класс стационарных дифференциальных операторов высокого порядка с постоянными или переменными коэффициентами, в том числе на системы вида

$$\begin{cases} -\Delta_p u \geqslant |Dv|^s \rho^{-\gamma}|x|^\beta, & x \in \mathbb{R}^n \setminus S, \\ -\Delta_q v \geqslant |Du|^z \rho^{-\delta}|x|^\eta, & x \in \mathbb{R}^n \setminus S, \end{cases}$$

с соответствующими параметрами $p, q > 1$, $s, z, \beta, \gamma, \delta, \eta \in \mathbb{R}$.

7. Доказательство теоремы 5. Для задачи Коши (7), (8) введем два семейства пробных функций, а именно $\varphi_R(x)$ по пространственным переменным и $T_\tau(t)$ по времени. Здесь $\varphi_R(x)$ определяется так же, как в предыдущих пунктах, а $T_\tau \in C^1([0,\tau];[0,1])$ с $\tau > 0$ таковы, что

$$T_\tau(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\tau}{2}, \\ 0, & \dfrac{3\tau}{4} \leqslant t \leqslant \tau, \end{cases}$$

и, кроме того,

$$\int_{\tau/2}^{3\tau/4} \frac{|T_\tau'|^{q'}}{|T_\tau|^{q'-1}}\, dt \leqslant c\tau^{1-q'} \tag{11}$$

с некоторой константой $c > 0$.

Умножая обе части (7) на $\varphi_R(x)T_\tau(t)$ и интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}_+} T_\tau\, dt \int_{\mathbb{R}^n} u^q \rho^{-\alpha}|x|^\beta \varphi_R\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} u_0 \varphi_R\, dx \\ &\quad \leqslant c \int_{\mathbb{R}_+} T_\tau\, dt \int_{\mathbb{R}^n} u^p \sum_{|\alpha|\leqslant k} D^\alpha \varphi_R\, dx - \int_{\mathbb{R}_+} T_\tau'\, dt \int_{\mathbb{R}^n} u\varphi_R\, dx \\ &\quad \leqslant c \int_{\mathbb{R}_+} T_\tau\, dt \int_{\mathbb{R}^n} u \Big| \sum_{|\alpha|\leqslant k} D^\alpha \varphi_R \Big|\, dx + \int_{\mathbb{R}_+} |T_\tau'|\, dt \int_{\mathbb{R}^n} u\varphi_R\, dx. \end{aligned}$$

Применяя к обоим слагаемым в правой части неравенства параметрическое неравенство Юнга, придем к неравенству

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}_+} T_\tau\, dt \int_{\mathbb{R}^n} u^q \rho^{-\alpha}|x|^\beta \varphi_R\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} u_0 \varphi_R\, dx \\ &\quad \leqslant c_1 \int_{\mathbb{R}_+} T_\tau\, dt \int_{\mathbb{R}^n} \Big| \sum_{|\alpha|\leqslant k} D^\alpha \varphi_R \Big|^{q/(q-p)} \rho^{-\alpha p/(q-p)} |x|^{\beta p/(q-p)} \varphi_R^{-p/(q-p)}\, dx \\ &\qquad + c_2 \int_{\mathbb{R}_+} |T_\tau'|^{q/(q-p)} T_\tau^{-p/(q-p)}\, dt \int_{\mathbb{R}^n} \rho^{-\alpha p/(q-p)} |x|^{\beta p/(q-p)} \varphi_R^{-p/(q-p)}\, dx \end{aligned}$$

с некоторыми константами $c_1, c_2 > 0$.

В силу выбора $\varphi_R(x)$ и $T_\tau(t)$ мы можем уменьшить области интегрирования в обеих частях этого неравенства:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_0^{2\tau} T_\tau\, dt \int_{(S^R\setminus S^{1/R})\cap B_R(0)} u^q \rho^{-\alpha}|x|^\beta \varphi_R\, dx + \int_{(S^R\setminus S^{1/R})\cap B_R(0)} u_0 \varphi_R\, dx \\ &\quad \leqslant c_1 \int_0^{2\tau} T_\tau\, dt \\ &\qquad\qquad \times \int_{(S^{2R}\setminus S^{1/(2R)})\cap B_{2R}(0)} \Big| \sum_{|\alpha|\leqslant k} D^\alpha \varphi_R \Big|^{q/(q-p)} \rho^{-\alpha p/(q-p)} |x|^{\beta p/(q-p)} \varphi_R^{-p/(q-p)}\, dx \\ &\qquad + c_2 \int_\tau^{2\tau} |T_\tau'|^{q'} T_\tau^{-p/(q-p)}\, dt \int_{(S^{2R}\setminus S^{1/(2R)})\cap B_{2R}(0)} \rho^{-\alpha p/(q-p)} |x|^{\beta p/(q-p)} \varphi_R^{-p/(q-p)}\, dx. \end{aligned}$$

Заметим, что второе слагаемое в левой части неравенства неотрицательно и $\varphi_R(x) \equiv 1$ во всей области интегрирования. Используя условия (2) и (11), получим

$$\int_0^{2\tau} T_\tau\, dt \int_{(S^R \setminus S^{1/R}) \cap B_R(0)} u^q \rho^{-\gamma} |x|^\beta\, dx \leqslant cR^{n+(\beta-\gamma)/(q-1)} \tau (\tau^{-q/(q-1)} + R^{kq/(q-1)}). \tag{12}$$

Легко видеть, что правая часть (12) достигает минимума при

$$\tau = cR^{-k}. \tag{13}$$

Подставляя (13) в (12) и устремляя $R \to \infty$, приходим к противоречию.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] C. Azizieh, P. Clément, E. Mitidieri, “Existence and apriori estimates for positive solutions of p-Laplace systems”, *J. Differential Equations*, **184**:2 (2002), 422–442.

[2] P. Clément, R. Manásevich, E. Mitidieri, “Positive solutions for a quasilinear system via blow-up”, *Comm. Partial Differential Equations*, **18**:12 (1993), 2071–2106.

[3] С. И. Похожаев, “Об отсутствии глобальных решений задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза”, *Функц. анализ и его прил.*, **46**:4 (2012), 51–60.

[4] С. И. Похожаев, “Об отсутствии глобальных решений уравнения Гамильтона–Якоби”, *Дифференц. уравнения*, **44**:10 (2008), 1405–1415.

[5] L. D’Ambrosio, E. Mitidieri, “A priori estimates, positivity results, and nonexistence theorems for quasilinear degenerate elliptic inequalities”, *Adv. Math.*, **224**:3 (2010), 967–1020.

[6] A. Farina, J. Serrin, “Entire solutions of completely coercive quasilinear elliptic equations”, *J. Differential Equations*, **250**:12 (2011), 4367–4408.

[7] A. Farina, J. Serrin, “Entire solutions of completely coercive quasilinear elliptic equations, II”, *J. Differential Equations*, **250**:12 (2011), 4409–4436.

[8] R. Filippucci, “Nonexistence of positive weak solutions of elliptic inequalities”, *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, **70**:8 (2009), 2903–2916.

[9] R. Filippucci, P. Pucci, M. Rigoli, “Nonlinear weighted p-Laplacian elliptic inequalities with gradient terms”, *Commun. Contemp. Math.*, **12**:3 (2010), 501–535.

[10] Xiaohong Li, Fengquan Li, “Nonexistence of solutions for singular quasilinear differential inequalities with a gradient nonlinearity”, *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, **75**:5 (2012), 2812–2822.

[11] P. Pucci, J. Serrin, “A remark on entire solutions of quasilinear elliptic equations”, *J. Differential Equations*, **250**:2 (2011), 675–689.

[12] J. Serrin, “Entire solutions of quasilinear elliptic equations”, *J. Math. Anal. Appl.*, **352**:1 (2009), 3–14.

[13] Э. Митидиери, С. И. Похожаев, “Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных”, Тр. МИАН, **234**, Наука, М., 2001, 3–383.

[14] С. И. Похожаев, “Существенно нелинейные емкости, порожденные дифференциальными операторами”, *Докл. РАН*, **357** (1997), 592–594.

Е. И. Галахов
Московский государственный технологический университет “Станкин”
E-mail: galakhov@rambler.ru

Поступило 17.11.2014
Исправленный вариант 01.03.2015

О. А. Салиева
Московский государственный технологический университет “Станкин”
E-mail: olga.a.salieva@gmail.com