



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Кревчик, А. В. Разумов, П. С. Будянский, Влияние магнитного поля на рекомбинационное излучение, связанное с A^+ -центрами в квантовых точках, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, 2015, выпуск 3, 125–143

<https://www.mathnet.ru/ivpnz282>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.82

15 мая 2025 г., 19:14:49



В. Д. Кревчик, А. В. Разумов, П. С. Будянский

ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА РЕКОМБИНАЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ, СВЯЗАННОЕ С A^+ -ЦЕНТРАМИ В КВАНТОВЫХ ТОЧКАХ

Аннотация.

Актуальность и цели. Интерес к оптическим свойствам квантовых точек с A^+ -центрами в магнитном поле обусловлен прежде всего возможностью эффективного управления как энергией связи примесных комплексов $A^+ + e$, так и спектральными кривыми рекомбинационного излучения, связанного с излучательным переходом возбужденного электрона на уровень A^+ -центра. В зависимости от радиуса квантовой точки спектр рекомбинационного излучения может находиться как в видимом, так и в терагерцовом диапазоне частот, что существенно расширяет круг приборных приложений рассматриваемой системы. Цель работы заключается в теоретическом исследовании влияния внешнего магнитного поля на энергию связи дырки в примесном комплексе $A^+ + e$ в сферически симметричной квантовой точке, а также на частотную зависимость спектральной интенсивности рекомбинационного излучения квазиультимерной структуры с примесными комплексами $A^+ + e$.

Материалы и методы. Зависимость энергии связи A^+ -состояния от координат примесного центра в магнитном поле, а также частотная зависимость спектральной интенсивности рекомбинационного излучения в квазиультимерной структуре с примесными комплексами $A^+ + e$ построены для InSb квантовых точек. Расчет энергии связи дырки в примесном комплексе $A^+ + e$ выполнен в модели потенциала нулевого радиуса в адиабатическом приближении. Расчет спектральной интенсивности рекомбинационного излучения выполнен в дипольном приближении с учетом дисперсии радиуса квантовых точек.

Результаты. Показано, что модификация электронных состояний в квантовой точке, обусловленная гибридным квантованием в радиальной плоскости и размерным квантованием в направлении магнитного поля, является причиной пространственной анизотропии энергии связи дырки в примесном комплексе $A^+ + e$. Найдено, что спектральная интенсивность рекомбинационного излучения в магнитном поле возрастает, что вызвано ростом интеграла перекрытия огибающих волновых функций связанной на A^+ -центре дырки и локализованного в основном состоянии квантовой точки электрона.

Выводы. В магнитном поле возникает пространственная анизотропия энергии связи дырки в комплексе $A^+ + e$, смещение кривой спектральной интенсивности рекомбинационного излучения в коротковолновую область спектра и увеличение вероятности излучательного перехода электрона на уровень A^+ -центра.

Ключевые слова: квантовая точка, примесный комплекс, метод потенциала нулевого радиуса, адиабатическое приближение, магнитное поле, спектральная интенсивность рекомбинационного излучения.

MAGNETIC FIELD EFFECT ON RECOMBINATION RADIATION, BOUND WITH A^+ -CENTERS IN QUANTUM DOTS

Abstract.

Background. An interest to optical properties of quantum dots with A^+ -centers in a magnetic field is aroused, first of all, by a possibility of efficient control of both the $A^+ + e$ extrinsic complexes binding energy and spectral curves of recombination radiation, bound with luminous electron's radiative transition to the A^+ -center level. Depending on the quantum dot radius the recombination radiation spectrum may be located both in visible and terahertz bandwidth, significantly increasing a range of instrument applications of the system under consideration. The study is aimed at theoretical research of external magnetic field effect on the energy binding a hole in the $A^+ + e$ extrinsic complex with a spherically symmetric dot, as well as on frequency dependence of spectral intensity of recombination radiation of a quasi-zero-dimensional structure with $A^+ + e$ extrinsic complexes.

Materials and methods. Dependence of the A^+ -condition's binding energy on extrinsic center's coordinates in a magnetic field, as well as frequency dependence of spectral intensity of recombination radiation in a quasi-zero-dimension structure with $A^+ + e$ extrinsic complexes were built for InSb quantum dots. Hole's binding energy in the $A^+ + e$ extrinsic complex was calculated in the model of zero radius potential in adiabatic approximation. Spectral intensity of recombination radiation was calculated dipole approximation taking into account quantum dots' radius dispersion.

Results. It is shown that modification of electron conditions in a quantum dot, stipulated by hybrid quantization in a radial plane and dimensional quantization towards a magnetic field, is the cause of dimensional anisotropy of hole's binding energy in the $A^+ + e$ extrinsic complex. It has been found that spectral intensity of recombination radiation in a magnetic field rises, caused by an increase of an overlap integral of envelope wave functions of a hole, bound on the A^+ -center, and of an electron, localized in the quantum dot's ground state.

Conclusions. In a magnetic field there occurs dimensional anisotropy of hole's binding energy in the $A^+ + e$ complex, shifting of the curve of spectral intensity of recombination radiation into the short-wave region of the spectrum and an increase of a probability of electron's radiative transition to the A^+ -center level.

Key words: quantum dot, extrinsic complex, method of zero radius potential, adiabatic approximation, magnetic field, spectral intensity of recombination radiation.

Введение

В последние годы не ослабевают интерес к исследованиям влияния внешнего магнитного поля на фотолюминесценцию (ФЛ) структур с квантовыми ямами (КЯ) и квантовыми точками (КТ) (см. например [1–4]). Это связано прежде всего с модификацией оптического спектра наноструктур, примесных и экситонных состояний, что приводит к новым интересным эффектам в спектрах ФЛ и оптического поглощения в условиях внешнего магнит-

ного поля. Так, например, в случае КЯ GaAs/AlGaAs была впервые измерена индуцированная магнитным полем циркулярная поляризация пика ФЛ, связанного с A^+ -центрами, анализ которой позволил определить тонкую, спиновую, энергетическую структуру A^+ -центра [1]. В работе [4] исследовались спектры ФЛ во внешнем магнитном поле ансамбля КТ InAs, выращенных методом молекулярно-пучковой эпитаксии на подложке (001) GaAs, разориентированной в направлении [010]. Было установлено [4], что в магнитном поле происходит подавление захвата фоторожденных носителей в том массиве КТ, который образовался в результате коалесценции, при этом наблюдалось увеличение интенсивности ФЛ.

Магнитное поле оказывает влияние и на кинетику ФЛ КТ. Так, в работе [3] было обнаружено ускорение кинетики ФЛ КТ InAs в матрице AlAs в поле 5 Тл. Полученные результаты объяснены в рамках модели, учитывающей обменное и зеемановское расщепление экситонных уровней КТ в магнитном поле [3].

Цель настоящей работы заключается в теоретическом исследовании влияния внешнего магнитного поля на энергию связи дырки в примесном комплексе $A^+ + e$ в сферически-симметричной КТ, а также на частотную зависимость спектральной интенсивности рекомбинационного излучения (СИРИ) квазинульмерной структуры с примесными комплексами $A^+ + e$.

Влияние магнитного поля на энергию связи дырки в примесном комплексе $A^+ + e$

Рассмотрим задачу о связанных состояниях дырки в примесном комплексе $A^+ + e$ в полупроводниковой сферически-симметричной КТ во внешнем магнитном поле. В качестве модели удерживающего потенциала КТ используется потенциал бесконечно глубокой сферически симметричной ямы:

$$U(\rho) = \begin{cases} 0, & \text{если } \rho \leq R_0, \\ \infty, & \text{если } \rho > R_0, \end{cases} \quad (1)$$

где R_0 – радиус КТ.

Взаимодействие электрона, находящегося в основном состоянии КТ с дыркой, локализованной на A^0 -центре, будем рассматривать в рамках адиабатического приближения [5]. В этом случае электронный потенциал $V_{n,l,m}(\mathbf{r})$, действующий на дырку, можно считать усредненным по движению электрона [6]:

$$V_{n,l,m}(\vec{r}) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_0^{R_0} \frac{|\Psi_{n,l,m}(\vec{r}_e)|^2}{|\vec{r} - \vec{r}_e|} d\vec{r}_e, \quad (2)$$

где e – заряд электрона; ϵ – диэлектрическая проницаемость материала КТ; ϵ_0 – электрическая постоянная; $\Psi_{n,l,m}(\vec{r})$ – волновая функция электрона

в КТ; $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ – магнитное квантовое число; $l = 0, 1, 2, \dots$ – орбитальное квантовое число.

В первом порядке теории возмущений для основного состояния электрона ($m = 0, l = 0$) потенциал (2) может быть записан в виде

$$V_{n,0,0}(\rho) = -\frac{e^2\beta_n}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_0} + \frac{m_h^*}{2} \left(\omega_n^2 + \frac{\omega_B^2}{2} \right) \rho^2 + \frac{m_h^* z^2}{2} \omega_n^2, \quad (3)$$

где

$$\beta_n = \gamma_0 - Ci(2\pi n) + \ln(2\pi n); \quad \hbar\omega_n = \left[\left(2\hbar^2\pi^2 n^2 e^2 \right) / \left(3m_h^* R_0^3 4\pi\epsilon_0\epsilon \right) \right]^{1/2};$$

ρ, φ, z – цилиндрические координаты; $\gamma_0 = 1,781$ – постоянная Эйлера; $Ci(x)$ – интегральный косинус; n – радиальное квантовое число электрона; m_h^* – эффективная масса дырки; $\omega_B = |e|B / m^*$ – циклотронная частота.

Можно показать (см. например [7]), что волновая функция и энергетический спектр, соответствующие потенциалу (3), имеют вид

$$\Psi_{n_1, m, n_2}(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{a_1^2} \left(\frac{n_1!}{2^{n_2+1} \pi^{\frac{3}{2}} n_2! (n_1 + |m|)! a_n} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\rho^2}{2a_1^2} \right)^{\frac{|m|}{2}} \times \\ \times \exp \left[- \left(\frac{\rho^2}{4a_1^2} + \frac{z^2}{2a_n^2} \right) \right] H_{n_2} \left(\frac{z}{a_n} \right) L_{n_1}^{|m|} \left(\frac{\rho^2}{2a_1^2} \right) \exp(im\varphi), \quad (4)$$

$$E_{n_1, m, n_2}^{n,0,0} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_0} \beta_n + \hbar\omega_n \left(n_2 + \frac{1}{2} \right) + \\ + \hbar\omega_n (2n_1 + |m| + 1) \sqrt{1 + \frac{\omega_B^2}{8\omega_n^2} + \frac{\hbar\omega_B m}{2}}, \quad (5)$$

где $n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots$ – квантовые числа, соответствующие уровням Ландау и уровням энергии осцилляторной сферически-симметричной ямы; $a_1^2 = a_n^2 / \left(2\sqrt{1 + a_n^4 / (4a_B^4)} \right)$; $a_n = \sqrt{\hbar / (m_h^* \omega_n)}$ – характерная длина осциллятора; $a_B = \sqrt{\hbar / (m^* \omega_B)}$ – магнитная длина; $H_n(x)$, $L_n^c(x)$ – полиномы Эрмита и Лагерра соответственно [8].

Короткодействующий потенциал примеси описывается в рамках модели потенциала нулевого радиуса

$$V_\delta(\rho, \varphi, z; \rho_a, \varphi_a, z_a) = \gamma \frac{\delta(\rho - \rho_a)}{\rho} \delta(\varphi - \varphi_a) \times$$

$$\times \delta(z - z_a) \left[1 + (\rho - \rho_a) \frac{\partial}{\partial \rho} + (z - z_a) \frac{\partial}{\partial z} \right], \quad (6)$$

где $\gamma = 2\pi\hbar^2 / (\alpha m_h^*)$ – мощность потенциала нулевого радиуса; α определяется энергией E_i связанного состояния такого же A^+ -центра в объемном полупроводнике; ρ_a, z_a – координаты A^+ -центра в КТ.

Однодырочная функция Грина $G(\rho, \varphi, z, \rho_a, \varphi_a, z_a, E_{\lambda h})$ к уравнению Шредингера, соответствующая источнику в точке $\vec{r}_1 = (\rho_1, \varphi_1, z_1)$ и энергии $E_{\lambda h}$, запишется в виде

$$G(\rho, \varphi, z, \rho_a, \varphi_a, z_a, E_n) = - \sum_{n_1, m, n_2} \frac{\Psi_{n_1, m, n_2}^{(n)*}(\rho_1, \varphi_1, z_1) \Psi_{n_1, m, n_2}^{(n)}(\rho, \varphi, z)}{|E_{\lambda h}| + E_{n_1, m, n_2}^{n, 0, 0}}, \quad (7)$$

где $E_{\lambda h}$ – энергия связи дырки, отсчитываемая от дна электронного адиабатического потенциала.

Используя выражения для одночастичных волновых функций (4) и энергетического спектра (5), для функции Грина $G(\rho, \varphi, z, \rho_a, \varphi_a, z_a, E_n)$ в единицах эффективной борновской энергии $E_h = \hbar^2 / (2m_h^* a_h^2)$ и эффективного борновского радиуса дырки $a_h = 4\pi\epsilon_0 \epsilon \hbar^2 / (m_h^* |e|^2)$, получим

$$\begin{aligned} G(\rho, \varphi, z, \rho_a, \varphi_a, z_a, E_{\lambda h}) &= \frac{-\beta_h}{2\pi^2 a_n^3 E_h} \exp \left[- \left(\frac{\rho^2 + \rho_a^2}{4a_1^2} + \frac{z^2 + z_a^2}{2a_n^2} \right) \right] \times \\ &\times \int_0^{+\infty} dt \exp \left[- (\eta_{\lambda h}^2 \beta_h - \beta_0 + w + 1)t \right] \sum_{n_2=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-t}}{2} \right)^{n_2} \frac{H_{n_2} \left(\frac{z_a}{a_n} \right) H_{n_2} \left(\frac{z}{a_n} \right)}{n_2!} \times \\ &\times \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp(-w|m|t) \left(\frac{\rho^2 \rho_a^2}{2a_1^2} \right)^{|m|} \exp \left(im \left((\varphi - \varphi_a) - \beta_h a^{*-2} t \right) \right) \times \\ &\times \sum_{n_1=0}^{+\infty} \frac{n_1!}{(n_1 + |m|)!} L_{n_1}^{|m|} \left(\frac{\rho^2}{2a_1^2} \right) L_{n_1}^{|m|} \left(\frac{\rho_a^2}{2a_1^2} \right) \exp[-2n_1 wt], \end{aligned} \quad (8)$$

здесь $\eta_{\lambda h}^2 = |E_{\lambda h}| / E_h$; $\beta_0 = \beta_n^s e^2 / 4\pi\epsilon_0 \epsilon R_0^* a_h E_h$; $R_0^* = R_0 / a_h$; $\beta_h = E_h / \hbar\omega_n$; $a^* = a_B / a_h$; $w = \sqrt{1 + \beta_h^2 a^{*-4}} / 2$.

Суммирование по квантовому числу n_2 можно выполнить, воспользовавшись формулой Мелера [9]:

$$\sum_{n_2=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-t}}{2}\right)^{n_2} \frac{H_{n_2}\left(\frac{z_a}{a_n}\right) H_{n_2}\left(\frac{z}{a_n}\right)}{n_2!} = \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \exp\left\{\frac{2z_a z e^{-t} - (z_a^2 + z^2) e^{-2t}}{a_n^2 (1-e^{-2t})}\right\}. \quad (9)$$

С помощью формулы Хилле – Харди для билинейной производящей функции полиномов Лагерра [9] можно выполнить суммирование ряда по квантовому числу n_1 :

$$\begin{aligned} \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{n_1!}{(n_1+|m|)!} L_{n_1}^{|m|}\left(\frac{\rho_a^2}{2a_1^2}\right) L_{n_1}^{|m|}\left(\frac{\rho^2}{2a_1^2}\right) \exp(-2n_1 w t) &= \left(\frac{\rho_a \rho}{2a_1^2}\right)^{-|m|} \exp[|m| w t] \times \\ &\times (1 - \exp(-2w t))^{-1} \exp\left[-\exp(-2w t) \frac{(\rho_a^2 + \rho^2)}{2a_n^2 (1 - \exp(-2w t))}\right] \times \\ &\times I_{|m|}\left(\frac{\rho_a \rho \exp(-w t)}{2a_1^2 (1 - \exp(-2w t))}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Суммирование по магнитному квантовому числу m дает [9]:

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp\left[\left(i(\varphi - \varphi_a) - \beta_h a^{*-2} t\right) m\right] I_{|m|}\left(\frac{\rho_a \rho \exp(-w t)}{2a_1^2 (1 - \exp(-2w t))}\right) &= \\ = \exp\left[\left(\exp\left[i(\varphi - \varphi_a) - \beta_h a^{*-2} t\right] + \exp\left[-i(\varphi - \varphi_a) + \beta_h a^{*-2} t\right]\right) \times \right. \\ &\left. \times \frac{\rho_a \rho \exp(-w t)}{2a_1^2 (1 - \exp(-2w t))}\right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Учитывая (9)–(11), после выделения расходящейся части (см. например [7]), получим

$$\begin{aligned} G(\rho, \varphi, z, \rho_a, \varphi_a, z_a; E_{\lambda h}) &= -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\beta_h} E_h a_h^3} \left\{ \exp\left[-\frac{(\rho_a^2 + \rho^2) w + z_a^2 + z^2}{4\beta_h a_h^2}\right] \times \right. \\ &\times \int_0^{+\infty} dt \exp\left[-\left(\beta_h \eta_{\lambda h}^2 - \beta_0 + w + \frac{1}{2}\right) t\right] \left[w(1 - e^{-2t})^{-\frac{1}{2}} (1 - \exp[-2w t])^{-1} \times \right. \\ &\left. \times \exp\left\{\frac{2z_a z e^{-t} - (z_a^2 + z^2) e^{-2t}}{2\beta_h a_h^2 (1 - e^{-2t})}\right\} \exp\left[-\exp[-2w t] \frac{(\rho_a^2 + \rho^2) w}{2\beta_h a_h^2 (1 - \exp[-2w t])}\right] \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \exp \left[\frac{1}{2} \left(\exp \left[i(\varphi - \varphi_a) - \beta_h a^{*-2} t \right] + \exp \left[-i(\varphi - \varphi_a) + \beta_h a^{*-2} t \right] \right) \times \right. \\ & \left. \times \frac{w \rho_a \rho \exp[-wt]}{\beta_h a_h^2 (1 - \exp[-2wt])} \right] - t^{-\frac{3}{2}} \exp \left[-\frac{(\rho - \rho_a)^2 w + (z - z_a)^2}{4\beta_h a_h^2 t} \right] + \\ & \left. + 2\sqrt{\pi\beta_h a_h} \frac{\exp \left[-\sqrt{\frac{(2\beta_h \eta_{\lambda h}^2 - 2\beta_0 + 2w + 1)((\rho - \rho_a)^2 w + (z - z_a)^2)}{2\beta_h a_h^2}}}{\sqrt{(\rho - \rho_a)^2 w + (z - z_a)^2}} \right]}{\sqrt{(\rho - \rho_a)^2 w + (z - z_a)^2}} \right]. \quad (12) \end{aligned}$$

Энергия связанного состояния дырки в суммарном поле (включая яму нулевого радиуса, находящуюся в точке $\vec{R}_a = (\vec{\rho}_a, z_a)$) является полюсом функции Грина, т.е. решением уравнения [7]

$$\alpha = \frac{2\pi\hbar^2}{m^*} (\hat{T}G)(\rho_a, \varphi_a, z_a, \rho_a, \varphi_a, z_a; E_{\lambda h}), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} (\hat{T}G)(\rho_a, \varphi_a, z_a, \rho_a, \varphi_a, z_a; E_{\lambda h}) &= \lim_{\substack{\rho \rightarrow \rho_a \\ \varphi \rightarrow \varphi_a \\ z \rightarrow z_a}} \left[1 + (\rho - \rho_a) \partial / \partial \rho + (z - z_a) \partial / \partial z \right] \times \\ & \times G(\rho, \varphi, z, \rho_a, \varphi_a, z_a; E_{\lambda h}). \end{aligned}$$

Подставляя (12) в (13), получим дисперсионное уравнение дырки, локализованной на A^+ -центре в КТ в магнитном поле:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\eta_{\lambda h}^2 - \beta_0 \beta_h^{-1} + (2\beta_h)^{-1} + w \beta_h^{-1}} = \\ & = \eta_i - \sqrt{\frac{2}{\pi\beta_h}} \int_0^{+\infty} dt \exp \left[-\left(\beta_h \eta_{\lambda h}^2 - \beta_0 + w + \frac{1}{2} \right) t \right] \times \\ & \times \left[\frac{1}{2t\sqrt{2t}} - w(1 - e^{-2t})^{-\frac{1}{2}} (1 - \exp(-2wt))^{-1} \exp \left[-\frac{z_a^{*2}}{2\beta_h} \operatorname{ctg} \left(\frac{t}{2} \right) \right] \right] \times \\ & \times \exp \left[-\frac{w \rho_a^{*2}}{2\beta_h (1 - \exp(-2wt))} (1 + \exp(-2wt) - 2 \exp(-wt) \operatorname{ch}(\beta_h a^{*-2} t)) \right], \quad (14) \end{aligned}$$

где

$$\eta_i^2 = |E_i| / E_h; \quad z_a^* = z_a / a_h; \quad \rho_a^* = \rho_a / a_h.$$

На рис. 1 представлена зависимость энергии связи дырки в примесном комплексе $A^+ + e$ от координат A^+ -центра в z - и в радиальном направлениях InSb КТ, а также от величины внешнего магнитного поля. Как видно из рис. 1, в магнитном поле имеет место пространственная анизотропия энергии связи дырки в примесном комплексе $A^+ + e$, обусловленная гибридным квантованием в радиальной плоскости КТ и размерным квантованием в направлении магнитного поля:

– энергия связи A^+ -состояния в радиальной плоскости КТ:

$$\left(E_{\lambda h}^{(QD)} \right)_{\rho} / E_d = \beta_h^{-1} w - 2\beta_0 \beta_h^{-1} / 3 + \eta_{\lambda h}^2, \quad (15)$$

– энергия связи A^+ -состояния в z -направлении КТ:

$$\left(E_{\lambda h}^{(QD)} \right)_z / E_h = (2\beta)^{-1} - \beta_0 \beta_h^{-1} / 3 + \eta_{\lambda h}^2. \quad (16)$$

Уменьшение энергии связи дырки $\left(E_{\lambda h}^{(QD)} \right)_z$ с ростом величины B связано с вытягиванием A^+ -орбитали в z -направлении КТ.

**Влияние магнитного поля на частотную зависимость
спектральной интенсивности рекомбинационного излучения
в квазиульмерной структуре с примесными комплексами $A^+ + e$**

Рассмотрим процесс излучательного перехода возбужденного электрона на уровень A^+ -центра. Для расчета частотной зависимости СИРИ необходимо получить выражение для волновой функции электрона, локализованного в основном состоянии сферически симметричной КТ в магнитном поле.

Во втором порядке теории возмущений энергетический спектр электрона во внешнем магнитном поле запишется в следующем виде [10]:

$$E = E^{(0)} + V_{n,l,m;n,l,m} + \sum_{n'l'm'} \frac{R_0^{*2} |V_{n,l,m;n',l',m'}|^2}{\pi^2 - \tilde{X}_{n',l'}^2}, \quad (17)$$

здесь $\tilde{X}_{n',l'}$ – корень функции Бесселя полуцелого порядка $l+1/2$; $E^{(0)} = \tilde{X}_{n,l}^2 E_h / R_0^{*2}$ – нулевое приближение к энергии электрона в размерно-квантованной зоне; $V_{n,l,m;n',l',m'}$ – матричный элемент оператора возмущения, который в сферических координатах имеет вид

$$\hat{V}_{n,l,m;n',l',m'} = -\frac{i\hbar\omega_B}{2} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{m_h^* \omega_B^2}{2} r^2 \sin^2 \theta. \quad (18)$$

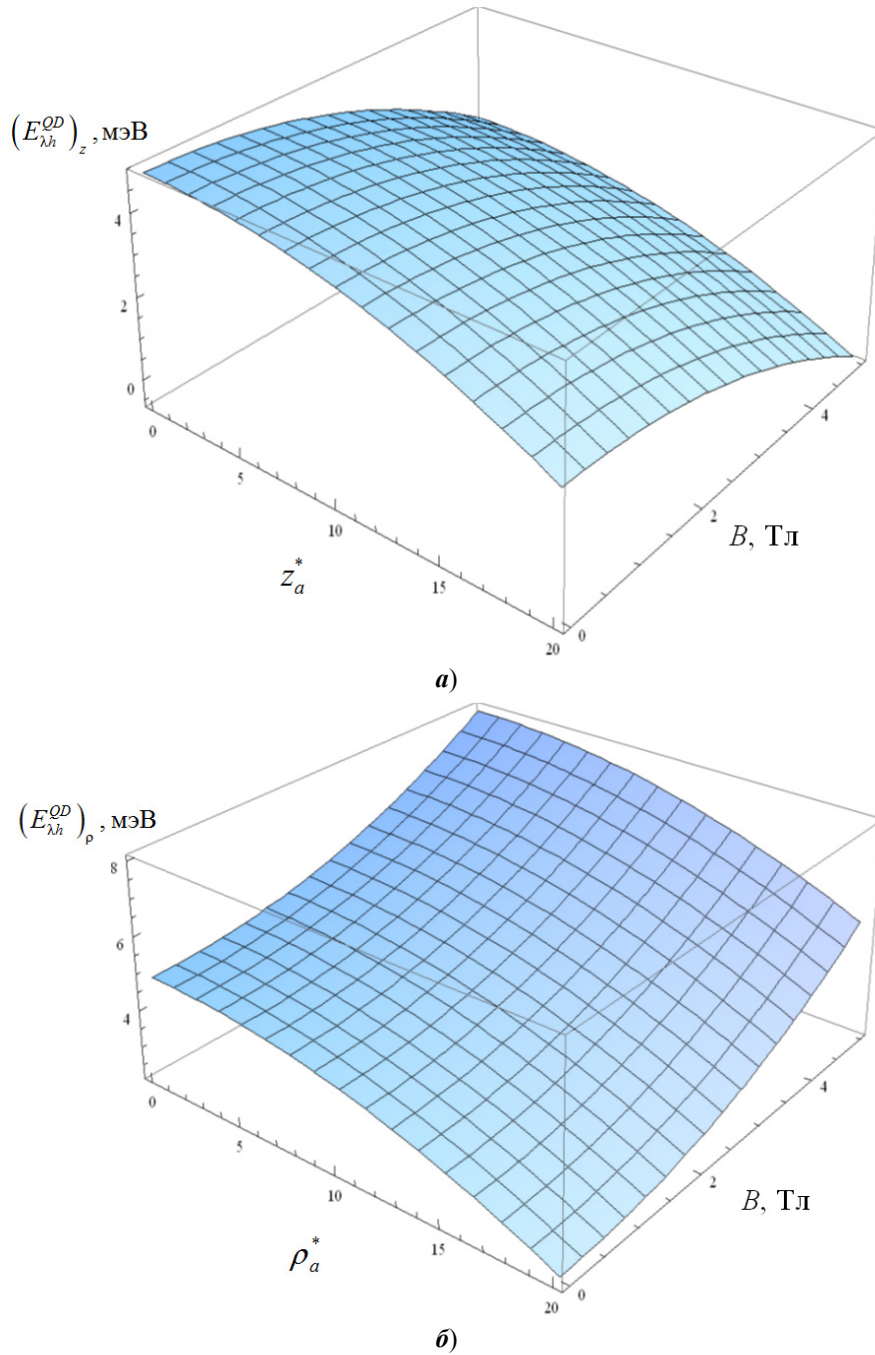


Рис. 1. Зависимость энергии связи дырки, локализованной на A^+ -центре, от координат A^+ -центра (z_a^*, ρ_a^*) : **a** – вдоль оси z ; **б** – в поперечном к магнитному полю направлении, и от величины внешнего магнитного поля B при $R_0 = 95$ нм, $\eta_i = 7$

Во втором порядке теории возмущений волновая функция электрона дается выражением вида [10]:

$$\Psi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi) = \Psi_{n,l,m}^{(0)}(r, \theta, \varphi) + \sum_{n'l'm'} \frac{R_0^{*2} V_{n,l,m;n',l',m'}}{\pi^2 - \tilde{X}_{n',l'}^2} \Psi_{n',l',m'}^{(0)}(r, \theta, \varphi), \quad (19)$$

где $\Psi_{n,l,m}^{(0)}(r, \theta, \varphi)$ – волновая функция нулевого приближения,

$$\Psi_{n,l,m}^{(0)}(r, \theta, \varphi) = Y_{l,m}(\theta, \varphi) \frac{J_{l+\frac{3}{2}}\left(\frac{\tilde{X}_{n,l}}{R_0^*} r^*\right)}{a_h^2 \sqrt{2\pi R_0^*} \sqrt{r^*} J_{l+3/2}(\tilde{X}_{n,l})}. \quad (20)$$

Матричный элемент $V_{n,l,m;n',l',m'}$ оператора возмущения с учетом (20) запишется как

$$V_{n,l,m;n',l',m'} = \frac{1}{2\pi R_0^* J_{l+\frac{3}{2}}(\tilde{X}_{n,l}) J_{l'+\frac{3}{2}}(\tilde{X}_{n',l'})} \times \\ \times \int_0^{R_0^*} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{l,m}^*(\theta, \varphi) J_{l+\frac{3}{2}}\left(\frac{\tilde{X}_{n,l}}{R_0^*} r^*\right) \hat{V}_{n,l,m;n',l',m'} Y_{l',m'}(\theta, \varphi) J_{l'+\frac{3}{2}}\left(\frac{\tilde{X}_{n',l'}}{R_0^*} r^*\right) r^* dr^*. \quad (21)$$

Используя рекуррентные соотношения между шаровыми функциями и свойства их ортогональности, интегралы по переменным θ и φ запишутся в виде

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{l,m}^*(\theta, \varphi) Y_{l',m'}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (22) \\ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{l,m}^*(\theta, \varphi) Y_{l',m'}(\theta, \varphi) \sin^3 \theta d\theta d\varphi = \\ = \sqrt{\frac{(l-m+4)(l-m+3)(l-m+2)(l-m+1)}{(2l+1)(2l-1)^2(2l-3)}} \delta_{ll'+2} \delta_{mm'-2} - \\ - \frac{2}{(2l+3)(2l-1)} \sqrt{(l-m)(l-m-1)(l+m+2)(l+m+1)} \delta_{ll'} \delta_{mm'-2} + \\ + \sqrt{\frac{(l+m+4)(l+m+3)(l+m+2)(l+m+1)}{(2l+5)(2l+3)^2(2l+1)}} \delta_{ll'-2} \delta_{mm'-2}. \quad (23)$$

Интегрирование по r^* дает

$$\int_0^{R_0^*} J_{l+\frac{3}{2}}\left(\frac{\tilde{X}_{n,l}}{R_0^*} r^*\right) J_{l'+\frac{3}{2}}\left(\frac{\tilde{X}_{n',l'}}{R_0^*} r^*\right) r^* dr^* = \frac{R_0^*}{(\tilde{X}_{n,l}^2 - \tilde{X}_{n',l'}^2)} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left[R_0^* \tilde{X}_{n',l} J_{l+\frac{1}{2}} \left(R_0^* \tilde{X}_{n',l} \right) J_{l+\frac{3}{2}} \left(R_0^* \tilde{X}_{n,l} \right) - \right. \\ & \left. - R_0^* \tilde{X}_{n,l} J_{l+\frac{1}{2}} \left(R_0^* \tilde{X}_{n,l} \right) J_{l+\frac{3}{2}} \left(R_0^* \tilde{X}_{n',l} \right) \right] \end{aligned} \quad (24)$$

и

$$\begin{aligned} & \int_0^{R_0^*} J_{l+\frac{3}{2}} \left(\frac{\tilde{X}_{n,l}}{R_0^*} r^* \right) J_{l'+\frac{3}{2}} \left(\frac{\tilde{X}_{n',l'}}{R_0^*} r^* \right) r^{*3} dr^* = \\ & = \frac{\tilde{X}_{n,l}^{l+\frac{3}{2}} \tilde{X}_{n',l'}^{l'+\frac{3}{2}}}{2^{l+l'+3} \Gamma \left(l'+\frac{5}{2} \right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma \left(l+k+\frac{5}{2} \right)} \left(\frac{\tilde{X}_{n,l}^{l+\frac{3}{2}}}{2R_0^*} \right)^{2k} \times \\ & \times \frac{F \left(-k, -l-k-\frac{3}{2}, l+\frac{5}{2}, \frac{\tilde{X}_{n',l'}^2}{\tilde{X}_{n,l}^2} \right)}{l+l'+2k+4}, \end{aligned} \quad (25)$$

где $F(\alpha, \beta, x)$ – вырожденная гипергеометрическая функция [8].

С учетом (22)–(25) рассматриваемый матричный элемент можно представить в виде

$$\begin{aligned} V_{n,l,m;n'l'm'} &= \sum_{n'=0}^{\infty} \left\{ \frac{\hbar \omega_B m}{4\pi \left(\tilde{X}_{n,l}^2 - \tilde{X}_{n',l}^2 \right) J_{l+\frac{3}{2}} \left(\tilde{X}_{n,l} \right) J_{l+\frac{3}{2}} \left(\tilde{X}_{n',l} \right)} \times \right. \\ & \times \left[R_0^* \tilde{X}_{n',l} J_{l+\frac{1}{2}} \left(R_0^* \tilde{X}_{n',l} \right) J_{l+\frac{3}{2}} \left(R_0^* \tilde{X}_{n,l} \right) - \right. \\ & \left. \left. - R_0^* \tilde{X}_{n,l} J_{l+\frac{1}{2}} \left(R_0^* \tilde{X}_{n,l} \right) J_{l+\frac{3}{2}} \left(R_0^* \tilde{X}_{n',l} \right) \right] + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k m_h^* \omega_B^2 R_0^* \left(\tilde{X}_{n,l}^{l+\frac{3}{2}} \right)^{2k+1}}{k! \Gamma \left(l+k+\frac{5}{2} \right) 2^{l+4+2k}} \times \right. \\ & \left. \times \sqrt{\frac{(l-m+4)(l-m+3)(l-m+2)(l-m+1)}{(2l+1)(2l-1)^2(2l-3)}} \frac{F \left(-k, -l-k-\frac{3}{2}, l+\frac{5}{2}, \frac{\tilde{X}_{n',l-2}^2}{\tilde{X}_{n,l}^2} \right)}{(2l+2k+2) \Gamma \left(l+\frac{1}{2} \right)} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2F\left(-k, -l-k-\frac{3}{2}, l+\frac{5}{2}, \frac{\tilde{X}_{n,l}^2}{\tilde{X}_{n,l}^2}\right)}{(2l+3)(2l-1)(2l+2k+4)}\sqrt{(l-m)(l-m-1)(l+m+2)(l+m+1)} + \\
 & +\frac{F\left(-k, -l-k-\frac{3}{2}, l+\frac{5}{2}, \frac{\tilde{X}_{n,l+2}^2}{\tilde{X}_{n,l}^2}\right)}{2l+2k+6} \times \\
 & \times \sqrt{\frac{(l+m+4)(l+m+3)(l+m+2)(l+m+1)}{(2l+5)(2l+3)^2(2l+1)}} \Bigg\}. \quad (26)
 \end{aligned}$$

СИРИ с учетом дисперсии размеров КТ определяется выражением вида [11]

$$\begin{aligned}
 \Phi(\omega) = & \frac{4\omega^2\sqrt{\epsilon}e^2}{c^3V} \left| \frac{\mathbf{P}_{eh}\mathbf{e}_0}{m_0} \right| \left| \int \sum_n \left| \int \Psi_{n,l,m}^*(\rho, \varphi, z) \Psi_\lambda(\rho, \varphi, z) d\rho d\varphi dz \right|^2 \times \right. \\
 & \left. \times P(u) \delta(E_i - E_f - \hbar\omega) du, \quad (27)
 \end{aligned}$$

где m_0 – масса свободного электрона; \mathbf{P}_{eh} – матричный элемент оператора импульса на блоховских амплитудах зонных носителей; ω – частота излучаемой электромагнитной волны поляризации \mathbf{e}_0 ; V – объем КТ; $P(u)$ – функция Лифшица – Слезова [12]:

$$P(u) = \begin{cases} \frac{3^4 eu^2 \exp[-1/(1-2u/3)]}{2^{\frac{5}{3}}(u+3)^{\frac{7}{3}}(3/2-u)^{\frac{11}{3}}}, & u < \frac{3}{2}, \\ 0, & u > \frac{3}{2}. \end{cases} \quad (28)$$

Волновая функция A^+ -состояния, как известно [7], только постоянным множителем отличается от одночастичной функции Грина (12):

$$\begin{aligned}
 \Psi_{\lambda h}(\rho, \varphi, z) = & C \exp\left(-\frac{w\rho^2 + z^2}{4\beta_h a_h^2}\right) \times \\
 & \times \int_0^{+\infty} dt \exp\left[-\left(\beta_h \eta_{\lambda h}^2 - \beta_0 + w + \frac{1}{2}\right)t\right] (1 - e^{-2t})^{-\frac{1}{2}} (1 - \exp[-2wt])^{-1} \times \\
 & \times \exp\left\{-\frac{z^2 \exp[-2t]}{2\beta_h a_h^2 (1 - \exp[-2t])}\right\} \exp\left[-\exp[-2wt] \frac{w\rho^2}{4\beta_h a_h^2 (1 - \exp[-2wt])}\right], \quad (29)
 \end{aligned}$$

где C – нормировочный множитель, определяемый выражением вида

$$C = \left[-2^{-\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{3}{2}} \beta_h^{\frac{3}{2}} a_h^3 w \Gamma\left(\frac{1}{2} - w\right) \frac{\Gamma\left(\frac{\beta_h \eta_{h\lambda}^2 + w}{2} + \frac{5}{4}\right)}{\left(\frac{\beta_h \eta_{h\lambda}^2 + w}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 \Gamma\left(\frac{\beta_h \eta_{h\lambda}^2 - w}{2} + \frac{3}{4}\right)} \times \right. \\ \left. \times \left[\left(\frac{\beta_h \eta_{h\lambda}^2 + w}{2} + \frac{1}{4}\right) \left[\Psi\left(\frac{\beta_h \eta_{h\lambda}^2 + w}{2} + \frac{5}{4}\right) - \Psi\left(\frac{\beta_h \eta_{h\lambda}^2 - w}{2} + \frac{3}{4}\right) \right] - 1 \right] \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (30)$$

Учитывая (20), (26) и (29), матричный элемент излучательного перехода электрона из основного состояния размерно-квантованной зоны на уровень A^+ -центра в КТ в магнитном поле можно записать в виде

$$M_{1,\lambda} = \frac{C^+ (2\beta_h)^{\frac{5}{4}} a_h^2}{2\pi R_0^{*2} J_{3/2}(\tilde{X}_{n,1})} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \rho^* d\rho^* dz^* d\varphi \times \\ \times \int_0^{+\infty} dt \exp\left[-\left(\beta_h \eta_{\lambda h}^2 - \beta_0 + w + \frac{1}{2}\right)t\right] (1 - e^{-2t})^{-\frac{1}{2}} (1 - \exp[-2wt])^{-1} \times \\ \times \exp\left[-\left(\frac{z^{*2}}{2\beta_h} \frac{1 + \exp[-2t]}{1 - \exp[-2t]} + \frac{\rho^{*2} w}{2\beta_h} \frac{1 + \exp[-2wt]}{1 - \exp[-2wt]}\right)\right] \frac{\rho^*}{(\rho^{*2} + z^{*2})^{\frac{3}{4}}} \times \\ \times \left[\frac{J_{5/2}\left(\frac{\tilde{X}_{n,1}}{R_0^*} \sqrt{\rho^{*2} + z^{*2}}\right)}{J_{5/2}(\tilde{X}_{n,1})} + \sum_{n'=1}^{\infty} \frac{R_0^{*2} V_{n,1,-1;n',1,-1}}{\pi^2 - \tilde{X}_{n',1}^2} \frac{J_{5/2}\left(\frac{\tilde{X}_{n',1}}{R_0^*} \sqrt{\rho^{*2} + z^{*2}}\right)}{J_{5/2}(\tilde{X}_{n',1})} \right], \quad (31)$$

где $R_0^* = R_0/a_h$.

Выполняя в (31) интегрирование, получим

$$M_{1,\lambda} = \frac{C^+ (2\beta_h)^{\frac{5}{4}} a_h^2}{2\pi R_0^{*2} J_{3/2}(\tilde{X}_{n,1})} \int_0^{+\infty} dt \exp\left[-\left(\beta_h \eta_{\lambda h}^2 - \beta_0 + w + \frac{1}{2}\right)t\right] (1 - e^{-2t})^{-\frac{1}{2}} \times \\ \times (1 - \exp[-2wt])^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{1 - \exp[-2wt]}{1 + \exp[-2wt]}\right)^{2j + \frac{5}{2}} \times \\ \times \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma\left(2j + \frac{5}{2}\right) \left(\frac{\tilde{X}_{n,1} \sqrt{2\beta_h}}{2R_0^*}\right)^{2j + \frac{3}{2}} \left(\frac{1 + \exp[-2t]}{1 - \exp[-2t]} - \frac{1 + \exp[-2wt]}{1 - \exp[-2wt]}\right)^{-\frac{1}{2}} - \right.$$

$$\left. \begin{aligned} & -\bar{R}_0^{*2} \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n'} (2j+3)!}{2n'! \left(2j + \frac{5}{2} + n'\right)} \left(\frac{\tilde{X}_{n',1} \sqrt{2\beta_h}}{2\bar{R}_0^*}\right)^{2j+\frac{3}{2}} \times \\ & \times \frac{V_{n,1,-1;n',1,-1}}{\pi^2 - \tilde{X}_{n',1}^2} \left(\frac{1+\exp[-2wt]}{1-\exp[-2wt]}\right)^{2j+\frac{5}{2}+n'} \left(\frac{1+\exp[-2t]}{1-\exp[-2t]} - \frac{1+\exp[-2wt]}{1-\exp[-2wt]}\right)^{-2j-3} \end{aligned} \right] \quad (32)$$

После интегрирования в (27) окончательно получим

$$\begin{aligned} \Phi(X) = & \Phi_0 \frac{X^2 \bar{\beta}_h^4 u_1 \bar{w}}{\left(J_{\frac{3}{2}}(\tilde{X}_{n,0})\right)^2 \bar{R}_0^{*5}} \times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \bar{w}\right) \Gamma(\Delta + 1)}{\Delta^2 \Gamma\left(\Delta - \bar{w} + \frac{1}{2}\right)} \times \\ & \times \left[\Delta \left[\Psi(\Delta + 1) - \Psi\left(\Delta - \bar{w} + \frac{1}{2}\right) \right] - 1 \right] P(u_1) \times \\ & \times \left[\int_0^{+\infty} dt \exp\left[-\left(\bar{\beta}_h \eta_{\lambda h}^2 u_1^{\frac{3}{2}} - \bar{\beta}_0 u_1^{-1} + \bar{w} + \frac{1}{2} \right) t \right] (1 - e^{-2t})^{-\frac{1}{2}} (1 - \exp[-2\bar{w}t])^{-1} \times \right. \\ & \times \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{1 - \exp[-2\bar{w}t]}{1 + \exp[-2\bar{w}t]} \right)^{2j+\frac{5}{2}} \times \\ & \times \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma\left(2j + \frac{5}{2}\right) \left(\frac{\tilde{X}_{n,1} \sqrt{2\beta_h}}{2\bar{R}_0^*}\right)^{2j+\frac{3}{2}} \left(\frac{1+\exp[-2t]}{1-\exp[-2t]} - \frac{1+\exp[-2wt]}{1-\exp[-2wt]}\right)^{-\frac{1}{2}} - \right. \\ & \left. - \bar{R}_0^{*2} \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n'} (2j+3)!}{2n'! \left(2j + \frac{5}{2} + n'\right)} \left(\frac{\tilde{X}_{n',1} \sqrt{2\beta_h}}{2\bar{R}_0^*}\right)^{2j+\frac{3}{2}} \times \right. \\ & \times \frac{V_{n,1,-1;n',1,-1}}{\pi^2 - \tilde{X}_{n',1}^2} \left(\frac{1+\exp[-2wt]}{1-\exp[-2wt]}\right)^{2j+\frac{5}{2}+n'} \times \\ & \left. \left. \times \left(\frac{1+\exp[-2t]}{1-\exp[-2t]} - \frac{1+\exp[-2wt]}{1-\exp[-2wt]}\right)^{-2j-3} \right]^2 \right] \quad (33) \end{aligned}$$

где

$$\Phi_0 = 6\sqrt{\epsilon}e^2 2^2 a_h^3 \pi^{-\frac{3}{2}} |\mathbf{p}_{eh}\mathbf{e}_0| / \pi^2 c^3 m_0 ; \Delta = \left(\bar{\beta}_h \eta_{h\lambda}^2 u^{\frac{3}{2}} + \bar{w} \right) / 2 + 1/4 ;$$

$$\bar{w} = \sqrt{1 + \bar{\beta}_h^2 u^3 a^{*-4}} / 2 ; \bar{\beta}_0 = \beta_n e^2 / 4\pi\epsilon_0 \epsilon a_h \bar{R}_0^* ;$$

$$\bar{\beta}_h = (3E_h a_h \bar{R}_0^{*3} \pi \epsilon_0 \epsilon)^{1/2} / (\pi^2 e^2)^{1/2} ; X = \hbar\omega / E_d ;$$

u является корнем трансцендентного уравнения вида

$$\pi^2 / R_0^{*2} u + \sum_{n'=1}^{\infty} R_0^{*2} u (V_{1n'}(u))^2 / (\pi^2 - X_{n',1}^2) = \eta_{\lambda h}^2 + X .$$

На рис. 2 приведена частотная зависимость СИРИ, а также ее зависимость от величины внешнего магнитного поля, построенная с помощью формулы (33). Можно видеть, что СИРИ в магнитном поле возрастает, это связано с ростом интеграла перекрытия огибающих волновых функций связанной на A^+ -центре дырки и локализованного в основном состоянии КТ электрона.

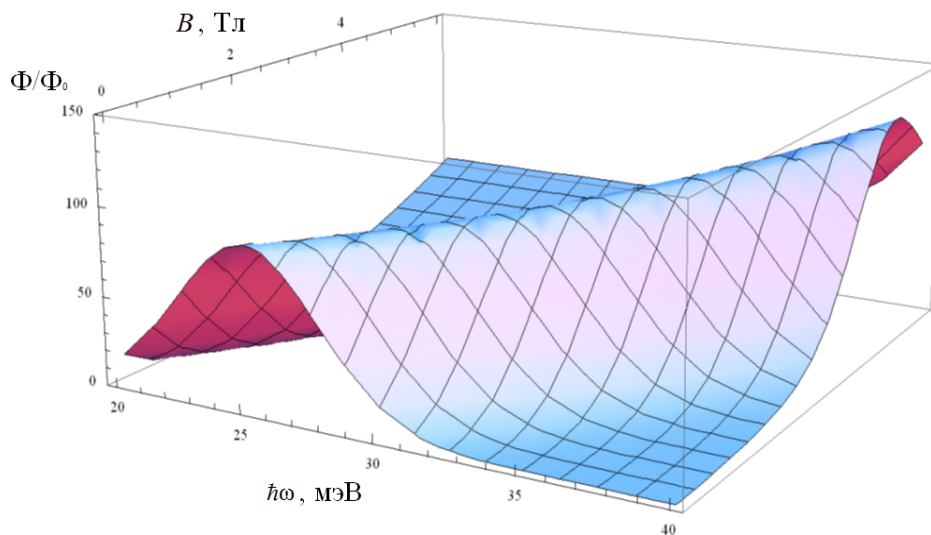
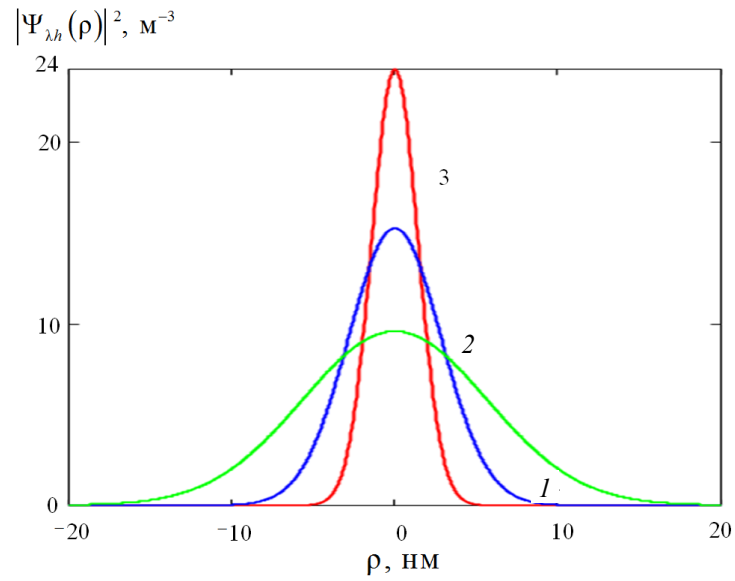
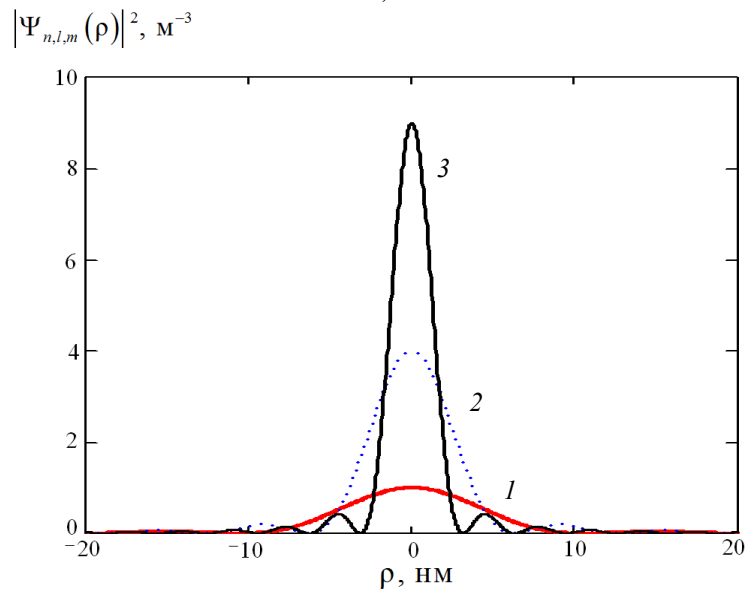


Рис. 2. Зависимость спектральной интенсивности рекомбинационного излучения (в относительных единицах) от энергии излучаемого фотона $\hbar\omega$ и величины внешнего магнитного поля B для квазиульмерной структуры InSb КТ при $R_0 = 55$ нм

На рис. 3 представлена координатная зависимость квадрата модуля соответственно волновой функции A^+ -состояния и электронной волновой функции основного состояния для различных значений величины внешнего магнитного поля. Видно, что с ростом величины B увеличивается степень локализации как дырочной (рис. 3,а), так и электронной (рис. 3,б) волновых функций, и соответственно растет интеграл их перекрытия.



а)



б)

Рис. 3. Координатная зависимость квадрата модуля волновой функции:
 а – A^+ -состояния; б – электронной волновой функции для различных значений величины B : 1 – $B = 0$; 2 – $B = 2$ Тл; 3 – $B = 5$ Тл (при $R_0 = 20$ нм)

Заключение

Методом потенциала нулевого радиуса в адиабатическом приближении исследована зависимость энергии связи дырки в комплексе $A^+ + e$ от величины внешнего магнитного поля. Показано, что в магнитном поле имеет место пространственная анизотропия энергии связи A^+ -состояния из-за гибридного квантования в радиальной плоскости КТ и размерного квантования

в направлении внешнего магнитного поля. В дипольном приближении проведен расчет частотной зависимости СИРИ для квазиульмерной структуры во внешнем магнитном поле с учетом дисперсии радиуса КТ. Показано, что в магнитном поле происходит смещение кривой СИРИ в коротковолновую область спектра и увеличение вероятности излучательного перехода электрона на уровень A^+ -центра, что связано с ростом интеграла перекрытия огибающих волновых функций связанной на A^+ -центре дырки и локализованного в основном состоянии КТ электрона. Полученные результаты могут быть использованы при разработке источников ИК, либо терагерцового излучения (в зависимости от величины радиуса КТ), на основе квазиульмерных структур с примесными комплексами с управляемыми во внешнем магнитном поле параметрами.

Список литературы

1. Циркулярно поляризованная фотолюминесценция, связанная с A^+ -центрами в квантовых ямах GaAs/AlGaAs / П. В. Петров, Ю. Л. Иванов, К. С. Романов, А. А. Тонких, Н. С. Аверкиев // Физика и техника полупроводников. – 2006. – Т. 40. – С. 1099–1102.
2. **Петров, П. В.** Циркулярная поляризация фотолюминесценции двумерной системы A^+ -центров в магнитном поле / П. В. Петров, Ю. Л. Иванов, Н. С. Аверкиев // Физика и техника полупроводников. – 2011. – Т. 45. – С. 794–800.
3. Долговременная кинетика фотолюминесценции квантовых точек InAs/AlAs в магнитном поле / Т. С. Шамирзаев, А. М. Гилинский, А. К. Бакаров, А. И. Торопов, С. А. Фигуренко, К.С. Журавлев // Физика и техника полупроводников. – 2005. – Т. 39. – С. 35–37.
4. Фотолюминесценция квантовых точек InAs, выращенных на разориентированных подложках GaAs / Г. В. Астахов, В. П. Кочерешко, Д. Г. Васильев, В. П. Евтихий, В. Е. Токранов, И. В. Кудряшов, Г. В. Михайлов // Физика и техника полупроводников. – 1999. – Т. 33. – С. 1084–1087.
5. **Левашов, А. В.** Энергетический спектр комплекса $A^+ + e$ в квантовой точке в адиабатическом приближении / А. В. Левашов, В. Д. Кревчик // Физика твердого тела. – 2006. – Т. 48, № 3. – С. 548–550.
6. **Екимов, А. И.** Квантование энергетического спектра дырок в адиабатическом потенциале электрона / А. И. Екимов, А. А. Онущенко, Ал. Л. Эфрос // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1986. – Т. 43, № 6. – С. 292–294.
7. **Кревчик, В. Д.** Анизотропия магнитооптического поглощения комплексов «квантовая точка – примесный центр» / В. Д. Кревчик, А. Б. Грунин, Р. В. Зайцев // Физика и техника полупроводников. – 2002. – Т. 36, № 10. – С. 1225–1232.
8. **Градштейн, И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М. : Физматгиз, 1962. – С. 1100.
9. **Бейтман, Г.** Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтман, А. Эрдейи. – М. : Наука, 1966. – Т. 2. – С. 296.
10. **Ландау, Л. Д.** Квантовая механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Физматлит, 2004. – Т. 3. – С. 800.
11. Commun. Theor. Phys. – 2005. – Vol. 44. – P. 375.
12. **Лифшиц, И. М.** О кинетике диффузионного распада пересыщенных твердых растворов / И. М. Лифшиц, В. В. Слезов // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1958. – Т. 35, № 2 (8). – С. 479–492.

References

1. Petrov P. V., Ivanov Yu. L., Romanov K. S., Tonkikh A. A., Averkiev N. S. *Fizika i tekhnika poluprovodnikov* [Physics and technology of semiconductors]. 2006, vol. 40, pp. 1099–1102.
2. Petrov P. V., Ivanov Yu. L., Averkiev N. S. *Fizika i tekhnika poluprovodnikov* [Physics and technology of semiconductors]. 2011, vol. 45, pp. 794–800.
3. Shamirzaev T. S., Gilinskiy A. M., Bakarov A. K., Toropov A. I., Figurenko S. A., Zhuravlev K. S. *Fizika i tekhnika poluprovodnikov* [Physics and technology of semiconductors]. 2005, vol. 39, pp. 35–37.
4. Astakhov G. V., Kochereshko V. P., Vasil'ev D. G., Evtikhiev V. P., Tokranov V. E., Kudryashov I. V., Mikhaylov G. V. *Fizika i tekhnika poluprovodnikov* [Physics and technology of semiconductors]. 1999, vol. 33, pp. 1084–1087.
5. Levashov A. V., Krevchik V. D. *Fizika tverdogo tela* [Solid state physics]. 2006, vol. 48, no. 3, pp. 548–550.
6. Ekimov A. I., Onushchenko A. A., Efros Al. L. *Pis'ma v Zhurnal eksperimental'noy i teoreticheskoy fiziki* [Letters to the Journal of experimental and theoretical physics]. 1986, vol. 43, no. 6, pp. 292–294.
7. Krevchik V. D., Grunin A. B., Zaytsev R. V. *Fizika i tekhnika poluprovodnikov* [Physics and technology of semiconductors]. 2002, vol. 36, no. 10, pp. 1225–1232.
8. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* [Tables of integrals, sums, rows and products]. Moscow: Fizmatgiz, 1962, p. 1100.
9. Beytman G., Erdeyi A. *Vysshie transsendentnye funktsii* [Higher transcendental functions]. Moscow: Nauka, 1966, vol. 2, p. 296.
10. Landau L. D., Lifshits E. M. *Kvantovaya mekhanika* [Quantum mechanics]. Moscow: Fizmatlit, 2004, vol. 3, p. 800.
11. *Commun. Theor. Phys.* 2005, vol. 44, p. 375.
12. Lifshits I. M., Slezov V. V. *Zhurnal eksperimental'noy i teoreticheskoy fiziki* [Journal of experimental and theoretical physics]. 1958, vol. 35, no. 2 (8), pp. 479–492.

Кревчик Владимир Дмитриевич

доктор физико-математических наук,
профессор, декан факультета
приборостроения, информационных
технологий и электроники, Пензенский
государственный университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: physics@pnzgu.ru

Krevchik Vladimir Dmitrievich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, dean of the faculty
of instrument engineering, information
technology and electronics, Penza
State University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

Разумов Алексей Викторович

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра общей физики
и методики обучения физике,
Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: physics@pnzgu.ru

Razumov Aleksey Viktorovich

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of general
physics and physics teaching technique,
Penza State University (40 Krasnaya
street, Penza, Russia)

Будянский Павел Сергеевич

аспирант, Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: physics@pnzgu.ru

Budyanskiy Pavel Sergeevich

Postgraduate student, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

УДК 535.8; 537.9; 539.33

Кревчик, В. Д.

Влияние магнитного поля на рекомбинационное излучение, связанное с A^+ -центрами в квантовых точках / В. Д. Кревчик, А. В. Разумов, П. С. Будянский // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 3 (35). – С. 125–143.