V. G. Kadyshevskii, A model of scalar field theory in quantized space-time, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1962, Volume 147, Number 6, 1336–1339

Доклады Академии наук СССР
1962. Том 147, № 6

ФИЗИКА

В. Г. КАДЫШЕВСКИЙ

МОДЕЛЬ СКАЛЯРНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ В КВАНТОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ — ВРЕМЕНИ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 23 VI 1962)

§ 1. В настоящей работе на примере простой скалярной модели изучаются некоторые обобщения аппарата квантовой теории поля, возможные в формализме квантованного пространства — времени ([1-5]). Поскольку в новой схеме координаты x^n становятся некоммутирующими операторами, все построения производятся в p-пространстве, являющемся в данном случае пространством постоянной кривизны. Учитывая аргументацию § 2 работы ([5]), мы определим 4-импульс p_m ($m = 0, 1, 2, 3$) посредством соотношения (5) из ([5]) при $\varepsilon = 1$.

§ 2. Пусть $\psi(p)$ и $\varphi(k)$ — данные скалярные поля, описывающие частицы с массами m и μ, причем поле $\psi(p)$ комплексное, а $\varphi(k)$ — действительное. Последнее означает (см., например, ([6])), что при комплексном сопряжении $\psi(p)$ переходит в $\psi^*(-p)$, а $\varphi(k)$ в $\varphi(-k)$. Будем считать, что обычный формализм свободных полей переносится в новую схему с изменением лишь в одном пункте: вместо функции $\delta(p-q)$, фигурирующей в релятивистски ковариантной записи перестановочных соотношений, «нормальных» и «хронологических» спариваний, необходимо использовать, в соответствии с новым характером интегрирования в p-пространстве, функцию $\delta(p\,(-)\,q)$, определенную соотношением (19), из ([5]).

Предположим далее, что лагранжиан взаимодействия рассматриваемой модели в x-представлении обычной теории имеет вид $\mathscr{L}(x) = g\psi^+(x)\,\psi(x)\varphi(x)$ («крест» означает эрмитовское сопряжение). Для построения S-матрицы в кривом p-пространстве мы должны обобщить величину *

$$\widetilde{\mathscr{L}}(q) = \int e^{-iqx}\,\mathscr{L}(x)\,dx = \frac{g}{\sqrt{2\pi}}\psi^+(q) * \psi(q) * \varphi(q), \tag{1}$$

поскольку $\int \mathscr{L}(x)\,dx = \widetilde{\mathscr{L}}(0)$. Оказывается, что, несмотря на неассоциативность новой операции свертки (см. (17) в ([5])), это обобщение при учете требования $\widetilde{\mathscr{L}}^+(q) = \widetilde{\mathscr{L}}(-q)$, производится однозначно **:

$$\widetilde{\mathscr{L}}(q) = \frac{g}{\sqrt{2\pi}}\,[\psi^+(q) * \psi(q)] * \varphi(q) \tag{2}$$

(здесь символом $*$ обозначена свертка (17) из ([5])), откуда

$$\widetilde{\mathscr{L}}(0) = \frac{g}{\sqrt{2\pi}}\int \psi^+(p)\,\psi(-(p\,(+)\,k))\,\varphi(k)\,d\Omega_p\,d\Omega_k. \tag{3}$$

---

* Для записи $\widetilde{\mathscr{L}}(q)$ используется символ свертки; фурье-образы полей $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ определяются по ([6]).

** Для самодействующих скалярных полей, например, поля Хэрста — Тирринга ([7]), обобщение $\widetilde{\mathscr{L}}(q)$ особенно просто:

$$\widetilde{\mathscr{L}}(q) = \frac{g}{\sqrt{2\pi}}\,\varphi(q) * \varphi(q) * \varphi(q) = \frac{g}{\sqrt{2\pi}}\int \varphi(-(p\,(-)\,q))\,\varphi(k)\,\varphi(-(k\,(-)\,p))\,d\Omega_p\,d\Omega_k.$$

Если операторы полей заданы в представлении взаимодействия, то S-матрица данной модели с учетом (3) формально может быть записана следующим образом:

$$S = T\exp\left\{i\frac{g}{\sqrt{2\pi}}\int\psi^{+}(p)\,\psi\,(-(p\,(+)\,k))\,\varphi\,(k)\,d\Omega_p\,d\Omega_k\right\}, \tag{4}$$

где символ T означает, что функционал (4) приводится к нормальной форме согласно теореме Вика для T-произведений, т. е. с использованием «хронологических» спариваний.

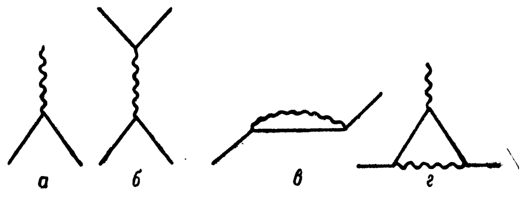

Рис. 1

При разложении (4) по степеням g мы получаем совокупность диаграмм Фейнмана с видоизмененным законом сложения 4-импульсов в вершинах *, новым элементом объема и новой областью интегрирования. Приведем для примера несколько простейших диаграмм (см. рис. 1) и отвечающих им выражений (прямая линия на рис. 1 соответствует заряженным частицам, волнистая — нейтральным):

$$\begin{array}{ll}
а & \dfrac{ig}{\sqrt{2\pi}}N\,[\psi^{+}(-p)\psi(p(-)k)\varphi(k)]; \\
б & \dfrac{ig^2}{8\pi^2}\Delta^c(k)\,N\,[\psi^{+}(-p)\,\psi\,(p\,(-)\,k)\,\psi^{+}(-p')\,\psi\,(p'\,(+)\,k)]; \\
в & \dfrac{g^2}{16\pi^3}N\,[\psi^{+}(-p)\,\psi\,(p)]\displaystyle\int_{\Omega}\Delta^c\,(p\,(-)\,k)\,\Delta^c\,(k)\,d\Omega_k; \qquad (5) \\
г & \dfrac{g^3}{6\,(2\pi)^{7/2}}\displaystyle\int d\Omega_k N\,[\psi^{+}(-(p\,(-)\,k\,(+)\,k'\,(+)k))\,\varphi\,(k')\,\psi(p)]\times \\
 & \times D^c(p\,(-)\,k)\,\Delta^c\,(k)\,D^c\,(p\,(-)\,k\,(+)\,k')
\end{array}$$

(N — символ нормального произведения).

§ 3. Исследование сходимости интегралов, содержащихся в разложении матрицы (4), мы начнем с рассмотрения диаграммы $в$, которой в обычной теории соответствует логарифмически расходящийся интеграл

$$\Sigma_2(p^2) = \frac{1}{i}\int D^c\,(p-k)\,\Delta^c\,(k)\,d^4k. \tag{6}$$

Как известно, (6) можно также представить в виде

$$\Sigma_2\,(p^2) = \lim_{L\to\infty}\int_0^1 d\alpha\int_{k_\nu^2\leqslant L^2}\frac{dk_4\,d\mathbf{k}}{(M+k_4^2-i\varepsilon)^2}\qquad (\nu = 1, 2, 3, 4), \tag{7}$$

где $M = (1-\alpha)\,\mu^2 + \alpha m^2 - d\,(1-\alpha)\,p^2 + \mathbf{k}^2 > 0$ при $p^2 < (m+\mu)^2$, а внутреннее интегрирование производится по эвклидову 4-пространству. В S-матрице (4), согласно (5), вместо (6) будем иметь

$$\Sigma_2\,(p^2) = \frac{1}{i}\int_{\Omega} D^c\,(p\,(-)\,k)\;\Delta^c\,(k)\;d\Omega_k \tag{8}$$

или в явном виде (при учете (10) и (15) из [5])

$$\Sigma_2(p^2) = \frac{1}{i}\int_{k^2\geqslant -1}\frac{d^4k}{\sqrt{1+k^2}\,[1+m^2-(\sqrt{1+p^2}\,\sqrt{1+k^2}-pk)^2-i\varepsilon]\,(\mu^2-k^2-i\varepsilon)}. \tag{9}$$

---

* При этом порядок суммируемых 4-импульсов из-за однозначности выражения (3) для $\tilde{\mathscr{L}}(0)$ и свойства $\delta\,(p\,(-)\,q) = \delta\,(q\,(-)\,p)$ функции $\delta\,(p\,(-)\,q)$, входящей в «хронологические» спаривания, является совершенно определенным и находится в соответствии с правилом, данным в [3].

Для (9) можно найти параметрическое представление, аналогичное (7) *

$$\Sigma_2(p^2) = \frac{1}{i}\int_0^1 \frac{d\alpha}{1+4\alpha(1-\alpha)p^2}\int_\Omega \frac{dk_0\,d\mathbf{k}}{\sqrt{1+k^2}\,(M-k_0^2-i\varepsilon)^2}, \qquad (10)$$

где

$$M = \frac{(1-\alpha)\mu^2+\alpha m^2}{\sqrt{1+4\alpha(1-\alpha)p^2}} + \frac{(1+\mathbf{k}^2)-(1-\mathbf{k}^2)\sqrt{1+4\alpha(1-\alpha)p^2}}{2\sqrt{1+4\alpha(1-\alpha)p^2}} > 0 \qquad (11)$$

при $-1 \leqslant p^2 < (m\,(+)\,\mu)^2 = (m\sqrt{1+\mu^2}+\mu\sqrt{1+m^2})^2$.

Однако в представлении (10), в отличие от (7), вид области Ω и аналитические свойства подынтегральной функции не позволяют совершить поворот на $\pi/2$ пути интегрирования в плоскости k_0 и перейти таким образом к интегрированию по кривому p-пространству с положительно определенной метрикой (в дальнейшем E_4), являющемуся аналогом эвклидова 4-пространства в (14)). По этой причине интеграл (9) — (10), несмотря на «радиальную» сходимость, оказывается расходящимся по гиперболическим угловым переменным (ср. с § 26 из ([6]), где обсуждается аналогичная ситуация с расходимостью по обычным углам).

Если бы переход к интегрированию по пространству E_4 был возможен, то мы имели бы для рассматриваемого интеграла явно сходящееся выражение

$$\Sigma_2'(p^2) = \int_0^1 \frac{d\alpha}{1+4\alpha(1-\alpha)p^2}\int_{k_\nu^2\leqslant 1} \frac{dk_4\,d\mathbf{k}}{\sqrt{1-k_\nu^2}\,(M+k_4^2-i\varepsilon)^2} \qquad (\nu=1,2,3,4), \quad (12)$$

которое является вещественной величиной при значениях p^2 ниже «порога» $(m\,(+)\,\mu)$ (см. (11)). Интеграл (12), очевидно, полностью аналогичен (7). Мы можем записать эти выражения в еще более сходной форме, если совершим в каждом из них аналитическое продолжение по переменной p_0 от ее действительных значений к чисто мнимым значениям ** ip_4 и произведем интеграции по α. В результате будем иметь:

$$\Sigma_2(-p_\nu^2) = \lim_{L\to\infty}\int_{k_\nu^2\leqslant L^2} \frac{dk}{[m+(p-k)_\nu^2]\,(\mu^2+k_\nu^2)} \qquad (dk = dk_4\,d\mathbf{k}); \qquad (13)$$

$$\Sigma_2'(-p_\nu^2) = \int_{k_\nu^2\leqslant 1} \frac{d\Omega_k}{[m^2+(p\,(-)\,k)_\nu^2]\,(\mu^2+k_\nu^2)}, \qquad (14)$$

где $(p\,(-)\,k)_\nu^2 = 1-(\sqrt{1-p_\nu^2}\sqrt{1-k_\nu^2}+p_\nu k_\nu)^2$ есть квадрат вектора, преобразованного с помощью операции сдвига в E_4, а $d\Omega_k = dk/\sqrt{1-k_\nu^2}$ — элемент объема этого пространства

§ 4. Анализ показывает, что расходимости по гиперболическим углам возникают и в высших порядках теории возмущений. Поэтому данный в § 3 способ построения конечного интеграла Σ_2' (см. (12) и (14)) целесообразно распространить на случай произвольной диаграммы, т. е. мы приходим к выводу, что матрица рассеяния в рассматриваемой схеме должна быть обобщением такой формы обычной S-матрицы, в которой все внутренние интегрирования производятся по эвклидову 4-пространству. При таком подходе роль новой S-матрицы может играть функционал *** (ср. с ([9]))

* (10) является релятивистски инвариантным представлением $\Sigma_2(p^2)$, так как 4-вектор p_m входит в подынтегральное выражение лишь в виде p^2. Очевидно, при $l\to 0$ (10) переходит в фейнмановское представление (7).

** Возможность такого аналитического продолжения для (7) очевидна, а для (12) может быть строго доказана.

*** Аналогичный функционал рассматривался Ю. А. Гольфандом ([8]).

$$S' = e^{\Delta+\Sigma} \exp\left[\frac{ig}{\sqrt{2\pi}}\int \psi^+(p)\,\psi(-(p(+)k))\,\varphi(k)\,d\Omega_p d\Omega_k\right],$$

где

$$\Delta = \frac{1}{4\pi}\frac{d\Omega_k}{\mu^2+k_\nu^2}\frac{\delta^2}{\delta\varphi(k)\,\delta\varphi(-k)}; \quad \Sigma = \frac{1}{2\pi}\int d\Omega_p \frac{\delta}{\delta\psi(p)}\frac{1}{m^2+p_\nu^2}\frac{\delta}{\delta\psi^+(-p)}, \tag{15}$$

причем все интегрирования производятся по пространству E_4, а функциональные производные понимаются в смысле (21) и (22) из ([5]). «Истинные» матричные элементы получаются путем варьирования S' по аргументам ψ, ψ^+, φ с последующим приравниванием этих аргументов нулю (ср. с § 47 из ([6])) и аналитическим продолжением типа $p_4 \to -ip_0$ полученных выражений в физическую область значений 4-компонент внешних импульсов *. Например, для рассмотренной выше массовой диаграммы 2-го порядка имеем:

$$\left.\frac{\delta^2 S_2'}{\delta\psi^+(-p)\,\delta\psi(p)}\right|_{\psi,\,\psi^+,\,\varphi=0} = -\frac{g^2}{16\pi^3}\,\delta(p(-)p')\,\Sigma_2'(-p_\nu^2);$$

$$\Sigma_2'(p_0^2-\mathbf{p}^2) = \text{аналитич. продолж. } \Sigma_2'(-p_\nu^2),$$

где S_2' — члены 2-го порядка в (15). Характерной особенностью получаемых таким образом интегралов является отсутствие расходимостей. Выполнение условия унитарности для первых двух порядков по g очевидно, а для высших приближений требуется специальное исследование.

Автор выражает благодарность Н. Н. Боголюбову, Ю. А. Гольфанду, В. И. Григорьеву, А. А. Логунову, И. Е. Тамму, Н. А. Черникову и Ю. М. Широкову за многочисленные плодотворные дискуссии.

Объединенный институт
ядерных исследований

Поступило
19 VI 1962

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Shyder, Phys. Rev., 71, 38 (1947). [2] В. Л. Авербах, Б. В. Медведев, ДАН, 54, 41 (1949). [3] Ю. А. Гольфанд, ЖЭТФ, 37, 504 (1959). [4] В. Г. Кадышевский, ЖЭТФ, 41, 1885 (1961). [5] В. Г. Кадышевский, ДАН, 147, № 3 (1962). [6] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, Введение в теорию квантованных полей, 1957. [7] C. A. Hurst, Proc. Cambr. Phil. Soc., 18, 625 (1952); W. Thirring, Helv. Phys. Acta, 26, 33 (1953). [8] Ю. А. Гольфанд, ЖЭТФ, 43, 256 (1962). [9] S. Hori, Progr. Theor. Phys., 7, 578 (1952)

* При этом для правильного обхода особенностей, возникающих в физической области, необходимо добавить к массам $-i\varepsilon$. Элементы обычной матрицы рассеяния, очевидно, могут быть получены аналогичным способом. Возможность аналитического продолжения $p_4 \to -ip_0$ в этом случае доказывается в общем виде ([6]).