Решения задач M2316–M2325, Ф2323–Ф2332,
Kvant, 2014, Number 2, 15–26

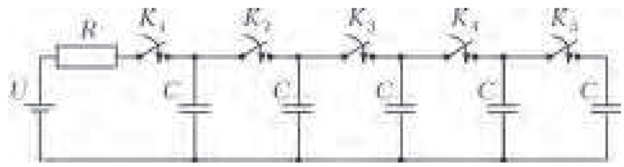


Рис. 4

замыкания каждого из этих ключей все остальные ключи уже были замкнуты. Сопротивления всех проводов и источника тока пренебрежимо малы.

М.Семенов

Ф2347. Тележка высотой $H = 30$ см и длиной $L = 40$ см должна проехать под столом по горизонтальному полу, двигаясь равномерно и прямолинейно (рис.5). К крышке стола снизу прикрепили легкую

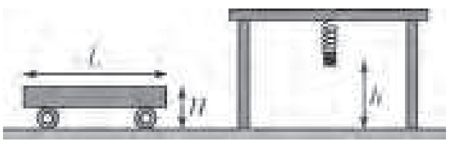


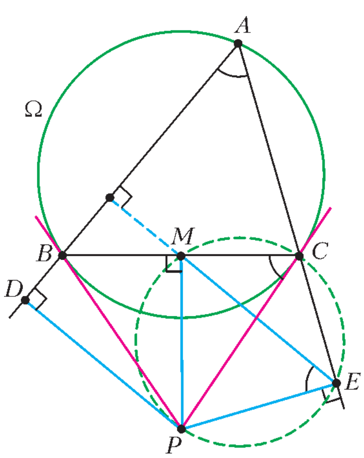
Рис. 5

пружину жесткостью $k = 50$ Н/м. К пружине прицепили маленький груз массой $m = 0{,}4$ кг. При недеформированной пружине груз находился на высоте $h = 42$ см над полом. Затем груз отпустили. С какой минимальной скоростью может двигаться тележка, чтобы она, проехав под столом, не задела груз?

М.Ромашка

Решения задач М2316–М2325, Ф2323–Ф2332

М2316. *Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность Ω. Касательные, проведенные к Ω в точках B и C, пересекаются в точке P. Точки D и E – основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые AB и AC. Докажите, что точка пересечения высот треугольника ADE является серединой отрезка BC.*



Пусть M – середина BC. Треугольник BPC равнобедренный ($BP = PC$ как отрезки касательных); значит, его медиана PM является высотой. Так как $\angle PMC = \angle PEC = 90°$, четырехугольник $MCEP$ – вписанный; значит, $\angle MEP = \angle MCP$. Далее, CP – касательная к Ω, поэтому $\angle MCP = \angle BAC$. Получаем, что $\angle MEP = \angle BAC$. Значит, $\angle MEA + \angle BAC = (90° - \angle MEP) + \angle BAC = 90°$, откуда $ME \perp AB$ (см. рисунок). Аналогично доказывается, что $MD \perp AC$. Это и значит, что M – точка пересечения высот треугольника ADE.

П.Кожевников

М2317. *Существует ли такое натуральное n, что число $\overline{anb}$ делится на $\overline{ab}$ для любых: а) ненулевых; б) ненулевых четных; в) нечетных цифр a и b? (Здесь через $\overline{x\ldots y}$ обозначено число, получаемое приписыванием друг к другу десятичных записей чисел x, …, y.)*

Ответ: а) нет; б) нет; в) да.

а), б) Предположим, что такое число n существует. Тогда $\overline{2n4}\,\vdots\,24\,\vdots\,8$ и $\overline{4n8}\,\vdots\,48\,\vdots\,8$. Но разность $\overline{4n8} - \overline{2n4}$ не делится на 8, поскольку имеет тройку последних цифр 004 или 204 (если n состоит из одной цифры).

в) Вначале докажем следующую известную **лемму**: *пусть N – натуральное число, не делящееся на 2 и на 5; тогда существует число, записываемое одними единицами, которое делится на N.*

Действительно, рассмотрим $N+1$ чисел вида $1, 11, 111, \ldots, \underbrace{11\ldots1}_{N+1}$. Выберем два из них, $\underbrace{11\ldots1}_{k}$ и $\underbrace{11\ldots1}_{l}$, $k > l$, дающие один и тот же остаток при делении на N. Тогда разность $\underbrace{11\ldots1}_{k} - \underbrace{11\ldots1}_{l} = \underbrace{11\ldots1}_{k-l} \cdot 10^l$ делится на N. Так как НОД$(N, 10) = 1$, то $\underbrace{11\ldots1}_{k-l}$ делится на N.

Перейдем к решению задачи. Пусть T – множество всех натуральных чисел, меньших 100 и не делящихся ни на 2, ни на 5. Пусть N равно произведению всех чисел множества T.

Найдем такое s, что число $m = \underbrace{11\ldots1}_{s}$ делится на N, и покажем, что $n = \underbrace{77\ldots7}_{s} = 7m$ удовлетворяет условию задачи. Пусть a и b – некоторые нечетные цифры. Тогда число

$$\overline{anb} = \overline{an0} - 10a + \overline{ab} = 10\left(a\left(10^s - 1\right) + n\right) + \overline{ab}$$

делится на $\overline{ab}$ одновременно с числом

$$10\left(a\left(10^s - 1\right) + n\right) = 10\,(a \cdot \underbrace{99\ldots9}_{s} + \underbrace{77\ldots7}_{s}\,) = $$

$$= 10m\,(9a + 7).$$

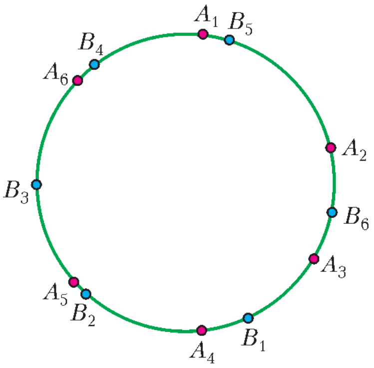
Если $\overline{ab}$ не делится на 5, то по построению число m делится на $\overline{ab}$. Если $\overline{ab} = 5k$, где k не делится на 5, то m делится на k, а значит, $10m\,(9a+7)$ делится на $5k$. Наконец, если $\overline{ab}$ делится на 25, то имеется единственная возможность: $a = 7$, $b = 5$. В таком случае $10m\,(9a+7) = 700m$ делится на $\overline{ab} = 75$ (так как m делится на 3).

В.Сендеров

М2318. *На окружности отметили n точек, разбивающие ее на n дуг. Окружность повернули вокруг центра на угол $2\pi k/n$ (при некотором натуральном k), в результате чего отмеченные точки перешли в n новых точек, разбивающих окружность на n новых дуг. Докажите, что найдется новая дуга, которая целиком лежит в одной из старых дуг. (Считается, что концы дуги ей принадлежат.)*

Мы будем считать, что радиус окружности равен 1, а поворот происходил по часовой стрелке. Если две новые точки лежат на одной старой дуге, то новая дуга между ними – требуемая. Предположим, что таких новых точек нет. Так как есть n старых дуг и n новых точек, это возможно только в случае, когда на каждой старой дуге лежит ровно по одной новой точке (причем эти точки не совпадают с концами старых дуг).

Занумеруем старые точки по часовой стрелке $A_1, A_2, \ldots, A_n$; пусть при повороте точка A_i переходит в новую точку B_i (мы считаем нумерацию циклической, т.е. $A_{n+i} = A_i$ и $B_{n+i} = B_i$). Пусть точка B_1 лежит на дуге A_jA_{j+1} (см. рисунок – для $n = 6$, $j = 3$); так как на каждой старой дуге ровно по одной новой точке, соседние точки попадали на соседние дуги. Получаем, что при любом i точка B_i лежит на дуге $A_{j+i-1}A_{j+i}$.



Предположим, что $j \le k$. Заметим, что все дуги вида $A_iA_{i+1}\ldots A_{i+j}$ покрывают окружность ровно в j слоев; значит, сумма их длин равна $2\pi j \le 2\pi k$. С другой стороны, длина дуги $A_iA_{i+1}\ldots A_{i+j}$ строго больше длины дуги A_iB_i, которая равна $2\pi k/n$; значит, сумма их длин строго больше чем $n \cdot 2\pi k/n = 2\pi k$; противоречие.

Аналогично, если $j > k$, то сумма длин всех дуг вида $A_iA_{i+1}\ldots A_{i+j-1}$ равна $2\pi(j-1) \ge 2\pi k$; с другой стороны, она строго меньше, чем сумма длин дуг вида A_iB_i, которая равна $2\pi k$. Опять получаем противоречие.

И.Митрофанов

M2319. *На доске написали 100 попарно различных натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$. Затем под каждым числом a_i написали число b_i, полученное прибавлением к a_i наибольшего общего делителя остальных 99 исходных чисел. Какое наименьшее количество попарно различных чисел может быть среди $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$?*

Ответ: 99.

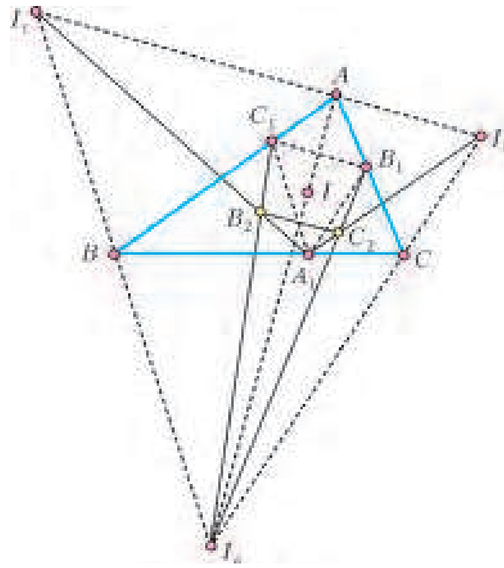
Если положить $a_{100} = 1$ и $a_i = 2i$ при $i = 1, 2, \ldots, 99$, то $b_1 = b_{100} = 3$, так что среди чисел b_i будет не больше 99 различных.

Осталось доказать, что среди чисел b_i всегда найдутся 99 различных чисел. Без ограничения общности можно считать, что $a_1 < a_2 < \ldots < a_{100}$. Пусть d_i – наибольший общий делитель всех 99 исходных чисел, кроме a_i; тогда $b_i = a_i + d_i$. Пусть d_k – наибольшее из чисел $d_1, d_2, \ldots, d_{100}$. Тогда при $i \ne k$ числа a_i делятся на d_k. Следовательно, при $i < j$, $i \ne k$ и $j \ne k$ разность $a_j - a_i$ также делится на d_k. Поскольку она положительна, $a_j - a_i \ge d_k \ge d_i$. Поэтому $b_j > a_j \ge a_i + d_i = b_i$, откуда $b_i \ne b_j$. Итак, мы установили, что $b_j \ne b_i$ при $i \ne k$ и $j \ne k$. Стало быть, все 99 чисел b_i при $i \ne k$ различны.

С.Берлов

M2320. *Окружность с центром I, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Пусть I_a, I_b, I_c – центры вневписанных окружностей треугольника ABC, касающихся сторон BC, CA, AB соответственно. Отрезки I_aB_1 и I_bA_1 пересекаются в точке C_2. Аналогично, отрезки I_bC_1 и I_cB_1 пересекаются в точке A_2, а отрезки I_cA_1 и I_aC_1 – в точке B_2. Докажите, что I является центром окружности, описанной около треугольника $A_2B_2C_2$.*

Прямые B_1C_1 и I_bI_c параллельны, так как обе эти прямые перпендикулярны биссектрисе AI угла BAC (см. рисунок). Аналогично, $C_1A_1 \parallel I_cI_a$ и $A_1B_1 \parallel I_aI_b$; значит, треугольники $A_1B_1C_1$ и $I_aI_bI_c$ подобны. Треугольники $A_1C_1B_2$ и $I_cI_aB_2$ подобны, так как их соответственные стороны параллельны. Аналогично, $\Delta A_1B_1C_2 \sim \Delta I_bI_aC_2$. Из этих подобий следуют равенства $\frac{I_aB_2}{C_1B_2} = \frac{I_aI_c}{A_1C_1} = \frac{I_aI_b}{A_1B_1} = \frac{I_aC_2}{B_1C_2}$. Заметим, что точки B_1 и C_1 симметричны относительно прямой AI_a; поскольку $\frac{I_aB_2}{C_1B_2} = \frac{I_aC_2}{B_1C_2}$, точки B_2 и C_2 также симметричны относительно нее, и $IB_2 = IC_2$. Аналогично получаем $IA_2 = IB_2 = IC_2$, что и требовалось доказать.



Л.Емельянов, П.Кожевников, А.Полянский

M2321. *Пусть $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, … – последовательность простых чисел в порядке возрастания. Пусть $P_k = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p_k$ – произведение первых k простых чисел, а $Q_k = 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p_{k+1}$ – произведение первых k нечетных простых чисел. Найдите все натуральные $k > 1$ такие, что число: а) $P_k - 1$; б) $Q_k - 1$; в) $P_k + 1$ является точной (большей, чем первая) степенью натурального числа. г) При каких k число $Q_k + 1$ является степенью двойки?*

Решим задачу для всех натуральных k. В этом случае ответ такой.

Ответ: а) 1; б) таких k не существует; в) таких k не существует; г) 1, 2.

а) Предположим, $n \ge 2$ и

$$2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p_k = a^n + 1. \qquad (1)$$

Если $a = 1$, то $a^n + 1 = 2$ и, следовательно, $k = 1$ (значение $k = 1$ нам подходит).

Предположим теперь, что $a > 1$; тогда $k > 1$. Число a нечетно, поэтому у него существует нечетный простой делитель q. Тогда $q > p_k$, иначе левая часть равенства (1) делилась бы на q, что невозможно. Поэтому и $a > p_k$.

Без ограничения общности можно считать, что n – простое число (если $n = st$, то можно заменить n на t, а a – на a^s). Заметим, что $n > 2$, поскольку $a^2 + 1$ не может делиться на $3 = p_2$.

Покажем теперь, что $n > p_k$. В противном случае имеем $n = p_i$ при некотором $1 < i \le k$. Тогда $\left(a^{p_i} + 1\right) \vdots p_i$; с другой стороны, по малой теореме Ферма $\left(a^{p_i} - a\right) \vdots p_i$. Значит, число $a + 1 = \left(a^{p_i} + 1\right) - \left(a^{p_i} - a\right)$ также делится на p_i. Заметим, что $1 + a^{p_i} = (1 + a)\left(1 - a + \dots + a^{p_i - 1}\right)$, где $a + 1 \vdots p_i$ и

$$1 - a + \dots + a^{p_i - 1} \equiv 1 + 1 + \dots + 1 = p_i \equiv 0 \pmod{p_i}.$$

Значит, число $1 + a^{p_i}$ делится на p_i^2, что невозможно по условию.

Итак, $a > p_k$ и $n > p_k$, откуда $a^n + 1 > p_k^{p_k} > p_1 p_2 \dots p_k$, что противоречит равенству (1).

б) Пусть $n \ge 2$ и

$$3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p_{k+1} = a^n + 1. \qquad (2)$$

Возможны два случая.

Случай 1: число a является степенью двойки. Заметим, что степени двойки дают лишь остатки 1, 2 и 4 при делении на 7, а $a^n + 1$ делится на 7 при $k \ge 3$. Значит, $k \le 2$, и возможными значениями для a^n являются лишь $3 - 1 = 2$ и $3 \cdot 5 - 1 = 14$. Оба варианта не подходят.

Случай 2: у числа a существует нечетный простой делитель q. Этот случай разбирается так же, как пункт а).

в) Пусть $n \ge 2$ и

$$2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_k = a^n - 1. \qquad (3)$$

Заметим, что $a > 1$ – нечетно. При четном n ($n = 2m$) правая часть равенства (3) является произведением четных чисел $\left(a^m + 1\right)$ и $\left(a^m - 1\right)$, поэтому делится на 4, что невозможно.

При нечетном $n > 1$ аналогично пункту а) доказываем, что $a > p_k$ и $n > p_k$, откуда

$$a^n - 1 > (p_k + 1)^{p_k} - 1 > p_k^{p_k} > p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k.$$

г) Пусть

$$3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p_{k+1} = 2^n - 1. \qquad (4)$$

Проверка показывает, что $k = 1, 2$ удовлетворяют условию. Пусть $k \ge 3$. Так как $\left(2^n - 1\right) \vdots 3$, то $n \vdots 2$. Так как $\left(2^n - 1\right) \vdots 7$, то $n \vdots 3$. Получаем, что $n \vdots 6$. Но если $n = 6t$, то $\left(2^{6t} - 1\right) \vdots \left(2^6 - 1\right) \vdots 9$. Противоречие.

Замечание. Решение пункта г) с заменой степени двойки на точную степень натурального числа автору неизвестно.

В.Сендеров

М2322. *Глава Монетного двора хочет выпустить монеты 12 номиналов, каждый в натуральное число рублей, так, чтобы любую сумму от 1 до 6543 рублей можно было заплатить без сдачи, используя не более 8 монет. Сможет ли он это сделать?*

Ответ: сможет.

Заметим, что $9^4 = 6561 > 6543$. Покажем, что можно выбрать 12 номиналов так, чтобы с помощью не более чем 8 монет можно было уплатить без сдачи любую сумму от 1 до 6560 рублей.

Покажем сначала, как выпустить монеты трех номиналов, чтобы с помощью не более чем двух монет можно было уплатить без сдачи любую сумму от 1 до 8 рублей. Пусть номиналы равняются 1, 3 и 4 рублям. Тогда $1 = 1$, $2 = 1 + 1$, $3 = 3$, $4 = 4$, $5 = 4 + 1$, $6 = 3 + 3$, $7 = 4 + 3$ и $8 = 4 + 4$.

Пусть теперь Монетный двор изготовит монеты с номиналами 9^k, $3 \cdot 9^k$ и $4 \cdot 9^k$ рублей при $k = 0, 1, 2, 3$. Любое число N от 1 до 6560 единственным образом представляется в виде $N = a_3 \cdot 9^3 + a_2 \cdot 9^2 + a_1 \cdot 9 + a_0$, где числа a_k могут принимать значения от 0 до 8. (Фактически, это представление числа N в девятеричной системе счисления.) Как показано выше, сумма $a_k \cdot 9^k$ может быть получена не более чем двумя монетами. Таким образом, вся сумма N может быть получена не более чем $4 \cdot 2 = 8$ монетами указанных номиналов, что и требовалось.

О.Подлипский

М2323. *На плоскости проведены n прямых, среди которых нет параллельных и никакие три из которых не пересекаются в одной точке. Докажите, что существует такая: а) незамкнутая; б*) замкнутая n-звенная несамопересекающаяся ломаная, что на каждой из n данных прямых лежит ровно по одному звену этой ломаной.*

Приведем решение этой задачи, опубликованное в журнале «American mathematical monthly» в статье «Every Simple Arrangement of n Lines Contains an Inducing Simple n-gon» авторов E.Ackerman, R.Pinchasi, L.Scharf, M.Scherfenberg (на эту статью обратил наше внимание А.Акопян).

Пусть V – множество точек пересечения пар прямых.

а) Возьмем начальную точку нашей ломаной на одной из данных прямых l_1 (и не принадлежащую множеству V) и пойдем по прямой l_1 в том направлении, в котором на ней есть хотя бы еще одна точка из V, пока не придем в некоторую точку из V – пусть это точка пересечения l_1 с другой данной прямой l_2. Временно сотрем прямую l_1 и далее пойдем по прямой l_2 в том направлении, в котором на ней есть хотя бы одна точка из V, пока впервые не придем в точку из множества V. Пусть, скажем, мы пришли в точку пересечения прямой l_2 с данной прямой l_3. Сотрем прямую l_2 и повторим шаг, т.е. пойдем по l_3 до оче-

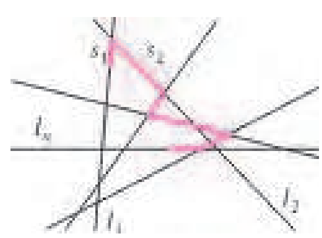


Рис. 1

редной точки пересечения, и т.д. Наконец, пройдем небольшое расстояние по последней еще не стертой прямой l_n (рис.1).

В результате построена n-звенная ломаная Q, у которой на каждой из данных прямых расположено по одному звену. Остается убедиться, что Q не имеет самопересечений. Пусть это не так, и звено ломаной Q, лежащее на прямой l_i, пересекает звено, лежащее на прямой l_j, где $j \geq i+2$. Но это противоречит определению l_{i+1} как первой прямой, отличной от $l_1, l_2, \ldots, l_i$, с которой мы повстречались в процессе построения ломаной Q при движении по прямой l_i.

б) Заметим, что построенная в пункте а) незамкнутая ломаная Q лежит по одну сторону от прямой l_n. Далее введем координаты, приняв l_n за ось Ox, так, что ломаная Q лежит в верхней полуплоскости $y \geq 0$. Ниже вместо l_n будем писать просто l.

Итак, ломаная Q обладает следующими свойствами:

(1) Q – незамкнутая n-звенная ломаная; на каждой из данных прямых расположено ровно по одному ее звену, причем начальное звено лежит на оси Ox;

(2) Q лежит в верхней полуплоскости относительно оси Ox.

Скажем, что ломаная, удовлетворяющая условиям (1), (2), *упирается в* l.

Для каждой ломаной W, упирающейся в l, через $q_1(W), \ldots, q_{n-1}(W)$ обозначим по порядку ее неконцевые вершины, начиная с $q_1(W)$, лежащей на l. Через $l(W)$ обозначим прямую, проходящую через $q_{n-1}(W)$ и содержащую последнее звено W. Через $l^-(W)$ обозначим луч, состоящий из всех точек $l(W)$, у которых абсцисса меньше, чем абсцисса точки $q_{n-1}(W)$. Через $q_n(W)$ обозначим общую точку луча $l^-(W)$ и объединения прямой l и ломаной $q_1(W)q_2(W)\ldots q_{n-1}(W)$, имеющую наибольшую ординату.

Среди всех упирающихся в l ломаных выберем ломаную с наименьшей суммой ординат вершин $q_1(W), \ldots, q_{n-1}(W)$. Если $q_n(W)$ лежит на прямой l, то $q_1(W)\ldots q_{n-1}(W)q_1(W)$ – искомая замкнутая n-звенная ломаная (рис.2,*а*).

Предположим теперь, что $q_n(W)$ – точка пересечения луча $l^-(W)$ с отрезком $q_i(W)q_{i+1}(W)$ для некоторого $1 \leq i \leq n-2$ (рис.2,*б*). Тогда можем задать новую ломаную W', упирающуюся в l, следующим образом: пусть $q_1(W') = q_1(W), \ldots, q_i(W') = q_i(W)$, $q_{i+1}(W') = q_n(W)$, $q_{i+2}(W') = q_{n-1}(W), \ldots$ $\ldots, q_{n-1}(W') = q_{i+2}(W)$, и пусть $l(W')$ – прямая $q_{i+1}(W)q_{i+2}(W)$ (рис.2,*в*). Сумма ординат вершин $q_1(W'), \ldots, q_n(W')$ меньше, чем сумма ординат вершин $q_1(W), \ldots, q_n(W)$, так как ордината вершины $q_n(W')$ меньше ординаты вершины $q_{i+1}(W)$. Получено противоречие с условием минимальности, определяющим W. Это противоречие завершает доказательство.

М2324. *Пусть вневписанная окружность треугольника ABC, лежащая напротив вершины A, касается стороны BC в точке A_1. Точки B_1 на стороне CA и C_1 на стороне AB определяются аналогичным образом с использованием вневписанных окружностей, лежащих напротив вершин B и C соответственно. Известно, что центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.*

Вневписанной окружностью треугольника ABC, лежащей напротив вершины A, называется окружность, которая касается отрезка BC, продолжения стороны AB за точку B и продолжения стороны AC за точку C. Вневписанные окружности, лежащие напротив вершин B и C, определяются аналогично.

Обозначим окружности, описанные около треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, через Ω и Γ соответственно. Обозначим середины дуг CAB, ABC, BCA окружности Ω через A_0, B_0, C_0 соответственно. По условию задачи центр Q окружности Γ лежит на Ω.

Лемма. *Выполняется равенство* $A_0B_1 = A_0C_1$ *и четырехугольник* $AA_0B_1C_1$ *– вписанный.*

Доказательство. В случае $A = A_0$ утверждение очевидно в силу симметрии относительно серединного перпендикуляра к BC. Далее считаем, что $A \neq A_0$.

Ясно, что $A_0B = A_0C$. Как известно, $BC_1 = CB_1$ (каждый из этих отрезков касательных к вневписанной окружности равен $(AB + AC - BC)/2$). Далее, $\angle C_1BA_0 = \angle ABA_0 = \angle ACA_0 = \angle B_1CA_0$. Отсюда следует равенство треугольников A_0BC_1 и A_0CB_1, следовательно, $A_0C_1 = A_0B_1$. Из равенства треугольников также вытекает равенство $\angle A_0C_1A = \angle A_0B_1A$ (это соответственные внешние углы в равных треугольниках), откуда следует, что $AA_0B_1C_1$ – вписанный (очевидно, тре-

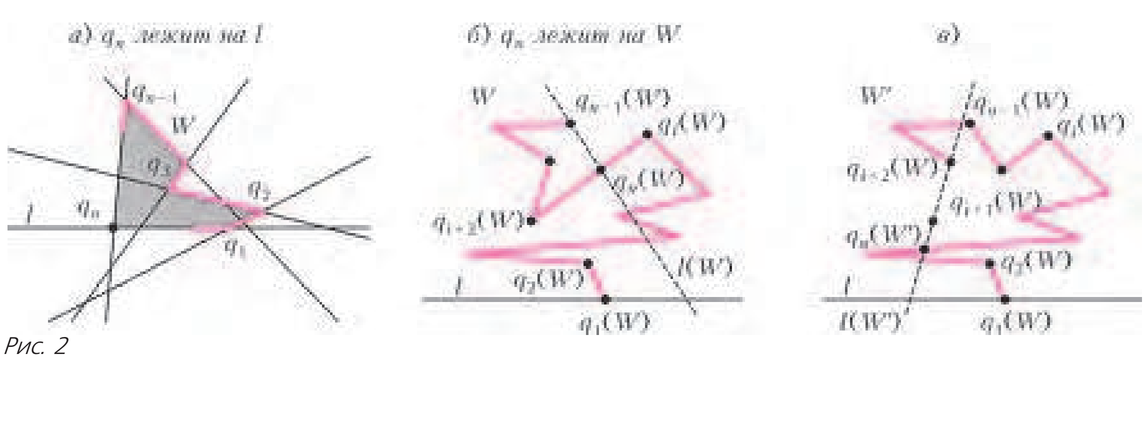


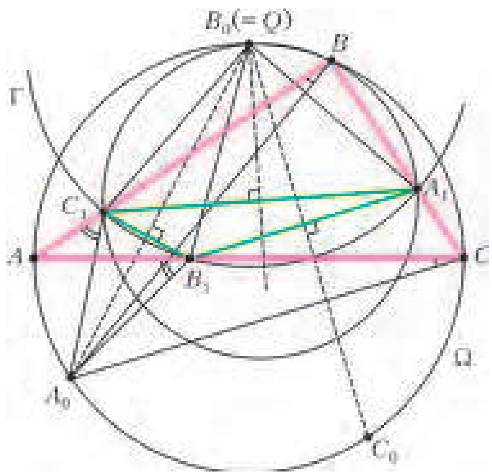
Рис. 2

угольник ABC лежит целиком по одну сторону от прямой AA_0, значит, B_1 и C_1 находятся по одну сторону от прямой AA_0).

Конечно, утверждения леммы верны, если заменить A, B, C на B, C, A соответственно.

Перейдем к решению задачи. Точки A_1, B_1, C_1 лежат на полуокружности окружности Γ (диаметр которой является касательной к Ω в точке Q), поэтому треугольник $A_1B_1C_1$ тупоугольный. Без ограничения общности считаем, что угол B_1 тупой. Значит, Q и B_1 лежат по разные стороны от A_1C_1; то же самое верно и для точек B и B_1. Следовательно, точки Q и B находятся по одну сторону от прямой A_1C_1.

Заметим, что серединный перпендикуляр к A_1C_1 пересекает Ω в двух точках, находящихся по разные стороны от A_1C_1. Согласно лемме, каждая из точек B_0 и Q совпадает с одной из этих двух точек, а поскольку они находятся по одну сторону от прямой A_1C_1, имеем $B_0 = Q$ (см. рисунок).



Снова используя лемму, получаем, что прямые QA_0 и QC_0 являются серединными перпендикулярами к отрезкам B_1C_1 и A_1B_1 соответственно. Отсюда

$$\angle C_1B_0A_1 = \angle C_1B_0B_1 + \angle B_1B_0A_1 =$$

$$= 2\angle A_0B_0B_1 + 2\angle B_1B_0C_0 = 2\angle A_0B_0C_0 = 180^\circ - \angle ABC$$

(в последнем равенстве использовано, что A_0 и C_0 – середины дуг).

С другой стороны, согласно второму утверждению леммы,

$$\angle C_1B_0A_1 = \angle C_1BA_1 = \angle ABC .$$

Из полученных равенств находим $\angle ABC = 90^\circ$, что завершает решение.

Заметим, что верно и обратное к утверждению задачи: если $\angle ABC = 90^\circ$, то середина дуги ABC будет являться центром окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$.

А.Полянский

M2325. *Пусть $n \geq 3$ – целое число. Рассмотрим окружность и $n + 1$ точек на ней, разбивающих ее на равные дуги. Рассмотрим все способы пометить эти точки числами 0, 1, …, n так, что каждое число использовано ровно один раз. Два способа, отличающихся поворотом, считаются одинаковыми. Способ пометки называется красивым, если для любых четырех меток $a < b$, $c < d$ таких, что $a + d = b + c$, хорда, соединяющая точки с метками a и d, не пересекает хорду, соединяющую точки с метками b и c.*

Пусть M – количество красивых способов пометки. Пусть N – количество упорядоченных пар (x, y) натуральных чисел, удовлетворяющих условиям $x + y \leq n$ и НОД$(x, y) = 1$. Докажите, что $M = N + 1$.

Заметим, что на интервале $(0; 1)$ имеется ровно N несократимых дробей $f_1 < \ldots < f_N$, у которых знаменатель не превосходит n. Действительно, каждой паре (x, y) такой, что $x + y \leq n$ и НОД$(x, y) = 1$, поставим в соответствие дробь $x/(x+y)$. Положим $f_0 = 0$, $f_{N+1} = 1$, и пусть $\frac{a_i}{b_i}$ – несократимая запись дроби f_i.

Рассмотрим окружность длины 1. Через $a - b$ обозначаем хорду, соединяющую точки с метками a и b. Под дугой (a, b) будем понимать дугу, проходимую от a к b в направлении по часовой стрелке. Будем позволять себе рассматривать способы пометки произвольного набора точек окружности (формально нарушая условие о равенстве дуг); при этом считать совпадающими способы с одинаковым циклическим порядком меток.

Начнем с того, что предъявим $N + 1$ красивых способов пометки. Возьмем $\alpha \in (0; 1)$, не равное ни одной из дробей $f_1, \ldots, f_N$. Последовательно отметим точки 0, 1, 2, …, n так: произвольную точку окружности пометим 0, а каждая следующая точка пусть отстоит по часовой стрелке на расстояние α от предыдущей (так что длина дуги $(i, i+1)$ равна α). Таким образом, дуга $(0, k)$ имеет длину $\{k\alpha\}$, где $\{r\}$ означает дробную часть числа r. Назовем описанный способ пометки *циклическим* и обозначим его через $A_n(\alpha)$.

На рисунке 1 показан циклический способ $A_{13}(3/5 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ очень мало.

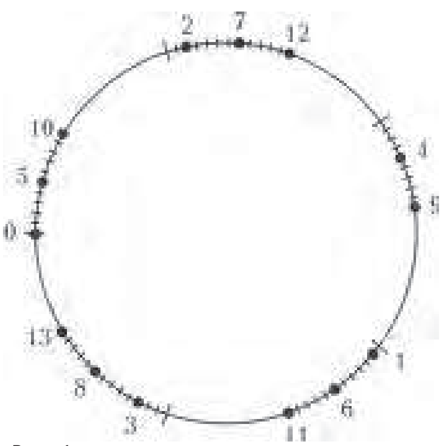


Рис. 1

Если $0 \leq a < b < c < d \leq n$ удовлетворяют равенству $a + d = b + c$, то $a\alpha - b\alpha = c\alpha - d\alpha$, значит, в способе $A_n(\alpha)$ дуги (b, a) и (d, c) равны, следовательно, хорды $a - d$ и $b - c$ параллельны. Тем самым, каждый циклический способ является красивым.

Далее покажем, что имеется ровно $N + 1$ различных циклических способов вида $A_n(\alpha)$. Чтобы это понять, посмотрим, как $A_n(\alpha)$ изменяется при увеличении α от 0 до 1. Момент совпадения точек с метками p и q происходит в точности тогда, когда мы проходим значение $\alpha = f$ такое, что $\{pf\} = \{qf\}$; это может случиться, только если f равно одной из N дробей $f_1, \ldots, f_N$. Поэтому на каждом из интервалов $f_i < \alpha < f_{i+1}$ способ $A_n(\alpha)$ не меняется, следовательно, имеется не более $N + 1$ различных циклических способов.

Покажем, что все указанные циклические способы различны. Пусть $\varepsilon > 0$ очень мало. В способе $A_n(f_i + \varepsilon)$ дуга $(0, k)$ имеет длину $\left\{\frac{ka_i}{b_i}\right\} + k\varepsilon$ (вспомним, что $f_i = \frac{a_i}{b_i}$, где $\text{НОД}(a_i, b_i) = 1$), поэтому все помеченные точки разбиваются на b_i *кластеров* (здесь кластером мы называем группу близко расположенных точек; длина дуги между соседними точками кластера равна $b_i\varepsilon$). Начальные точки кластеров имеют метки $0, 1, \ldots, b_i - 1$, метки чисел в одном кластере имеют один и тот же остаток при делении на b_i, причем эти метки идут в порядке возрастания (по часовой стрелке). Значит, в способе $A_n(f_i + \varepsilon)$ в кластере, который начинается точкой с меткой 0, точка b_i следует непосредственно за 0. Следующий (по часовой стрелке) кластер (кластер всего один при $i = 0$) начинается с метки $k < b_i$ такой, что $ka_i \equiv 1 (\operatorname{mod} b)_i$, и эта метка k будет первой меткой, меньшей b_i, встречающейся при движении от 0 по часовой стрелке. Так мы можем восстановить по способу $A_n(f_i + \varepsilon)$ числа b_i и k, а по ним – a_i и f_i.

Из сказанного вытекает, что $N + 1$ циклических способов $A(\varepsilon), A(f_1 + \varepsilon), \ldots, A(f_N + \varepsilon)$ попарно различны.

Зафиксируем факт, который будет полезен далее:

если $f_i < \alpha < f_{i+1}$, то в способе $A_n(\alpha)$ точки b_{i+1}, 0, b_i идут подряд по часовой стрелке. (*)

Действительно, ранее мы видели, что b_i сразу следует за 0 в способе $A_n(f_i + \varepsilon) = A_n(\alpha)$. Аналогично, b_{i+1} находится непосредственно перед 0 в способе $A_n(f_{i+1} - \varepsilon) = A_n(\alpha)$.

Наконец, индукцией по n мы докажем, что каждый красивый способ является циклическим. Для $n \le 2$ утверждение очевидно. Теперь предположим, что все красивые способы пометить n точек (метками 0, 1, 2,… …, $n - 1$) являются циклическими. Таким образом, способ A_{n-1}, полученный из данного способа A_n стиранием точки с меткой n, циклический, скажем $A_{n-1} = A_{n-1}(\alpha)$.

Пусть α лежит между несократимыми дробями $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2}$, которые соседствуют в ряду дробей со знаменателями, не превосходящими $n - 1$. Существует не более одной дроби $\frac{i}{n}$ в интервале $\left(\frac{p_1}{q_1}; \frac{p_2}{q_2}\right)$, так как $\frac{i}{n} < \frac{i}{n-1} \le \frac{i+1}{n}$ для $0 < i \le n - 1$.

Случай 1. Такой дроби не существует.

В этом случае единственный циклический способ, продолжающий способ $A_{n-1}(\alpha)$, это $A_n(\alpha)$. Мы знаем, что способы A_n и $A_n(\alpha)$ могут различаться только положением точки n. Предположим, что n следует за x и предшествует y в способе $A_n(\alpha)$. Согласно (*), соседи точки 0 – это q_1 и q_2, поэтому $x, y \ge 1$.

Рис. 2

В способе $A_n(\alpha)$ хорда $(n-1) - x$ параллельна хорде $n - (x - 1)$, значит, метка $n - 1$ находится на дуге $(x - 1, x)$ (рис.2). Аналогично: $n - 1$ находится на дуге $(y, y - 1)$. Следовательно, точки x, y, $x - 1$, $n - 1$ и $y - 1$ идут именно в таком порядке (по часовой стрелке) в способе $A_n(\alpha)$, а значит, и в способе A_n (возможно, $y = x - 1$ или $x = y - 1$). В способе A_n точка n лежит на дуге $(x, n - 1)$, так как хорда $(n-1) - x$ и хорда $(n-1) - x$ не пересекаются. Аналогично, n находится на дуге $(n - 1, y)$. Тогда n должно быть на дуге (x, y), значит, $A_n = A_n(\alpha)$.

Случай 2. Имеется ровно одно i с условием $\frac{p_1}{q_1} < \frac{i}{n} < \frac{p_2}{q_2}$.

В этом случае есть два циклических способа $A_n(\alpha_1)$ и $A_n(\alpha_2)$, каждый из которых является продолжением способа $A_{n-1}(\alpha)$, где $\frac{p_1}{q_1} < \alpha_1 < \frac{i}{n}$ и $\frac{i}{n} < \alpha_2 < \frac{p_2}{q_2}$. Согласно (*), в способе $A_{n-1}(\alpha)$ метка 0 – единственная на дуге (q_2, q_1). По этой же причине n находится на дуге $(q_2, 0)$ в способе $A_n(\alpha_1)$ и на дуге $(0, q_1)$ в способе $A_n(\alpha_2)$.

Полагая $x = q_2$ и $y = q_1$ и повторяя рассуждение из случая 1, получаем, что n должно быть на дуге (x, y) в способе A_n. Следовательно, способ A_n должен совпадать с $A_n(\alpha_1)$ или $A_n(\alpha_2)$.

Доказательство того, что каждый красивый способ является циклическим, завершено. Тем самым, задача полностью решена.

И.Богданов

Ф2323. *В точке А – середине дна стакана с вертикальными стенками – находится тяжелый шарик (рис.1). С какой по величине и направлению скоростью надо выстрелить шарик так, чтобы, ударившись n раз о стенки, он вернулся в исходное положение? Какое время понадобится на такое движение? Ширину стакана считать равной 2l, столкновения шарика со стенками – абсолютно упругими.*

Рис. 1

Сделаем «развертку» стакана, как это показано на рисунке 2. Присваивая исходному стакану номер 0, дадим полученным в результате развертки стаканам номера ±1, ±2 и т.д. Пусть A_n – середина донышка n-го стакана. Чтобы после n упругих ударов об стенки шарик вернулся

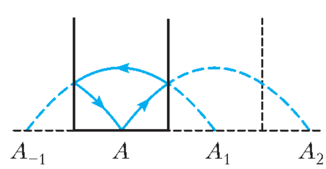


Рис. 2

в исходную точку A, в начальный момент им надо выстрелить так, чтобы в случае отсутствия стенок он попал в точку A_n. Последующая «свертка» стаканов вместе с найденной параболической траекторией даст исходное решение (см. рис.2 для случая $n = 2$).

Для аналитического исследования задачи введем неподвижную систему отсчета с горизонтальной осью x и направленной вертикально вверх осью y. Тогда если v – начальная скорость, а α – отсчитываемый от горизонтального направления начальный угол, то

$$\Delta x = v\cos\alpha \cdot t\,,\ \ \Delta y = v\sin\alpha\cdot t - \frac{gt^2}{2}\,.$$

Приравнивая нулю второе соотношение, находим, что время движения составит

$$t = \frac{2v\sin\alpha}{g}\,.$$

Подставляя это значение в первое соотношение, получим равенство

$$2ln = \frac{v^2\sin 2\alpha}{g}\,,$$

задающее связь между данными задачи и начальными условиями, определяющими требуемое движение. Отсюда имеем

$$\sin 2\alpha = \frac{2lgn}{v^2} \le 1\,.$$

Это неравенство определяет ограничение снизу на величину начальной скорости. В случае, когда нестрогое неравенство обращается в равенство,

$$\sin 2\alpha = 1\,,\ \ \alpha = \frac{\pi}{4}\,,\ \ v = \sqrt{2lgn}\,,$$

и задача имеет единственное решение. Если же имеет место строгое неравенство, то решений два:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2lgn}{v^2} \ \text{ и } \ \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{2lgn}{v^2}\,.$$

Им отвечают, соответственно, настильная и навесная траектории.

А что если начальная точка располагается где угодно на дне стакана или если после столкновений со стенками шарик попадает в любую другую точку донышка? Подумайте над этими вопросами самостоятельно.

А.Буров

Ф2324*. *Тонкостенная труба с жесткими стенками, поперечным круглым сечением $S = 10$ см^2 и длиной $L = 1$ м закрыта плоской тонкой заслонкой снизу и открыта сверху. Эту трубу, удерживая слегка отклоненной от вертикального положения, опустили в воду озера так, что ее верхний конец оказался чуть выше уровня воды в озере. После этого отверстие очень быстро открыли. Заслонка двигалась поступательно в направлении, перпендикулярном оси трубы. На какую максимальную высоту над уровнем воды в озере выплеснется вода из трубы? Рассмотрите два случая: а) сечение трубы при приближении к нижнему концу плавно возрастает от величины S за счет раструба на отрезке, сравнимом по длине с диаметром внутреннего сечения; б) сечение постоянно и равно S вплоть до самого нижнего конца трубы. Во втором случае эффективное сечение потока на входе воды в трубу меньше полного геометрического сечения: $S_{эфф}/S = k_{эфф} = 0{,}5$.*

Сечение трубы достаточно велико, чтобы можно было не учитывать потерь энергии на трение между водой и стенками трубы. Если вблизи нижнего конца сечение трубы плавно изменяется, то в этом случае (а) нет потерь энергии на перемешивание воды, уже находящейся в трубе, с водой, которая только что поступила в трубу, как это имеет место во втором случае (б). Пренебрежем сначала кинетической энергией воды вне трубы около ее нижнего открытого конца и будем полагать, что к моменту, когда вся труба окажется заполненной водой, потенциальная энергия воды в озере уменьшится, так как сначала труба не была заполнена, а теперь в ней находится вода. Иными словами, можно считать, что тонкий слой воды с поверхности озера переместился в трубу. Это уменьшение потенциальной энергии сопровождается ростом кинетической энергии воды, которая движется в объеме трубы. Таким образом, получаем уравнение

$$\rho g S L\frac{L}{2} = \frac{\rho S L u^2}{2}\,.$$

Отсюда находим значение скорости:

$$u = \sqrt{gL}\,.$$

Первая порция воды, вырвавшаяся из трубы, будет иметь скорость u, поэтому она взлетит (выплеснется) на высоту

$$h_{\max} = \frac{u^2}{2g} = \frac{L}{2}\,.$$

Теперь оценим кинетическую энергию, которую к моменту заполнения трубы имеет вода снаружи трубы. Будем считать, что эта вода движется со всех направлений к отверстию и что площадь поверхности сферы, к которой она сходится, равна площади поперечного сечения трубы. Радиус такой сферы равен $R = \sqrt{S/\pi}/2$. Уравнение непрерывности для порции воды, находящейся на расстоянии $x > R$ от центра сферы, дает зависимость скорости этих порций воды от x:

$$4\pi x^2 \cdot u_x = Su\,.$$

Полная кинетическая энергия всей воды, движущейся снаружи трубы в момент ее заполнения, равна примерно

$$\int_R^\infty \frac{\rho dx\cdot 4\pi x^2}{2}\left(\frac{Su}{4\pi x^2}\right)^2 = \int_R^\infty \frac{\rho dx\,(Su)^2}{8\pi x^2} =$$

$$= \frac{\rho\,(Su)^2}{8\pi R} = \frac{L\rho u^2 S}{2}\cdot\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{S}{\pi}}\,.$$

Видно, что эта энергия составляет только небольшую долю, а именно $\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{S}{\pi}} = 8{,}9\cdot 10^{-3}$, от кинетической энергии воды внутри трубы. Это означает, что сделанное пренебрежение оправдано.

Рассмотрим теперь второй случай, когда сечение трубы всюду одинаковое, поэтому вода, втекающая в трубу, не по всему нижнему сечению трубы имеет одинаковую скорость. Вблизи ее нижнего конца у стенок внутри трубы скорость воды равна нулю, а в центре сечения скорость течения самая большая, и это связано не с вязкостью воды, а с тем, что переход от большого сечения потока воды в озере к малому сечению в трубе не плавный! (Подробное рассмотрение этого вопроса есть, например, в книге Е.И.Бутикова, А.А.Быкова и А.С.Кондратьева «Физика для поступающих в вузы» (М.: Наука, 1978, с.114–115). В этом случае эффективное сечение трубы на входе вдвое меньше ее геометрического полного сечения:

$$\frac{S_{эфф}}{S} = \frac{1}{2} = k_{эфф}\,.$$

Значит, струя воды входит в трубу со скоростью u, а вдали от входа в это же время вода в трубе движется со скоростью $u \cdot k_{эфф}$. В результате теряется значительная доля кинетической энергии воды, входящей в трубу. Если к некоторому моменту времени труба оказалась заполненной на длину x и вода в трубе движется с ускорением a, то давление вблизи нижнего конца трубы внутри трубы и обеспечивает это ускорение. Из второго закона Ньютона следует, что

$$pS - \rho Sxg = \rho Sxa\,.$$

Значит, давление равно

$$p = \rho x (g + a)\,.$$

Из уравнения Бернулли для движения воды через нижнее отверстие получаем

$$\frac{\rho v^2}{2} = \rho g L - p\,.$$

Вдобавок нам известна кинематическая связь

$$\frac{dx}{dt} = v \cdot k_{эфф}\,.$$

Объединяя все соотношения, получим уравнение для координаты x уровня воды в трубе:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = k_{эфф}^2 \left(gL - x(g + a)\right).$$

Численное решение этого уравнения на компьютере показывает, что ускорение a, с которым движется уровень воды в трубе, при любых разумных начальных значениях x, a и dx/dt быстро «выходит» на стационарное значение, зависящее от величины $k_{эфф}$. Можно сразу предположить, что $a = \mathrm{const}$, и найти эту постоянную величину. При $0 < x \ll L$, т.е. при $x \approx 0$,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = k_{эфф}\sqrt{2gL}\,.$$

Имеется в виду, что труба уже начала заполняться водой и механизм торможения, для описания которого и вводится величина $k_{эфф}$, уже работает. При $x = L$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_L = k_{эфф}\sqrt{2aL}\,.$$

Считая ускорение постоянной величиной, воспользуемся известным соотношением $2aL = (dx/dt)^2_{кон} - (dx/dt)^2_{нач}$. Из этого соотношения следует

$$a = -g\frac{k_{эфф}^2}{1 + k_{эфф}^2}\,.$$

Отсюда можно найти и максимальную высоту, на которую выплеснется вода из верхнего отверстия трубы:

$$h_{\max} = L\frac{k_{эфф}^4}{1 + k_{эфф}^2}\,.$$

В первом случае (а) $k_{эфф} = 1$, поэтому $h_{\max} = L/2$, во втором случае (б) $k_{эфф} = 0{,}5$ и, значит, $h_{\max} = L/20$. Заметим, что если в эксперименте получается какое-то промежуточное значение $h_{\max}$, то по отношению $h_{\max}/L$ можно найти соответствующее ему значение коэффициента $k_{эфф}$.

В.Озеров

Ф2325. *Три одинаковые массы (например, равные единице) закреплены в вершинах правильного треугольника со стороной a. В скольких положениях равновесия может находиться пробная точка массой m под действием ньютоновского притяжения со стороны масс, сосредоточенных в вершинах треугольника?*

Из соображений симметрии ясно, что по крайней мере одно положение равновесие, при котором пробная точка P расположена в центре треугольника, существует (красная точка на рисунке 1). Также ясно, что вне треугольника равновесий нет. Указанное равновесие принадлежит всем трем осям симметрии треугольника. Попробуем поискать на этих осях другие равновесия, опираясь на то обстоятельство, что в каждой точке таких осей результирующая сил притяжения направлена вдоль них самих.

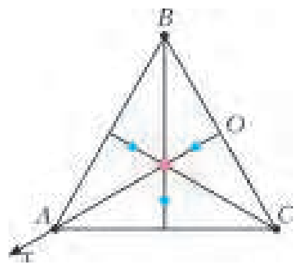


Рис. 1

Рассмотрим, например, ось симметрии, проходящую через вершину A и точку O – середину стороны BC. Введем координатную ось x с началом в точке O, направленную в сторону вершины A. Тогда координата вершины A составит $a\sqrt{3}/2$. Если точка P располагается на оси x внутри треугольника ABC, то она будет притягиваться вершиной A силой, направленной вдоль оси x и равной

$$F_A = \frac{m}{\left(a\sqrt{3}/2 - x\right)^2}\,.$$

Здесь и далее гравитационную постоянную будем считать равной единице. Суммарная сила притяжения со стороны вершин B и C также направлена по оси x, и ее величина составляет

$$F_{BC} = -2\frac{mx}{\left(x^2 + (a/2)^2\right)^{3/2}}\,.$$

Таким образом, условие равновесия принимает вид

$$F = F_A + F_{BC} = m\left(\frac{1}{\left(a\sqrt{3}/2 - x\right)^2} - \frac{2x}{\left(x^2 + (a/2)^2\right)^{3/2}}\right) = 0\,.$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться в том, что отвечающее центру треугольника значение $x_1 = a\sqrt{3}/6$ удовлетворяет этому уравнению.

Посмотрим, нет ли у этого уравнения других решений. Для этого заметим, что при $x = 0$ справедливо неравенство $F(0) > 0$, выражающее то обстоятельство, что если точка P располагается в точке O, то результирующая сила направлена в сторону вершины A. Далее, например, при $x_2 = a\sqrt{3}/8$

$$F(x_2) = \frac{64m}{513a^2}\left(19 - 54\sqrt{\frac{3}{19}}\right) \approx -0{,}306579237\,\frac{m}{a^2} < 0 .$$

Функция $F(x)$ непрерывна и принимает на отрезке $[0; x_2]$ значения противоположных знаков. Таким образом, на этом отрезке у нее имеется еще по крайней мере один корень. Вычисления показывают, что этот корень один и он приблизительно равен $x_3 \approx 0{,}1242929158a$.

Итак, в целом по треугольнику имеются по крайней мере четыре положения равновесия (см. красную и синие точки на рисунке 1).

Замечания

1. Вместо вычисления значения функции в конкретной точке x_2 достаточно было один раз продифференцировать функцию $F(x)$ и убедиться в ее строгом монотонном возрастании в окрестности точки x_1 (рис.2.).

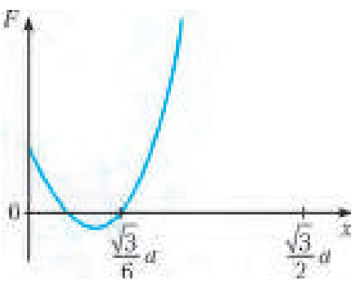


Рис. 2

2. Оси симметрии разделяют треугольник ABC на шесть маленьких базисных треугольников. Доказательство отсутствия равновесий внутри этих треугольников автору остается неизвестным.

3. Было бы интересно исследовать вопрос о числе равновесий для произвольного правильного многоугольника с равными массами в вершинах.

В.Никонов

Ф2326. *Небо над Африкой закрыто облаками. Большая лужа глубиной 0,5 м заполнена мутной темной водой (в воде присутствует взвесь черной глины – слоны постарались) с температурой $+25\ °C$, равной температуре воздуха над лужей. Если погрузить в воду влагозащищенный люксметр, обратив его чувствительный элемент вверх, то он показывает, что на глубине 10 см свет в 2,72 раза слабее, чем возле самой поверхности, на глубине 20 см – слабее еще в 2,72 раза и т.д. В некоторый момент Солнце перешло в зенит и облака раскрылись. Поток излучения Солнца, достигший поверхности лужи, равен $E = 1000$ Вт/м^2. Какой через 1 минуту после начала освещения будет температура воды в этой луже на глубине 5 см и какой она будет на глубине 40 см?*

Частички черной глины только поглощают свет, но не рассеивают его, поэтому вода темная. Поскольку мощность выделяющегося тепла, приходящаяся на единицу объема жидкости, вверху больше, чем внизу, конвекция в луже со спокойной водой (слоны ушли) не возникнет. Коэффициент теплопроводности воды, равный $0{,}6$ Вт/(м·К), весьма мал, поэтому теплопередачей от прогревшихся участков к прохладным слоям воды за небольшой промежуток времени можно пренебречь. По условию задачи интенсивность тепловыделения убывает с глубиной h (см) по экспоненциальному закону:

$$E = E_0 \cdot \exp\left(-\frac{h}{10}\right), \text{ где } E_0 = 1000\ \text{Вт/м}^2 .$$

На каждый объем воды толщиной 1 мм и площадью 1 м^2 ($V = 1\ \text{мм} \cdot 1\ \text{м}^2 = 10^{-3}\ \text{м}^3$, $m = 1$ кг), имеющий теплоемкость $C = 4200$ Дж/К, на глубине h (см) выделяется тепловая мощность

$$W = 1000\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \cdot \exp\left(-\frac{h}{10}\right) \cdot 1\ \text{м}^2 = 1000\ \text{Вт} \cdot \exp\left(-\frac{h}{10}\right).$$

Это означает, что на глубине h температура воды поднимается со скоростью

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1000}{4200} \cdot \exp\left(-\frac{h}{10}\right) \text{К/с} .$$

За 60 секунд температура воды на глубине 5 см поднимется до $25\ °C + 8{,}66\ °C = 33{,}66\ °C$. А на глубине 40 см повышение температуры за такое же время будет существенно меньше, и температура поднимется до $25\ °C + 0{,}26\ °C = 25{,}26\ °C$.

А.Светлов

Ф2327. *Три маленьких шарика расположены вдоль оси координат x в космосе. Вокруг больше ничего нет, гравитационными силами взаимодействия можно пренебречь по сравнению с электрическими. Скорости всех шариков в начальный момент равны нулю; координаты шариков x, 2x, 4x; заряды шариков q, 4q, 9q; массы шариков m, 3m, 2m соответственно. Какими будут скорости шариков через очень большое время?*

У нас неизвестных три, а уравнений, которые можно составить, используя законы сохранения импульса и энергии, всего два. Поэтому давайте внимательно разберемся с соотношениями числовых данных в условии. Начальные расстояния r_{12} и r_{23} от среднего шарика до двух крайних относятся как 1 к 2. А если найти ускорения шариков в начальный момент, то их разности $a_1 - a_2$ и $a_3 - a_2$ тоже относятся как $1:2$. Это означает, что и в любой другой момент времени отношение расстояний между шариками будет таким же! Следовательно, скорости шариков будут иметь такое же соотношение, как и их ускорения, т.е.

$$v_1 : v_2 : v_3 = (-3) : (-1) : (+3) .$$

Это дополнительное кинематическое соотношение вместе с двумя уравнениями, полученными на основе законов сохранения, позволяет найти простое (школьное) решение этой задачи.

Обозначим v минимальную по величине скорость (скорость среднего шарика), тогда через большое время скорости шариков, с учетом закона сохранения импульса, будут равны $-3v$, $-v$, $+3v$. Потенциальная энергия взаимодействия шариков через большое время уменьшится до нуля и, в соответствии с законом сохранения энергии, перейдет в кинетическую энергию движения шариков:

$$E_{\text{кин}} = \frac{m(3v)^2}{2} + \frac{3m(v)^2}{2} + \frac{2m(3v)^2}{2} =$$

$$= 15mv^2 = E_{\text{пот}} = k\frac{q\cdot 4q}{x} + k\frac{4q\cdot 9q}{2x} + k\frac{q\cdot 9q}{3x} = 25\frac{kq^2}{x}$$

(здесь k – это электрическая постоянная). Отсюда находим искомые величины скоростей:

$$v = \sqrt{\frac{5kq^2}{3mx}},\ v_1 = 3v,\ v_2 = v,\ v_3 = 3v.$$

А.Зильберман

Ф2328. *Идеальная батарейка, амперметр и вольтметр соединены последовательно в замкнутую цепь. Показания приборов равны 1А и 10 В соответственно. Если параллельно амперметру подключить резистор с неким неизвестным сопротивлением, то показание амперметра станет 0,9 А, а показание вольтметра будет 10,2 В. Какова ЭДС батарейки? Каковы внутренние сопротивления приборов? Каково это «неизвестное сопротивление»?*

Электродвижущая сила батарейки $\mathscr{E}$ равна сумме падений напряжения на приборах. В первом случае

$$\mathscr{E} = I_1\cdot R_{\text{A}} + U_1 = 1\,\text{А}\cdot R_{\text{A}} + 10\,\text{В},$$

где R_{A} – это внутреннее сопротивление амперметра. Во втором случае

$$\mathscr{E} = I_2\cdot R_{\text{A}} + U_2 = 0{,}9\,\text{А}\cdot R_{\text{A}} + 10{,}2\,\text{В}.$$

Из полученных двух уравнений находим

$$\mathscr{E} = \frac{I_2U_1 - I_1U_2}{I_1 - I_2} = 12\ \text{В},$$

$$R_{\text{A}} = \frac{U_2 - U_1}{I_1 - I_2} = 2\ \text{Ом}.$$

Для определения внутреннего сопротивления вольтметра нужно разделить падение напряжения на нем на ток, текущий через вольтметр. Ток и напряжение вольтметра известны для цепи без неизвестного резистора. Получаем

$$R_{\text{V}} = \frac{U_1}{I_1} = 10\ \text{Ом}.$$

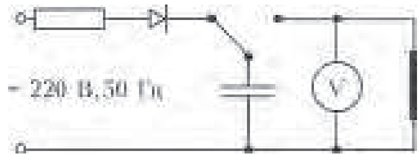
Теперь находим «неизвестное сопротивление»:

$$R = \frac{\mathscr{E} - U_2}{\frac{U_2}{R_{\text{V}}} - I_2} = 15\ \text{Ом}.$$

Конечно, может смущать весьма малое внутреннее сопротивление вольтметра. Но каких только чудес на свете не бывает!

А.Зильберман

Ф2329. *Выпрямитель сетевого напряжения (220 В, 50 Гц) представляет собой последовательно соединенные резистор сопротивлением 0,5 кОм и полупроводниковый диод, выдерживающий прямой ток 1 А и обратное напряжение 400 В. Конденсатор емкостью 0,001 Ф сначала подключили к выпрямителю и дождались максимальной зарядки (см. рисунок). Затем контакт ключа перекинули, и обкладки конденсатора оказались подключенными к медной проволочке длиной $L = 4{,}7$ см с поперечным сечением $S = 10^{-2}$ мм^2. Проволочка находится в воздухе при комнатной температуре $t_0 = 20\ ^\circ C$. Что будет показывать идеальный вольтметр через 10 с после подключения проволочки? Необходимые для решения задачи дополнительные данные найдите самостоятельно. При реальном проведении такого эксперимента для безопасности рекомендуется проволочку поместить между листами бумаги. Считайте, что молярная теплоемкость меди (и твердой, и жидкой) не меняется с температурой и равна $3R = 25$ Дж/(моль·К).*



Напряжение, до которого был заряжен конденсатор до перебрасывания ключа, равно $\sqrt{2}U$, где $U = 220$ В – напряжение сети. В конденсаторе до подключения проволочки была накоплена энергия

$$W = \frac{C\left(\sqrt{2}U\right)^2}{2} = 48{,}4\ \text{Дж}.$$

Легко догадаться, что проволочка успеет нагреться, расплавиться и даже испариться, а конденсатор так до конца и не разрядится. Необходимые дополнительные данные можно найти в любом физическом справочнике. Молярная масса меди $\text{M} = 64$ г/моль, плотность меди $\rho = 8{,}96$ г/см^3 ≈ 9 г/см^3. Масса проволочки равна $m = \rho SL$. Это соответствует количеству вещества $\nu = \rho SL/\text{M}$. Температура плавления меди $t_1 = 1083\ ^\circ\text{C}$, молярная теплота плавления $q = 13$ кДж/моль. Температура кипения меди при атмосферном давлении $t_2 = 2080\ ^\circ\text{C}$, молярная теплота испарения меди $r = 302$ кДж/моль. Конечно, часть энергии конденсатора будет израсходована на излучение и нагрев воздуха, но этими «потерями» (интуиция подсказывает) можно пренебречь. Всего на нагрев, плавление и испарение меди потребуется энергия

$$Q = \left(C(t_1 - t_0) + q + C(t_2 - t_1) + r\right)\frac{\rho SL}{\text{M}} \approx 24{,}3\ \text{Дж}.$$

Остаток энергии в конденсаторе будет равен

$$W - Q = \frac{CU_C^2}{2}.$$

Поэтому вольтметр через 10 с после подключения проволочки покажет напряжение

$$U_C = \sqrt{\frac{2(W - Q)}{C}} \approx 220\ \text{В}.$$

А.Тарчевский

Ф2330*. *Длинный ($L = 10$ м) соленоид представляет собой намотанную в один слой на цилиндрический каркас диаметром $D = 0{,}1$ м проволоку прямоугольно-*

го сечения с размером сечения $a \times a$ (a = 0,1 мм). Поверхность проволоки покрыта тонким слоем непроводящего ток лака. Выполняются такие соотношения: $L \gg D \gg a$. Витки проволоки расположены вплотную друг к другу. Концы проволоки выведены перпендикулярно оси симметрии соленоида и далеко-далеко от соленоида подключены к батарейке. По проволоке течет ток I. Вблизи центра соленоида на его внешней поверхности сидит маленький жук. У жука есть совсем маленький компас, и он ползет все время в направлении вектора индукции магнитного поля. Какова форма траектории движения жука по соленоиду? Считая, что длина пути жука от точки старта составила s = 1 м, найдите величину перемещения жука.

У магнитного поля вне объема соленоида, точнее на его внешней поверхности вблизи середины, имеется составляющая вдоль оси соленоида, направленная от северного полюса магнита к его южному полюсу, и составляющая магнитного поля, поперечная к оси соленоида, направленная вдоль его внешней поверхности.

Поперечную составляющую можно найти, воспользовавшись теоремой о циркуляции вектора индукции магнитного поля. Получим

$$B_\perp = \frac{\mu_0 I}{\pi(D+2a)} \approx \frac{\mu_0 I}{\pi D},$$

где μ_0 – магнитная постоянная.

Чтобы найти продольную составляющую индукции магнитного поля, нужно вычислить поток вектора индукции, который проходит внутри соленоида от его южного полюса к северному. Число витков на единицу длины соленоида равно $n = 1/a$. При протекании тока I по проволоке (по виткам соленоида) внутри соленоида вблизи его середины создается магнитное поле с индукцией $B = nI\mu_0$. Магнитный поток, проходящий через поперечное сечение соленоида, в его середине равен

$$\Phi = B\frac{\pi D^2}{4}.$$

Этот магнитный поток *внутри соленоида* «идет» от южного полюса к северному полюсу магнита/соленоида. Для оценки величины продольной составляющей магнитного поля *вне соленоида* мы используем упрощенную модель двух точечных (маленьких в сравнении с длиной соленоида) магнитных зарядов с разными свойствами – северным и южным. От северного полюса магнита поток «разбегается» во все стороны, т.е. в телесный угол 4π. А к южному магнитному полюсу такой же поток «сбегается» со всех сторон, т.е. из телесного угла тоже 4π. Индукция магнитного поля вне соленоида вблизи его центра создается «разбежавшимся» потоком вектора индукции от северного полюса и «сбегающимся», или «собирающимся», потоком вектора индукции к южному магнитному полюсу. Отсюда находим продольную составляющую индукции магнитного поля вне объема соленоида, но вблизи его поверхности и около его середины:

$$B_\parallel = 2\frac{\Phi}{4\pi\left((L/2)^2 + (D/2+a)^2\right)} \approx$$

$$\approx 2\frac{\mu_0 I n\pi (D/2)^2}{4\pi (L/2)^2} = \frac{\mu_0 I D^2}{2aL^2}.$$

Суммарное поле вблизи середины соленоида на его внешней поверхности направлено по касательной к его поверхности, т.е. жук ползет по поверхности соленоида, а форма его траектории – это часть спирали диаметром

$$D + 2a \approx D$$

и шагом спирали

$$H = \pi D\frac{B_\parallel}{B_\perp} = \pi D\frac{\mu_0 I D^2/(2aL^2)}{\mu_0 I/(\pi D)} = \frac{\pi^2 D^4}{2aL^2}.$$

Для значений параметров, приведенных в условии задачи, $H \approx 4{,}9$ см. При длине пути жука $s = 1$ м он сместился вдоль оси соленоида на расстояние

$$d_1 = \frac{sH}{\sqrt{H^2 + \pi^2 D^2}} \approx 15{,}5 \text{ см}$$

и при этом совершил поворот вокруг оси соленоида на угол

$$\alpha = \frac{2\pi s}{\sqrt{H^2 + \pi^2 D^2}} \approx 19{,}76 \text{ рад},$$

т.е. на три целых оборота и плюс еще на угол $\varphi \approx 0{,}9$ рад. Проекция вектора перемещения жука на плоскость сечения соленоида, перпендикулярного его оси, составила

$$d_2 = 2\frac{D}{2}\sin\frac{\varphi}{2} \approx 4{,}4 \text{ см}.$$

В итоге величина перемещения жука от точки старта будет равна

$$l = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} \approx 16 \text{ см} \ll 10 \text{ м}.$$

Если длина пути s будет существенно больше, то, естественно, силовая линия индукции магнитного поля «уйдет» под поверхность цилиндра внутрь соленоида. Но числовые данные в условии задачи таковы, что этого не происходит.

С.Жуков

Ф2331. *Граница раздела областей пространства, в одной из которых есть однородное магнитное поле с индукцией B = 10 Тл, а в другой магнитного поля нет, представляет собой плоскость. Естественно, что вектор $\vec{B}$ параллелен этой границе раздела. Из области, где поля нет, в область с магнитным полем влетает электрон с зарядом e. Его скорость в момент пересечения границы перпендикулярна вектору $\vec{B}$, составляет угол α с плоскостью границы раздела и величина скорости много меньше скорости света. Движущийся в магнитном поле с ускорением a электрон излучает, и мощность электромагнитных волн – так называемого синхротронного излучения – пропорциональна квадрату произведения величины заряда на величину ускорения, деленного на скорость света:*

$W = \delta(ea/c)^2$. Коэффициент пропорциональности обозначен символом δ, он имеет размерность электрического сопротивления и равен δ = 20 Ом. При каком значении угла α электрон не покинет область с магнитным полем?

Для справки: в Международной системе единиц (СИ) мощность излучения заряда q, движущегося с ускорением a, равна $W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a^2q^2}{3c^3}$.

Будем считать, что потери на излучение невелики. Если совсем не учитывать потери энергии электрона за счет излучения (первое приближение), то он обязательно покинет область с магнитным полем. Ускорение нерелятивистского электрона, движущегося в однородном магнитном поле со скоростью, перпендикулярной этому магнитному полю, без учета излучения равно

$$a = \frac{ev_0B}{m},$$

где m – масса электрона, v_0 – его скорость. Период обращения электрона по окружности радиусом $R_0 = v_0m/(eB)$ равен

$$T = \frac{2\pi m}{eB}.$$

Учтем теперь наличие излучения (второе приближение). Мощность потерь на синхротронное излучение равна

$$W = \delta\left(\frac{ea}{c}\right)^2 = \frac{\delta e^4v^2B^2}{m^2c^2}.$$

Она пропорциональна кинетической энергии электрона. За один период электрон теряет примерно $\frac{\delta e^4v^2B^2}{m^2c^2}\cdot\frac{2\pi m}{eB}$ своей кинетической энергии, и это составляет небольшую долю от его первоначальной энергии: примерно $1,4\cdot10^{-10}$. Скорость электрона и пропорциональный ей радиус окружности траектории за один оборот уменьшились до величин

$$v_1 = v_0\left(1-\frac{2\pi\delta e^3B}{mc^2}\right) \text{ и } R_1 = R_0\left(1-\frac{2\pi\delta e^3B}{mc^2}\right).$$

Если электрон влетел в область с магнитным полем под небольшим углом α к поверхности раздела и должен был бы при отсутствии потерь на излучение примерно через период вылететь из области с магнитным полем, то при уменьшении радиуса кривизны траектории за счет излучения и при сохранении положения центра кривизны траектория может вся целиком оказаться в области с магнитным полем. Для этого должно выполняться неравенство

$$\frac{2\pi\delta e^3B}{mc^2} > 1-\cos\alpha \approx \frac{\alpha}{2}, \text{ или}$$

$$\alpha < \sqrt{\frac{4\pi\delta e^3B}{mc^2}} \approx 1,2\cdot10^{-5} \text{ рад}.$$

Ускорение электрона, движущегося в магнитном поле, имеет не только составляющую, перпендикулярную скорости, но и направленную навстречу скорости продольную составляющую, возникающую вследствие наличия излучения. Будем считать, что эта продольная составляющая ускорения значительно меньше поперечной составляющей, тогда получается, что и кинетическая энергия электрона, и величина его скорости убывают по экспоненциальному закону. Это означает, что движение электрона будет описываться так же, как и колебания маятника в среде с вязким трением, т.е. координаты частицы будут описываться уравнением затухающих колебаний. Можно составить соответствующие уравнении, решить их и прийти к такому же соотношению для угла α, которое уже получено.

Д.Сергеев

Ф2332. *Центр квадрата со стороной 1 см находится на главной оптической оси тонкой линзы. Действительное изображение квадрата, которое создает линза, – это трапеция, параллельные стороны которой перпендикулярны главной оптической оси линзы, пересекают ее и имеют длины 2 см и 3 см. Каково расстояние между этими сторонами трапеции?*

Поскольку стороны трапеции перпендикулярны оптической оси и пересекают ее, то и соответствующие стороны квадрата тоже перпендикулярны оптической оси и тоже пересекают ее. Поперечные увеличения двух сторон квадрата, перпендикулярных главной оптической оси линзы, равны $\Gamma_{1\perp} = 2$ и $\Gamma_{2\perp} = 3$.

Утверждается, что продольное увеличение отрезка, лежащего на оптической оси, на концах которого находятся те самые две стороны квадрата, перпендикулярные оптической оси линзы, равно произведению поперечных увеличений объектов, расположенных вблизи концов этого отрезка, т.е. $\Gamma_{=} = \Gamma_{1\perp}\cdot\Gamma_{2\perp} = 2\cdot3 = 6$. Расстояние между сторонами квадрата, перпендикулярными оптической оси, равно 1 см. Следовательно, расстояние между параллельными сторонами трапеции равно 6 см.

Докажем используемое утверждение. Пусть A и B – расстояния от линзы до источника света, находящегося на оптической оси линзы, и до его изображения соответственно. Обозначим буквами a и b расстояния от линзы до второго источника света и до его изображения, которые тоже находятся на оптической оси линзы. Поперечные увеличения изображений объектов малых размеров, располагающихся вблизи точек A и a, равны B/a и b/a соответственно. Продольное увеличение отрезка Aa равно $(B-b)/(a-A)$. Используем формулу для тонкой линзы:

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{1}{F}.$$

Отсюда следует

$$\frac{1}{A}-\frac{1}{a} = \frac{1}{b}-\frac{1}{B},$$

или

$$\frac{a-A}{aA} = \frac{B-b}{Bb}.$$

Следовательно,

$$\frac{B-b}{a-A} = \frac{Bb}{aA} = \frac{B}{A}\frac{b}{a}.$$

Что и требовалось доказать.

Е.Кузнецов