Н. Сатимов, А. Азамов, Л. А. Петросян, Структура оптимальных стратегий в одновременных играх преследования, *Управляемые системы*, 1974, выпуск 13, 65–68

https://www.mathnet.ru/da1111

Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1974 г. выпуск 13.
УДК.518.9.

СТРУКТУРА ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ В ОДНОВРЕМЕННЫХ ИГРАХ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

Н.Сатимов, А.Азамов, Л.А.Петросян

Рассмотрим следующую игру. В n - мерном евклидовом пространстве R_n задано компактное множество C . Игрок P выбирает точку $x \in C$, игрок E , не зная выбора игрока P , выбирает точку $y \in C$. Цель игрока P - минимизировать расстояние $\rho(x, y)$ между точками x и y . Игрок E преследует противоположную цель [1]-[3] .

Как известно, [1]-[3], в этой бесконечной антагонистической игре существует ситуация равновесия в смешанных стратегиях.

В настоящей заметке выяснена структура оптимальных стратегий в двух случаях сформулированной выше игры.

Обозначим через $\mathcal{D}_R$ шар минимального радиуса, содержащий C (из компактности C следует существование и единственность шара $\mathcal{D}_R$). Пусть точка O - центр этого шара, F - выпуклая оболочка пересечения множества C со сферой $S = \{M : \rho(O, M) = R\}$.

Л е м м а. Если C -выпуклый компакт, то $O \in F$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное: $O \bar{\in} F$. Тогда существует точка $M_0 \in F$, наиболее близкая к O . В силу компактности F , $\rho(O, M_0) > 0$. Через точку M_0 проведем гиперплоскость Γ с нормалью $\overline{OM_0}$. (В дальнейшем через $\overline{AB}$ будем обозначать вектор с началом в точке A и концом в точке B .) Очевидно, что Γ будет опорной гиперплоскостью к F . Пусть Γ' - гиперплоскость, параллельная к Γ и проходящая через середину отрезка OM_0 , а Π - замкнутое полупространство, ограниченное гиперплоскостью Γ' и содержащее O. Тогда F не пересекается с Π , поэтому для любой точки $M \in \Pi \cap C$ имеем $\rho(O, M) < R$. Отсюда в силу непрерывности $\rho(O, M)$ и компактности $\Pi \cap C$ следует, что $\rho(O, M) < R - \delta$ при некотором $\delta > 0$.

Пусть O' - такая точка, что $O' \in OM_0 \cap \Pi$ и $\rho(O, O') < \delta$. Тогда если $M \in C \cap \Pi$, то

$$\rho(O', M) \leq \rho(O', O) + \rho(O, M) < \delta + R - \delta = R .$$

Если же $M \in C \setminus \Pi$, то $\rho(O', M) < \rho(O, M) \leq R$, так как для $M \in C \setminus \Pi$ угол между векторами $O'M$ и $O'O$ больше $\frac{\pi}{2}$.

Таким образом, C содержится в открытом шаре радиуса R . Но тогда C содержится и в некотором шаре меньшего радиуса, что противоречит минимальности R . Лемма доказана.

Из леммы следует, что существуют точки $M_i \in C \cap S$ и числа $p_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, такие, что

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{k} p_i \overline{OM_i} = 0 ,$$

причем $k \leq n+1$ (ср.[2], [3]).

Утверждение I. Если C - выпуклый компакт, то значение игры равно R. Для игрока P оптимальна чистая стратегия O. Для игрока E оптимальна стратегия, состоящая из смеси чистых стратегий M_i с вероятностями p_i, $i=1,2,\ldots,k$.

Доказательство. При указанных в утверждении стратегиях ожидаемое расстояние будет

$$\sum_{i=1}^{k} p_i \cdot \rho(O, M_i) = R .$$

Пусть $M \in C$ - произвольная чистая стратегия игрока E. Из включения $C \subset \mathcal{D}_R$ следует, что $\rho(O, M) \leq R$, поэтому ожидаемое расстояние не больше R при любой стратегии E [1], [2].

Пусть теперь E придерживается указанной в утверждении стратегии, а R выбирает произвольную чистую стратегию $M \in C$. Тогда ожидаемое расстояние равно

$$\varphi(M) = \sum_{i=1}^{k} p_i \, \rho(M, M_i).$$

В R_n введем декартову систему координат с началом в O. Пусть

$$M = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad M_i = (a_1^i, a_2^i, \ldots, a_n^i), \; i=1,2,\ldots,k.$$

Тогда

$$\varphi(M) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left[\sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j^i)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Кроме того

$$\sum_{j=1}^{k} (a_j^i)^2 = R^2, \quad i=1,2,\ldots,k. \qquad /2/$$

Далее,в силу доказанной выше леммы

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \, a_j^i = 0, \quad j=1,2,\ldots,n. \qquad /3/$$

Из /2/ и /3/ следует, что

$$\frac{\partial \varphi(0,0,\ldots,0)}{\partial x_j} = -\sum_{i=1}^{k} p_i \, a_j^i \left[\sum_{j=1}^{n} (a_j^i)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = 0, \; j=1,2,\ldots,n,$$

т.е. O - стационарная точка функции $\varphi(M)$. Но $\varphi(M)$ выпукла как сумма выпуклых функций, поэтому O является точкой минимума:

$$\varphi(M) \geq \varphi(O) = R$$

Из /4/, как и выше, следует, что ожидаемое расстояние не меньше R при любой стратегии P. Утверждение I доказано полностью.

Замечание I. Из доказательства видно, что для справедливости утверждения I достаточно компактности C и условия $C \in C$.

Пусть C - кольцо в плоскости с декартовыми координатами x, y, т.е. $C = \{(x,y) \; : \; r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

Утверждение 2. В случае кольца C оптимальной стратегией игрока P (игрока E) является равномерное распределение на окружности $x^2+y^2=r^2$ (соответственно на $x^2+y^2=R^2$).

Доказательство. При указанных стратегиях ожидаемое расстояние равно (ср. [4], [5])

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos(\varphi-\psi)}\,d\varphi\,d\psi =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\xi}\,d\xi = \Phi(r,R),$$

где φ и ψ -полярные углы чистых стратегий игроков P и E соответственно. Если игрок E выбирает точку M с полярными координатами ρ, ψ, то ожидаемое расстояние (P придерживается указанной в утверждении стратегии)

$$\Phi(r,\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos\xi}\,d\xi .$$

Легко видеть, что при $r \leq \rho \leq R$ функция $\varphi(\rho) = \rho^2 + r^2 - 2r\rho\cos\xi$ монотонно возрастает. В частности, $\varphi(\rho) \leq \varphi(R)$ при $r \leq \rho \leq R$. Отсюда $\Phi(r,\rho) \leq \Phi(r,R)$. Поэтому при любой стратегии E ожидаемое расстояние не больше $\Phi(r,R)$.

Пусть теперь точку M выбирает игрок P. Тогда ожидаемое расстояние равно

$$\Phi(\rho,R) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{R^2+\rho^2-2R\rho\cos\xi}\,d\xi .$$

Применив правило Лейбница, можно убедиться, что

$$\frac{\partial\Phi(0,R)}{\partial\rho} = 0, \qquad \frac{\partial^2\Phi(\rho,R)}{\partial\rho^2} > 0, \qquad r \leq \rho \leq R .$$

Отсюда следует, что $\Phi(\rho, R)$ монотонно возрастает по ρ, поэтому $\Phi(r,R) \leq \Phi(\rho,R)$. Таким образом, ожидаемое расстояние при любой стратегии игрока P не меньше $\Phi(r,R)$. Утверждение 2 доказано полностью.

Замечание 2. Значение игры равно интегралу

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\xi}\,d\xi = \Phi(r,R).$$

Например, если C - окружность радиуса R, то значение игры равно $\frac{4}{\pi}R$.

З а м е ч а н и е 3. Утверждение 2 остается справедливым и для множества C , содержащего окружности $x^2+y^2=r^2$, $x^2+y^2=R^2$ и лежащего между ними.

Л и т е р а т у р а.

1. Дж. Фон Нейман. О.Моргенштерн. Теория игр и экономическое поведение. М.,"Наука", 1970.

2. С.Карлин. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М., "Мир", 1964.

3. Бесконечные антагонистические игры. Под ред. Н.Н.Воробьева. М.,Физматгиз, 1963.

4. М.Кендал, П.Моран. Геометрические вероятности, М.,"Наука", 1972.

5. D. Fairthorne. The distans between random points in two concentric circls. Biometriks, 51 (1964), 275-277.