A. M. Vershik, K. P. Kokhas', Calculation of the Grothendieck group of the algebra $\mathbb{C}(\mathrm{PSL}(2,k))$, where $k$ is a countable algebraically closed field,
*Algebra i Analiz*, 1990, Volume 2, Issue 6, 98–106

https://www.mathnet.ru/eng/aa222

А.М.Вершик, К.П.Кохась

# ВЫЧИСЛЕНИЯ ГРУППЫ ГРОТЕНДИКА АЛГЕБРЫ $\mathbb{C}(\mathrm{PSL}(2,k))$, ГДЕ $k$ – СЧЕТНОЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИ ЗАМКНУТОЕ ПОЛЕ

В статье дается полное описание группы Гротендика алгебры $\mathbb{C}(\mathrm{PSL}(2,k))$, где $k$ – счетное алгебраически замкнутое поле. Несмотря на почти полное отсутствие следов у алгебры $\mathbb{C}(\mathrm{PSL}(2,k))$, ее группа Гротендика имеет очень богатую структуру.

## 1. Введение. Формулировка результата

Пусть $F_p$ – простое конечное поле характеристики $p$, $\overline{F}_p$ – его алгебраическое замыкание. Рассмотрим счетную группу $\Gamma=\mathrm{PSL}(2,\overline{F}_p)$ и $\mathbb{C}(\Gamma)$ – ее комплексную групповую алгебру. В этой работе мы даем полное описание группы Гротендика конечно-порожденных проективных виртуальных модулей этой алгебры с указанием в ней конуса истинных проективных модулей.

Напомним, что поле $\overline{F}_p$ есть объединение конечных полей: $\overline{F}_p=\lim\limits_{\longrightarrow}\mathrm{ind}\, F_{p^n}$ упорядоченных по делимости показателей. Поэтому группа $\Gamma$ – *счетная локально-конечная группа*, являющаяся индуктивным пределом конечных групп $\Gamma_{p^n}=\mathrm{PSL}(2,F_{p^n})$, а алгебра $\mathbb{C}(\Gamma)$ есть *локально-полупростая алгебра* (ЛП-алгебра): $\mathbb{C}(\Gamma)=\lim\limits_{\longrightarrow}\mathbb{C}(\Gamma_{p^n})$. Теория ЛП-алгебр, на которую мы опираемся, развита в последние годы; она обнаружила многочисленные связи с другими областями и оказалась весьма содержательной. Мы будем опираться на систематическое изложение в обзоре [1], где указана и другая литература.

Прежде всего подчеркнем, что, как и для большинства локально-конечных групп (ЛП-алгебр), описание с точностью до эквивалентности всех неприводимых унитарных представлений группы $\Gamma$ (или неприводимых *-представлений алгебры $\mathbb{C}(\Gamma)$ – задача труднообозримая. По терминологии теории представлений эта группа „дикая" – ее дуальный объект не имеет разумной параметризации. В то же время классификация проективных модулей, описание соответствующей категории и функтора $K_0$ есть содержательная задача, ставшая традиционной в этой теории (ср. с [2]). Ответ на эти вопросы обнаруживает не встречавшиеся до сих пор эффекты, главный из которых состоит в том, что при почти полном отсутствии следов (характеров) на алгебре $\mathbb{C}(\Gamma)$ ее группа Гротендика оказывается чрезвычайно богатой и в то же время хорошо

Ключевые слова: группа Гротендика (проективные модули), локально-полупростая алгебра, неприводимое представление.

обозримой.

Для удобства читателя наше изложение строится почти независимо от других источников, хотя ряд связей (например, с теорией динамических систем) в данной работе не затронут.

*Группа Гротендика* ($=K_0$-функтор = группа размерности) алгебры $A$ есть свободная абелева группа, образующие которой есть классы эквивалентности конечно-порожденных проективных модулей, а соотношения имеют виз $[P]+[Q]=[R]$, где $[P]$ - обозначение класса эквивалентности модуля $P$, а модули $P$, $Q$, $R$ связаны короткой точной последовательностью $0 \to P \to Q \to R \to 0$. В нашем случае (и воообще для ЛП-алгебр) можно ограничиться соотношением $[P]+[Q]=[P\oplus Q]$, где $P\oplus Q$ - прямая сумма модулей $P$ и $Q$. В группе $K_0(A)$ имеется конус истинных моделей - $K_0^+(A)$, причем $K_0(A) = K_0^+(A) - K_0^+(A)$, а также выделенный элемент $\mathbb{1}\in K_0(A)$ - одномерный свободный модуль, являющийся порядковой единицей в $K_0(A)$. Замечательная теорема Элиотта [1] утверждает, что тройка $(K_0(A),\ K_0^+(A),\ \mathbb{1})$ как упорядоченная абелева группа с выделенным элементом однозначно с точностью до изоморфизма определяет ЛП-алгебру $A$. Разумеется, для произвольных алгебр, вообще говоря, ничего подобного нет и группа Гротендика несет лишь незначительную информацию об алгебре.

Группа Гротендика $K_0(B)$ конечномерной полупростой алгебры $B$ есть свободная абелева группа $K_0(B) = \sum_{\pi_i} \oplus\mathbb{Z}$, образующие которой соответствуют простым компонентам алгебры, конус $K_0^+(B)$ есть неотрицательный октант, а отмеченный элемент - вектор $(r_1, r_2 \ldots r_k)$, где $r_i$ - кратность вхождения простого модуля $\pi_i$ в $B$.

Для ЛП-алгебры $A$ группа $K_0(A)$ есть индуктивный предел свободных абелевых групп и ее структура гораздо более сложна.

Если $\varphi$ - след на ЛП-алгебре $A$ (т.е. $\varphi\colon A \to \mathbb{R}$ - линейный функционал, $\varphi(ab)=\varphi(ba), \varphi(a^*a)\ge 0$, $\varphi(e)=1$), то он корректно определен как гомоморфизм и на $K_0(A)$, при этом он неотрицателен на $K_0^+(A)$ и нормирован: $\varphi(\mathbb{1})=1$ (см. [1]). Поэтому естественный шаг в описании $K_0(A)$ - нахождение следов. В нашем случае на $\mathbb{C}(\Gamma)$ существует лишь два неразложимых следа, что резко контрастирует с известными классическими примерами: симметрическая группы $S_\infty$, $U(\infty)$ (см. [1,2]). Оказывается, что в отличие от этих примеров, следы как гомоморфизмы $K_0(A) \to \mathbb{R}$ не разделяют проективные модули, т.е. существуют $P_1, P_2 \in K_0^+(A), [P_1]\ne[P_2]$, для которых $\varphi(P_1)=\varphi(P_2)$ для всех следов $\varphi$. Поэтому главной частью в решении задачи является описание ядра $K_{00}(A)$ - аннулятора всех следов и последующее восстановление группы $K_0(A)$ по ядру и образу гомоморфизмов следов (здесь это $\mathbb{Q}+\mathbb{Z}$). И тут проявляется второй новый эффект: $K_0(A)$ есть расширение с нетривиальным 2-коциклом. Как показывает анализ, это связано с некоторой нерегулярностью поведения кратностей в разложении представлений $\Gamma_{p^n}$ на неприводимые при ограничении на меньшую подгруппу (см. таблицу леммы 1).

В целом следует сказать, что несмотря на некоторую громоздкость, описание $K_0(\mathbb{C}(\Gamma))$ для $\mathrm{PSL}(2,\bar{F}_p)$ естественнее, чем для групп $\mathrm{PSL}(2,k)$ над конечными полями, хотя бы потому, что не возникает модулей, связанных с квадратичными расширениями полей. Некоторые следствия и обобщения отмечены в конце статьи.

Перейдем к точным формулировкам.

Нам удобно представлять поле $\bar{F}_p$ не как предел $\varinjlim F_{p^n}$ по всему множеству натуральных чисел, упорядоченному по делимости, а выбрать линейную цепь в этом множестве. Рассмотрим последовательность $\{n_k\}$ натуральных чисел такую, что для всякого простого числа $r$ и натурального $s$ найдется такое $k$, что произведение $n_1n_2\ldots n_k$ делится на $r^s$; зафиксируем последовательность $q_k=p^{n_1n_2\ldots n_k}$. Тогда поле $\bar{F}_p = \bigcup_n F_{q_n}$, где $F_{q_1}\subset F_{q_2}\subset\ldots$ и соответственно $\Gamma=\varinjlim \Gamma_{q_n}$, где $\Gamma_{q_1}\subset\Gamma_{q_2}\ldots$ Подчеркнем, что все дальнейшие рассмотрения не зависят от конкретного выбора $\{n_k\}$, и потому мы можем использовать произвол в определении этой последовательности. В частности, мы будем считать все числа $n_k$-четными.

Символами $F^*_q$, $\bar{F}^*_p$ обозначим, как обычно, мультипликативные группы соответствующих полей. $F^*_p=\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$, $\bar{F}^*_p=\varinjlim F^*_{q_n}$. В частности, группа $\bar{F}^*_p$ содержит в качестве подгруппы любую из групп $F^*_{p^n}$. Пусть $G=K_0(\mathbb{C}(\Gamma))$, $G_n=K_0(\mathbb{C}(\Gamma_{p^n}))$. Тогда $G=\varinjlim G_n$. Пусть $H_q=(F^*_q)^\wedge$, $H=(\bar{F}^*_p)^\wedge$ - группы характеров $F^*_q$ и $\bar{F}^*_p$. Будучи двойственной к дискретной периодической группе, $H$ топологически является вполне несвязным компактом. Обозначим $\mathbb{Z}(H)$ - пространство непрерывных целозначных симметричных функций на $H$ с четным значением в единице, т.е. функций таких, что

1) $\forall\gamma\in H \quad f(\gamma)\in\mathbb{Z}$,

2) $\forall\gamma\in H \quad f(\gamma)=f(\gamma^{-1})$,

3) $f(\mathbb{1})\in 2\mathbb{Z}$, где $\mathbb{1}$ - единичный характер $\bar{F}^*_p$.

Обозначим $\mathbb{Z}^0(H)$ - подпространство функций из $\mathbb{Z}^0(H)$ с интегралом, равным нулю:

4) $\int f(\gamma)d\gamma=0$, интегрирование по мере Хаара на группе $H$. Мы рассматриваем $\mathbb{Z}^0(H)$ как аддитивную группу. Заметим, что $\mathbb{Z}^0(H)=\varinjlim \mathbb{Z}^0(H_{p^n})$, где $\mathbb{Z}^0(H_{p^n})$ - пространство функций на конечной группе $(H_{p^n})$, удовлетворяющим условиям, аналогичным 1)-4). Пусть $f_n$ - функции из $\mathbb{Z}^0(H)$, определяемые следующим образом:

$$f_n(\gamma) = \begin{cases} p^n-2, & \text{если } \gamma|_{F^*_{p^n}} \equiv 1, \\ -1, & \text{иначе}, \qquad n=1,2,\ldots \end{cases}$$

$$f_0(\gamma)\equiv 0.$$

Пусть $\mathbb{Q}_{(p)}$ - группа рациональных чисел со знаменателями - степенями числа $p$.

Определим 2-коцикл на аддитивной группе $\mathbb{Q}$ со значениями в группе $\mathbb{Z}^0(H)\oplus\mathbb{Z}$. Через $z$ обозначим образующую прямого слагаемого $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}^0(H)\oplus\mathbb{Z}$. Всякое рациональное число $r=\frac{\ell}{m}$ (несократимая запись) можно единственным образом представить в виде $r=$

$= \frac{a}{p^s} + \frac{b_r}{p^{\varphi(m)}-1}$, где $\varphi(m)$ - функция Эйлера и второе слагаемое лежит в промежутке $[0,1]$. (В случае $m=1$ второе слагаемое равно нулю). Обозначим $\tilde{r}$ - $p$-целую компоненту этого разложения: $\tilde{r} = \frac{b_r}{p^{\varphi(m)}-1}$. Пусть $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, $r_3=r_1+r_2$, $r_i=\frac{\ell_i}{m_i}$ - несократимые записи этих чисел. Коцикл задается формулой

$$\alpha(r_1,r_2) = \tilde{r}_3 f_{\varphi(m_3)} - \tilde{r}_1 f_{\varphi(m_1)} - \tilde{r}_2 f_{\varphi(m_2)} - [\tilde{r}_1+\tilde{r}_2]z. \tag{1}$$

Отметим, что по определению коцикл равен нулю для $r_1, r_1 \in \mathbb{Q}_{(p)}$. В определении коцикла не обязательно использовать функцию Эйлера, под $\varphi$ можно понимать любую функцию натурального числа, удовлетворяющую условию $(p^{\varphi(m)}-1)\vdots\frac{m}{p^s}$.

Основной результат этой статьи состоит в следующем:

**Теорема.** *Группа Гротендика* $G=K_0(\mathbb{C}(\Gamma))$ *изоморфна нетривиальному расширению* $\mathbb{Q}_\alpha(\mathbb{Z}^0(H)\oplus\mathbb{Z})$ *с помощью коцикла* $\alpha$. *Элементы группы есть тройки* $(r;f,k)$, $r\in\mathbb{Q}, f\in\mathbb{Z}^0(H), k\in\mathbb{Z}$. *Конус* $G^+$ *истинных модулей состоит из элементов, для которых* $r>0$ *и* $\frac{1}{2}f(1)+k+b_r>0$. *Порядковой единице, т.е. одномерному свободному модулю соответствует элемент* $(1;\Phi,1)$, *где* $\Phi$ *- функция из* $\mathbb{Z}^0(H)$, *тождественно равная нулю. Аннулятор обоих следов имеет вид* $K_{00}(\mathbb{C}(\Gamma))=\{(0,f,k): \frac{1}{2}f(1)+k=0\}$.

## 2. Сведения о представлениях $\Gamma_{p^n}$ и о ЛП-алгебрах. Теорема ветвления. Следы

Случаи $p=2$ и $p$ - нечетное простое имеют незначительные отличия, связанные с различием в строении полей и самих групп. Эти различия сказываются в деталях доказательств, но не в формулировках утверждений. Мы ограничимся случаем $p=2$, который технически чуть проще.

Напомним некоторые сведения о проективных модулях группы $\Gamma_{p^n}$ (см. [3,4]). Нам будет удобно говорить не обо всех проективных модулях $\Gamma_{p^n}$, а только о простых модулях или, что эквивалентно, о неприводимых представлениях.

Для $p=2$ порядок $\Gamma_q$ равен $q(q^2-1)$. Имеется одно представление $T_1$ размерности $q$, одно одномерное представление $\mathbb{1}$, $\frac{1}{2}(q-2)$ представлений размерности $(q+1)$, обозначаемых символами $T_\pi$, где $\pi$ пробегает характеры группы $F_q^*$ такие, что $\pi\neq\pi^{-1}$, и $\frac{1}{2}q$ представлений размерности $(q-1)$, обозначаемых $S_\sigma$, где $\sigma$ - характеры группы $U_1(F_{q^2})=\{t\in F_{q^2}: t\bar{t}=1\}$, $\sigma\neq\sigma^{-1}$. Отметим, что представления $T_\pi$ получаются индуцированием с одномерных представлений верхнетреугольной подгруппы, определяемых характерами $\pi$. Взаимно-обратным характерам соответствуют эквивалентные представления, а единичному характеру - приводимое представление $T_1$, раскладывающееся в сумму единичного и представления $\tilde{T}_1$: $T_1=(\mathbb{1}+\tilde{T}_1)$. Характеры групп

$\Gamma_q$ также описаны в [3] и [4].

Напомним теперь некоторые определения теории ЛП-алгебр (подробности см. в [1]). Пусть $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ – ЛП-алгебра. Диаграммой Браттели алгебры $A$ называется бесконечный градуированный мультиграф, в котором вершины $n$-го этажа суть простые модули $A_n$, а количество ребер, соединяющих вершины $n$-го и $(n+1)$-го этажей, равно кратности, с которой первый $A_n$-модуль входит в разложение $A_{n+1}$-модуля, соответствующего второй вершине, рассматриваемого как $A_n$-модуль. На множестве вершин имеется естественный порядок – $d \prec d'$, если $d'$ лежит на этаже с большим номером, и существует (согласованный с градуировкой) путь, соединяющий эти вершины. Верхним идеалом называется любое множество вершин, содержащее вместе с каждой вершиной все большие. Идеал $J$ называется насыщенным, если $\forall d \notin J \exists d' \notin J: d \prec d'$. Иными словами, если из каждой вершины вне идеала можно уйти на бесконечность, оставаясь все время вне его.

Пусть $q=q_{k-1}$, $n=n_k$, так что $q_k=q^n$. Обозначим $a(m)=(q^m-1)/(q-1)$, $b(m)=(q^m+1)/(q+1)$, $c(m)=(q^m-1)/(q^2-1)$.

Описать диаграмму Браттели алгебры $\mathbb{C}(\Gamma)$ позволяет следующая

**Лемма 1.** *Матрица кратностей ограничений представлений* $\Gamma_{q^n}$ *на* $\Gamma_q$ *имеет вид:*

| $k \backslash k-1$ | $\mathbb{1}$ | $\tilde{T}_1$ | $T_{\pi'}$ | $S_{\sigma'}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{1}$ | $1$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $\tilde{T}_1$ | $qc(n-2)+1$ | $c(n)$ | $a(n-1)$ | $b(n-1)$ |
| $T_\pi$ | $qc(n-2)+\varepsilon$ | $c(n)+\delta$ | $a(n-1)+\nu$ | $b(n-1)+\lambda$ |
| $S_\sigma$ | $qc(n-2)$ | $c(n)$ | $a(n-1)$ | $b(n-1)$ |

*Здесь* $\varepsilon, \delta, \nu, \lambda$ *– числа, которые равны* $\pm 1$ *или* $0$ *в зависимости от* $\pi$: $\varepsilon=1$, *если* $\pi|_{F_q^*} \equiv 1$ *или* $\pi|_{u_1(F_{q^2})^*} \equiv 1$. *В остальных случаях* $\varepsilon=0$. $\delta=1$, *если* $\pi|_{F_q^*} \equiv 1$; $\delta=-1$, *если* $\pi|_{u_1(F_{q^2})^*} \equiv 1$. *Иначе* $\delta=0$. $\nu=1$, *если* $\pi|_{F_q^*} = (\pi')^{\pm 1}$, *в остальных случаях* $\nu=0$. $\lambda=-1$, *если* $\pi|_{u_1(F_{2})^*} = (\sigma')^{\pm 2}$, *в остальных случаях* $\lambda=0$.

**Замечание.** Здесь существенно, что $n=n_k$ – четное число. При нечетном $n_k$ нерегулярное поведение кратностей будет также и в четвертой строке таблицы.

Таблица леммы 1 получается прямым подсчетом кратностей представлений с помощью вычисления скалярных произведений характеров.

Пусть $D$ – диаграмма Браттели алгебры $\mathbb{C}(\Gamma)$, $D^0$ – множество ее вершин. Из таблицы видно, что если исключить из рассмотрения вершины $\mathbb{1}$, то любые два соседних этажа графа $D$ с оставшимися вершинами образуют полный двудольный (мульти)граф.

Известно [1], что двусторонние идеалы ЛП-алгебры находятся во взаимно-однозначном соответствии с насыщенными идеалами ее графа ветвления. Очевидно, что граф $D$ имеет единственный насыщенный идеал - объединение всех неодномерных модулей. Этому порядковому идеалу диаграммы $D$ соответствует аугментационный идеал $\mathbb{C}(\Gamma)$. Мы получили

**Следствие.** *Единственным несобственным идеалом алгебры* $\mathbb{C}(\Gamma)$ *является аугментационный идеал* $\mathbb{C}_0(\Gamma)=\{\Sigma\lambda, g: \Sigma\lambda_g=0\}$.

Это следствие было доказано другими средствами ранее в [6], см. также [7].

Следы (см. п. 1) групповой алгебры находятся в естественном соответствии с характерами группы: $\varphi(\Sigma\lambda_g g)=\Sigma'\lambda_g\chi(g)$. След на ЛП-алгебре следующим образом определяет гомоморфизм группы Гротендика этой алгебры в $\mathbb{R}$, который мы будем называть следом на группе Гротендика.

**Предложение** [1]. *Если* $A=\varinjlim A_n$ *- ЛП-алгебра, то* $K_0(A)=\varinjlim K_0(A_n)$, *где индуктивный предел рассматривается в категории упорядоченных абелевых групп с отмеченной порядковой единицей.*

Пусть $\varphi_n$ - след конечномерной полупростой алгебры $A_n$. Группа $K_0(A_n)$ порождается простыми модулями $A_n$ - $K_0(A_n) = \sum_{\pi} \oplus\mathbb{Z}$, где $\pi$ пробегает простые модули $A_n$. Каждому простому модулю алгебры $A_n$ соответствует минимальный двусторонний идеал $A_n$, который в свою очередь порожден некоторым минимальным идемпотентом $e$. Сопоставим этому модулю значение $\varphi(e)$. Продолжим определенный таким образом след по аддитивности на $K_0(A_n)$. Мы получили последовательность следов на $K_0(A_n)$. Эта последовательность следов является согласованной и ее индуктивный предел есть след на $K_0(A)$.

Различными способами можно убедиться в том, что на алгебре $\mathbb{C}(\Gamma)$ имеется лишь два неразложимых следа (см., например, [5]) - след одномерного представления и след $\mu$ регулярного представления. Опишем подробнее след $\mu$ на $K_0(\mathbb{C}(\Gamma))$. Так как $K_0(\mathbb{C}(\Gamma_{p^n}))\subset K_0(\mathbb{C}(\Gamma))$, то простым модулям $\mathbb{C}(\Gamma_{p^n})$ соответствуют проективные модули $\mathbb{C}(\Gamma)$, а именно модули, порожденные соответствующими идемпотентами $\mathbb{C}(\Gamma_{p^n})$ как элементами $\mathbb{C}(\Gamma)$. Обозначим $\mathbb{1}(n)$, $\tilde{T}_1(n)$, $T_\pi(n)$, $S_\sigma(n)$ - проективные модули над $\mathbb{C}(\Gamma)$, соответствующие простым модулям $\mathbb{C}(\Gamma_{q_n})$.

След $\mu$ принимает значения, пропорциональные размерностям этих простых модулей:

$$\mu(\mathbb{1}(n)) = \frac{1}{q_n(q_n^2-1)},\quad \mu(\tilde{T}_1(n))= \frac{1}{q_n^2-1},\quad \mu(T_\pi(n)) = \frac{1}{q_n(q_n-1)},\quad \mu(S_\sigma(n)) = \frac{1}{q_n(q_n+1)}.$$

Проекции следа $\mu$ на $G_n$ обозначим $\mu_n$. Разумеется, $\mu_n$ есть тот след на $K_0(\mathbb{C}(\Gamma_{q_n}))$, который порожден мерой Планшереля на $\hat{\Gamma}_{q_n}$ и отвечает регулярному представлению

$\mathbb{C}(\Gamma_{q_n})$.

**Лемма 2.** *След $\mu$ отображает $G$ на группу* $\mathbb{Q}$.

Доказательство состоит в проверке того, что числа $\mu(\mathbb{1}(n))$, $n=1,2,\ldots$, аддитивно порождают $\mathbb{Q}$ и наблюдения, состоящего в том, что след $\mu$ каждого проективного модуля рационален.

## 3. Описание $G$. Доказательство теоремы

Опишем структуру группы $G$. Имеем точную последовательность

$$0 \longrightarrow G_0 \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow 0, \tag{2}$$

где $G_0=\mathrm{Ker}\ \mu$. Рассмотрим подгруппу

$$G'_n = \sum_\pi \oplus\ \mathbb{Z}(T_\pi(n)),$$

где сумма берется по всем модулям серии $T$, в том числе одно из слагаемых соответствует приводимому модулю $T_1$, а $\mathbb{Z}(T)$ обозначает циклическую группу, порожденную модулем $T$ как элементом $G_n$. Назовем подгруппу $G'_n$ существенной частью $G_n$. Отметим, что существенные части не образуют и индуктивного семейства: $G_n \not\subset G_{n+1}$. Назовем *существенной частью* ядра гомоморфизма $\mu_n$ подгруппу $(\mathrm{Ker}\ \mu_n \cap G'_n)$.

**Лемма 3.** *Существенные части ядер* $(\mathrm{Ker}\ \mu_n \cap G'_n)$ *образуют индуктивное семейство, предел которого* $\mathbb{Z}^0(H)$. *Группа* $G_0$ *изоморфна* $\mathbb{Z}^0(H)\oplus\mathbb{Z}$.

**Доказательство.** Группа $(\mathrm{Ker}\ \mu_n \cap G'_n)$ порождается разностями вида $T_1(n)-T_\pi(n)$, $T_{\pi_1}(n)-T_{\pi_2}(n)$. С помощью таблицы кратностей леммы 1 легко проверить, что

$$T_{\pi_1}(n) - T_{\pi_2}(n) = \Sigma_{(\pi_1)} T_\pi(n+1) - \Sigma_{(\pi_2)} T_\pi(n+1),$$

$$T_1(n) - T_{\pi_1}(n) = T_1(n+1) + 2\ \Sigma_{(1)} T_\pi(n+1) - \Sigma_{(\pi_1)} T_\pi(n+1),$$

где $\Sigma_{(\pi_i)}$ есть сумма по всем $\pi\in F^*_{q_{n+1}}$, $\pi\neq\pi^{-1}$, $\pi|_{F^*_{q_n}}=\pi_i$, а $\Sigma_{(1)}$ – аналогичная сумма для единичного характера. Нетрудно проверить, что правые части этих формул лежат в $(\mathrm{Ker}\ \mu_{n+1}\cap G'_{n+1})$, откуда следует включение $(\mathrm{Ker}\ \mu_n \cap G'_n \subset (\mathrm{Ker}\ \mu_{n+1}\cap G'_{n+1})$. Для $a\in F^*_{q_n}$ обозначим $\chi_a$ – характеристическую функцию множества $\{a\}$ в пространстве всевозможных целозначных функций на $F^*_{q_n}$. Соответствие $T_1 \longrightarrow 2\chi_{\mathbb{1}}$, $T_\pi \longrightarrow \chi_\pi + \chi_{\pi^{-1}}$ позволяет отождествить $(\mathrm{Ker}\ \mu_n \cap G'_n)$ и $\mathbb{Z}^0(H_{q_n})$. Но $\mathbb{Z}^0(H)=\varinjlim \mathbb{Z}^0(H_{q_n})$. Отсюда следует первое утверждение леммы.

При конечном $n$ дополнение к существенной части в $\mathrm{Ker}\ \mu_n$ имеет большую размерность, но в пределе это дополнение сокращается до одной циклической группы $\mathbb{Z}$. В самом деле, рассмотрим элементы $b_n=\mathbb{1}(n)+\Sigma T_\pi(n)-\Sigma\ S_\sigma(n)$. Нетрудно проверить, что $b_n\in\mathrm{Ker}\ \mu_n$ и $b_1=b_2=\ldots$ как элементы $G$. Утверждение следует из того факта, что всякий элемент ядра $\mathrm{Ker}\ \mu_n$ как элемент $G$ может быть выражен через элементы $(\mathrm{Ker}\ \mu_{n+1}\cap G'_{n+1})$ и $b_{n+1}$.

Прежде чем описывать коцикл, докажем еще одну лемму.

**Лемма 4.** *Подгруппа бесконечно делимых элементов группы $G$ изоморфна $\mathbb{Q}_{(p)}$. Изоморфизм определяется следом $\mu$.*

**Доказательство.** Из таблицы кратностей видно, что коэффициенты разложения модуля $a_1\mathbb{1}(n)+a_2T_1(n)+a_3T_\pi(n)+\ldots+a_k=S_\sigma(n)\ldots$ по образующим $\tilde{T}_1(n+1)$, $T_\pi(n+1)$, $S_\sigma(n+1)$ отличаются не больше, чем на $2\max a_i$. (Эти отличия связаны с непостоянством кратностей в третьей строке таблицы). Поэтому одновременно они могут делиться на большое число только в том случае, когда они равны между собой. Это может быть только при $a_1=0$, $a_2=a_3=\ldots$ Значит, такая подгруппа может содержать только кратные элементы $c_n=(\tilde{T}_1(n)+\sum_\pi T_\pi(n)+\sum_\pi S_\sigma(n))$, $c_n\in K_0(\mathbb{C}(\Gamma_{q_n}))\subset G$. Как нетрудно проверить, $c_n=\frac{q_{n+1}}{q_n}c_{n+1}$. Поэтому такая подгруппа изоморфна $\mathbb{Q}_{(p)}$.

Из этой леммы следует, что в дополнении к $G_0$ в $G$ нет подгруппы изоморфной $\mathbb{Q}$, поэтому расширение (2) нерасщепляемо. Заметим еще, что группа, порожденная $G_0$ и $\mathbb{Q}_{(p)}$, есть их прямая сумма. Таким образом, $G$ есть на самом деле нетривиальное расширение при помощи группы - целых рациональных чисел $\mathbb{Q}/\mathbb{Q}_{(p)}$.

Обозначим $C_n=(\tilde{T}_1+\Sigma T_\pi+\Sigma S_\sigma)$, где слагаемые $\tilde{T}_1, T_\pi, S_\sigma$ - простые модули $\mathbb{C}(\Gamma_{p^n})$. Таким образом, $c_n=C_{n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_k}$ .

Докажем формулу (1) для коцикла. Удобней работать не с коциклом $\alpha$, а с когомологичным ему коциклом, который задается той же формулой (1), где под $\varphi$ понимается не функция Эйлера, а показатель, которому принадлежит число $p$ по модулю $\frac{m}{p^s}$ или, иными словами, наименьшее $k$ такое, что $p^s(p^k-1)\not| m$.

Рассмотрим точную последовательность для конечной группы:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}\mu_N \longrightarrow G_N \longrightarrow \mathbb{Z}\left(\frac{1}{p^N(p^{2N}-1)}\right) \longrightarrow 0,$$

где $\mathbb{Z}\left(\frac{1}{p^N(p^N-1)}\right)$ - бесконечная циклическая группа, порожденная числом $\frac{1}{p^N(p^N-1)}$. Для построения коцикла на конечной группе удобно ограничиться существенной частью:

$$0 \longrightarrow (\operatorname{Ker}\mu_N\cap G'_N) \longrightarrow \tilde{G}_N \longrightarrow \mathbb{Z}\left(\frac{1}{p^N(p^N-1)}\right) \longrightarrow 0, \qquad (3)$$

где подгруппа $\tilde{G}_N\subset G_N$ определена точностью последовательности (3). Рассмотрим 1-коцепь $\beta_N\colon \mathbb{Z}\left(\frac{1}{p^N(p^N-1)}\right)\longrightarrow(\operatorname{Ker}\mu_N\cap G'_N)\oplus\mathbb{Z}$

$$\beta_N(r) = \tilde{r}f_{\varphi(m)} - rp^Nf_N - (\tilde{r}-rp^N)z, \qquad (4)$$

здесь, как в п. 1, $r=r'+\tilde{r}$, $m$ - знаменатель несократимой записи $r$, а $f_k$ - модули, соответствующие (как в лемме 3) функциям $f_k$. Сопоставим числу $r=\frac{a}{p^s}+\frac{b}{p^{\varphi(m)}-1}$ модуль $A(r)=A(r')+A(\tilde{r})$, где $A(r')=a\cdot C_s$, $A(\tilde{r})=b\cdot(\tilde{T}_1+C_{\varphi(m)})$. В качестве прообраза образующей группы $\mathbb{Z}\left(\frac{1}{p^N(p^N-1)}\right)$ в $\tilde{G}_N$ возьмем модуль $T_1(N)$. Значения следа согласовано с этими сопоставлениями. Число $r\in\mathbb{Z}\left(\frac{1}{p^N(p^N-1)}\right)$ будет представлено модулем $B(r)=r\cdot p^N(p^N-1)\cdot T_1(N)$. Коцепь $\beta_N$ позволяет расщепить расширение (3), поскольку $\beta_N(r)=A(r)-B(r)$. Из формулы (4) видно, что $\beta_N$ не выдерживает предельного перехода по $N$. С другой стороны, ее дифференциал $d\beta_N$ задается в точности формулой (1) и стабилизируется с ростом $N$. Это и есть наш коцикл. Мы опускаем проверку того, что любая последовательность 1-коцепей, тривиализующая сужение коцикла $\alpha$ на конечные группы, расходится при $N \longrightarrow \infty$, что дает другое доказательство нетривиальности коцикла.

Описание конуса $G^+$ и аннулятора $K_{00}$ мгновенно получается из вида следов на $G$. Теорема доказана.

**Замечания.** Для квадратично замкнутого (но не алгебраически замкнутого) поля $K$ верна аналогичная теорема с заменой группы характеров $(\bar{F}_p^*)^\wedge$ на группу характеров $(K^*)^\wedge$, и группы $\mathbb{Q}$ - на аддитивную подгруппу $\mathbb{Q}$, порожденную числами $\frac{1}{q_n(q_n^2-1)}$, где $q_k=p^{n_1\ldots n_k}$ и $\{n_k\}$ - последовательность четных чисел. Доказательство проходит без изменений.

Если же $k$ - квадратично незамкнутое расширение поля $F_q$, то ответ изменится. В этом случае $K=\bigcup_{n=1}^{\infty} F_{q_n}$, причем в последовательности $\{n_k\}$, начиная с какого-то места идут только нечетные числа. Как отмечалось, это значит, что таблица кратностей леммы 1 будет существенно иной. Ответ будет зависеть еще и от группы характеров мультипликативной группы квадратичного расширения поля $K$.

Представляет интерес перенесение результатов этой статьи на случай других классических групп над алгебраически замкнутым счетным полем, равно как и обобщение на случай более общих полей, а также вопрос о явной реализации проективных модулей.

## Список литературы

[1] Вершик А.М., Керов С.В. Локально полупростые алгебры, комбинаторная теория и $K_0$-функтор // Итоги науки. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Т.26, 1985. С.3-56.

[2] Вершик А.М., Керов С.В. $K$-функтор (группа Гротендика) бесконечной симметрической группы // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1983. N123. С.126-151.

[3] Наймарк М.А. Теория представлений групп. М.: Наука, 1976. 550 с.

[4] Зелевинский А.В., Наркунская Г.С. Представления группы $SL(2,F_q)$, $q=2^n$.

[5] Кириллов А.А. Положительно определенные функции на группе матриц с элементами из дискретного поля // ДАН СССР. 1965. Т.162, N3. С.503-505.

[6] Залесский А.Е. Group Rings of Locally Finite Groups and Representation Theory. Препринт Ин-та мат. АН БССР. 1989.

[7] Rosenberg J. Un complement a un theoreme de Kirillov sur les caracteres de $GL(n)$ d'un Corps infini discret // C.R. Acad. Sci. Paris. 1989. T.309. Ser.I. P.581-586.

Ленинградский государственный университет
198904, Ленинград, Петродворец,
Библиотечная площадь, 8

Поступило 26 сентября 1990 г.