СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970.
2. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984.
3. *Самарин Ю.П.* Уравнения состояния материалов со сложными реологическими свойствами. Куйбышев: Изд-во Куйбышевс. ун-та, 1979.
4. *Кеннеди А.Дж.* Ползучесть и усталость в металлах. М.: Металлургия, 1965.
5. *Победря Б.Е.* Математическая теория нелинейной вязкоупругости // Упругость и неупругость. Вып. 3. М.: Изд-во МГУ, 1973. 95–173.
6. *Победря Б.Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1995.
7. *Вакулюк В.В., Победря Б.Е.* О нелинейной теории вязкоупругости // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 2005. № 6. 49–55.

Поступила в редакцию
26.04.2006

УДК 531.396

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ТИХОНОВА ДЛЯ АВТОМАТИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ

В. В. Александров, С. С. Лемак, В. Ф. Герреро-Санчес

Рассмотрим управляемую динамическую систему, математическая модель которой имеет следующий безразмерный вид:

$$\mu\frac{dz}{dt} = \varphi(z, y, u_1), \qquad z(t_0) = a \in R^m, \quad u_1(\cdot) \in \mathcal{U}_1, \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = f(z, y, u_2), \qquad y(t_0) = b \in R^n, \quad u_2(\cdot) \in \mathcal{U}_2, \tag{2}$$

$$0 < \mu \equiv \text{const} \ll 1, \qquad t \in [t_0, t_1].$$

Традиционный подход к выбору управлений u_1, u_2 заключается в определении программного управляемого движения с помощью управления $u_2(t)$ при $u_1 \equiv 0$, а затем формирования стабилизирующего управления $u_1 = u_1(y, z, t)$.

В данной статье предлагается другой подход, использующий теорему А. Н. Тихонова [1] для сингулярно возмущенных систем.

1. Вначале сделаем переход к быстрому времени $\tau = \frac{t}{\mu}$ и рассмотрим подсистему (1) при фиксированных $y_1, \ldots, y_n$:

$$\frac{dz}{d\tau} = \varphi(z, y, u_1).$$

Предположим, что стабилизирующее управление выбрано в виде стратегии $u_1 = u_1^0(y) + \Delta u_1$, где $u_1^0(y)$ — основное управление — определено таким образом, что уравнение

$$\varphi(z, y, u_1^0(y)) = 0 \tag{3}$$

имеет единственный (изолированный) корень $z^0 = \varphi^{-1}(y, u_1^0(y))$.

По поводу дополнительного управления Δu_1 будем считать, что имеется полная информация о переменных $z_1, \ldots, z_m$, и, таким образом, возможно формирование отрицательной обратной связи $\Delta u_1 = \Delta u_1(\Delta z)$, где $\Delta z = z - z^0$. Выберем параметры этой обратной связи из условий асимптотической устойчивости решения z^0. Предположим также, что начальные условия $z(t_0) = a \in R^m$ принадлежат области притяжения аттрактора z^0 и выполнены соответствующие условия аналитичности из теоремы А. Н. Тихонова.

В результате имеем корректный переход к вырожденной (упрощенной) математической модели

$$\begin{cases} 0 = \varphi(\tilde{z}, \tilde{y}, u_1^0(\tilde{y}) + \Delta u_1(\widetilde{\Delta z})), \\ \dfrac{d\tilde{y}}{dt} = f(\tilde{z}, \tilde{y}, u_2(t)), \qquad t \in [t_0, \tilde{t}_1], \end{cases} \tag{4}$$

где $\Delta u_1 = 0$. В рамках модели (4) выбираем программное управление $\tilde{u}_2(t)$ (не нарушая условия аналитичности) с целью определения программного движения $\tilde{y}(t)$ с начальными условиями $\tilde{y}(t_0) = b$.

Следовательно, в реальности для модели (1), (2) имеются программное управление $\tilde{u}_2(t)$ и стабилизирующее управление $u_1^0 = u_1^0(y) + \Delta u_1(z - z^0)$, которые построены с помощью теоремы Тихонова.

2. Для формирования дополнительного стабилизирующего управления Δu_1 можно использовать методику оптимальной стабилизации по критерию

$$J = \int_{\tau_0}^{\tau_1} (\Delta z^\top G \Delta z + u_1^2) d\tau \to \min_{\Delta u_1} \tag{5}$$

при $G = G^\top > 0$. Тогда $\Delta u_1^0 = -B^\top \mathcal{L} \Delta z$, где $\mathcal{L}$ — решение дифференциального матричного уравнения Риккати

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\tau} = \mathcal{L} B B^\top \mathcal{L} - (\mathcal{L} A + A^\top \mathcal{L}) - G, \qquad \mathcal{L}(\tau_1) = 0 \tag{6}$$

при $A = \dfrac{\partial \varphi(z^0(y), y, u_1^0(y))}{\partial y}$, $B = \dfrac{\partial \varphi(z^0(y), y, u_1^0(y))}{\partial u_1}$.

В этом случае быстрое время τ приобретает смысл компьютерного времени. При $\mu \to 0$ можно рассмотреть возможность предварительного выбора постоянных коэффициентов обратной связи, когда $\mathcal{L} \to \mathcal{L}_0$, где $\mathcal{L}_0 > 0$ — положительно определенная матрица, являющаяся решением алгебраического матричного уравнения Риккати

$$\mathcal{L}_0 B B^\top \mathcal{L}_0 - (\mathcal{L}_0 A + A^\top \mathcal{L}_0) - G = 0 \tag{7}$$

(при выполнении условия $\det(B, AB, \dots, A^{m-1}B) \neq 0$ при любом значении параметра y).

3. В случае отсутствия полной информации о координатах $z_1, \dots, z_m$, но при наличии полной наблюдаемости по имеющимся измерениям $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_l)^\top$ $(l < m)$:

$$\xi = H \Delta z, \qquad \operatorname{rank} \begin{pmatrix} H \\ HA \\ \dots \\ HA^{m-1} \end{pmatrix} = m \tag{8}$$

возможно расширение математической модели (1),(2) за счет алгоритма оценивания: управление Δu_1 формируется в виде $\Delta u_1 = -B^\top \mathcal{L}_0 \widehat{\Delta z}$, где оценки $\widehat{\Delta z}$ находятся из условия

$$\frac{d\widehat{\Delta z}}{d\tau} = A\widehat{\Delta z} + B\Delta u_1 + K(\xi - H\widehat{\Delta z}), \qquad \widehat{\Delta z}(t_0) = 0. \tag{9}$$

Здесь K — матрица усиления фильтра (оценивателя) размерности $(m \times l)$.

При выполнении условия (8) существуют параметры оценивателя k_{ij}, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, l$, при которых процесс оценивания асимптотически устойчив, что позволяет использовать методику Тихонова для расширенной системы.

Следует отметить, что в этом случае переменная τ также играет роль "компьютерного" времени и упрощенная модель имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{y}}{dt} = f(\tilde{z}, \tilde{y}, u_2(t)), \qquad \tilde{y}(t_0) = b, \\ 0 = \varphi(\tilde{z}, \tilde{y}, u_1^0(\tilde{y}) + \Delta u_1(\widehat{\Delta z})), \\ 0 = A(\tilde{y})\widehat{\Delta z} + B(\tilde{y})\Delta u_1 + K(\xi - H\widehat{\Delta z}), \\ \Delta u_1 = -B^\top \mathcal{L}_0 \widehat{\Delta z}, \\ \xi = H(\tilde{z} - z^0). \end{cases}$$

Так как для линейной системы (9) нуль является единственной особой точкой, то принадлежность начальных условий $\widehat{\Delta z}(t_0) = 0$ области притяжения аттрактора $(z = z^0,\ \Delta z = 0)$ очевидна.

4. Поясним данный подход на примере решения задачи автоматической стабилизации планирования летательного аппарата (ЛА), имеющего плоскость симметрии.

Рассмотрим уравнения полета ЛА в вертикальной плоскости [2]:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= -Mg\sin\theta - \frac{1}{2}\varrho V^2 c_x^0, \\ MV\dot{\theta} &= -Mg\cos\theta + \frac{1}{2}\varrho V^2 c_y^\alpha \alpha, \\ \dot{\varphi} &= \Omega, \\ I_z\dot{\Omega} &= -\frac{1}{2}\varrho V^2 Sb(m_z^\alpha \alpha + m_z^\delta \delta), \end{aligned} \tag{10}$$

где V — скорость ЛА; Ω — угловая скорость поворота корпуса ЛА $(\frac{d}{dT} = \dot{\ })$; φ — угол тангажа, θ — траекторный угол; $\alpha = \varphi - \theta$ — угол атаки; δ — угол отклонения руля высоты.

Параметры ЛА — M (масса), J_z (момент инерции корпуса), S (площадь поперечного сечения), c_x^0, c_y^α, m_z^α, m_z^δ (аэродинамические коэффициенты), b (хорда крыла) — таковы, что выполняются следующие равенства:

$$\frac{1}{2}\varrho V_*^2 S = Mg, \qquad I_z\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}\varrho V_*^2 Sbm_z^\alpha \varphi = 0,$$

которые имеют четкий физический смысл [3] для характерной скорости планирования V_*.

Воспользуемся линейным невырожденным преобразованием для обезразмеривания и нормализации модели (10):

$$T = tT_*, \quad V = V_*v, \quad \Omega = \Omega_*\omega, \quad \text{где} \quad V_* = 300 \text{ м/с}, \quad T_* = \frac{V_*}{g} \approx 30 \text{ с},$$

$$\Omega_* = \frac{1}{T_1}, \quad T_1^2 = \frac{2I_z}{\varrho V_*^2 Sb} \approx 1, \quad T_1 \ll T_*, \quad \mu = \frac{T_1}{T_*} \ll 1.$$

Тогда система уравнений (1), (2) примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = -\sin\theta - c_x^0 v^2, & v(t_0) = b_1 \quad (b_1 \approx 1), \\ \dfrac{d\theta}{dt} = -\dfrac{\cos\theta}{v} + c_y^\alpha \alpha v, & \theta(t_0) = b_2 \quad (b_1 \approx 0), \\ \mu\dfrac{d\omega}{dt} = -(m_z^\alpha\alpha + m_z^\delta\delta)v^2, & \omega(t_0) = a_1, \\ \mu\dfrac{d\varphi}{dt} = \omega, & \varphi(t_0) = a_2, \end{cases} \tag{11}$$

где $\mu \ll 1$, $u_2 \equiv 0$, $u_1 = \delta$.

В соответствии с предлагаемым подходом

$$z^0 = (\omega^0 \equiv 0, \quad \varphi \equiv \varphi_*), \quad \delta = \delta_0 + \Delta\delta, \quad \delta_0 = \frac{m_z^\alpha}{m_z^\delta}(\theta - \varphi_*),$$

где φ_* — решение уравнения (3).

Самый простой алгоритм синтеза $\Delta\delta = k\omega$ (при $k > 0$) позволяет утверждать, что решение z^0 асимптотически устойчиво и любые начальные условия a_1, a_2 принадлежат области притяжения этого аттрактора. Упрощенная модель $(\mu = 0)$ имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{v}}{dt} = -\sin\tilde{\theta} - c_x^0\tilde{v}^2, & \tilde{v}(t_0) = v_0, \\ \dfrac{d\tilde{\theta}}{dt} = -\dfrac{\cos\tilde{\theta}}{\tilde{v}} + c_y^\alpha(\tilde{\varphi} - \tilde{\theta})\tilde{v}, & \tilde{\theta}(t_0) = \theta_0, \\ \tilde{\omega} = 0, \qquad \tilde{\varphi} = \varphi_* = \text{const}. \end{cases} \tag{12}$$

Чтобы реализовать режим планирования $\tilde{\theta} \equiv \theta_* < 0$ и $\tilde{v} \equiv v(t_0) = v_0$, решим балансировочные уравнения, вытекающие из (12):

$$\theta_* = -\arcsin(v_0^2 c_x^0) < 0,$$

$$\varphi_* = \theta_* + \frac{\cos\theta_*}{c_y^\alpha v_0^2} = -\arcsin(v_0^2 c_x^0) + \frac{\sqrt{1-(v_0^2 c_x^0)^2}}{c_y^\alpha v_0^2}.$$

Для анализа асимптотической устойчивости режима планирования в соответствии с теоремой Ляпунова об устойчивости по первому приближению выпишем соответствующие неравенства Гурвица:

$$\left(2c_x^0 v_0 - \frac{\sin\theta_*}{v_0} + c_y^\alpha v_0\right) > 0, \quad \cos\theta_*\left(\frac{\cos\theta_*}{v_0^2} + c_y^\alpha \alpha_*\right) > 0,$$

из которых видно, что планирование в рамках упрощенной модели асимптотически устойчиво.

Полученный алгоритм автоматической стабилизации

$$\delta = \delta_0 + \Delta\delta, \text{ где } \delta_0 = \frac{m_z^\alpha}{m_z^\delta}\left(\theta + \arcsin(v_0^2 c_x^0) - \frac{\sqrt{1-(v_0^2 c_x^0)^2}}{c_y^\alpha v_0^2}\right), \quad \Delta\delta = k\omega, \tag{13}$$

подставим в исходную модель (11) и убедимся в нормальном функционировании этой модели с простейшим алгоритмом стабилизирующего управления при $\theta = \theta_*$ в (13); $c_x^0 = 0{,}3$; $c_y^\alpha = 8$; $m_z^\alpha = 1{,}85$; $m_z^\delta = 1{,}6$; $k = 2$. На рис. 1, *а* и *б* представлено поведение соответственно траекторного угла θ и угла тангажа φ в зависимости от безразмерного времени. Следует отметить, что простота алгоритма заключается в минимальном использовании измерительных устройств. В данном случае необходим только датчик угловой скорости ЛА.

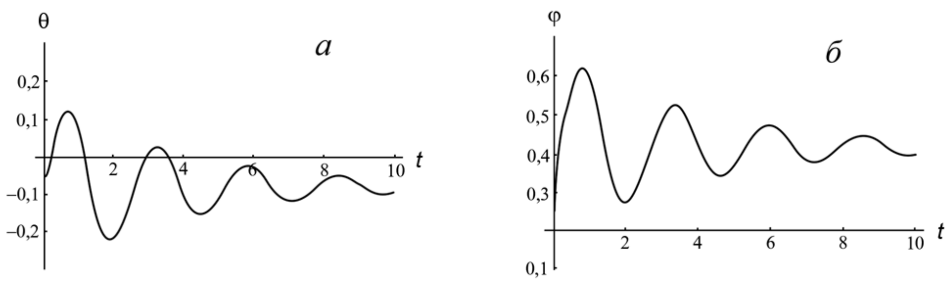

Рис. 1. Процесс стабилизации режима планирования при управлении $\Delta\delta = \delta_0 + 2 * \omega$

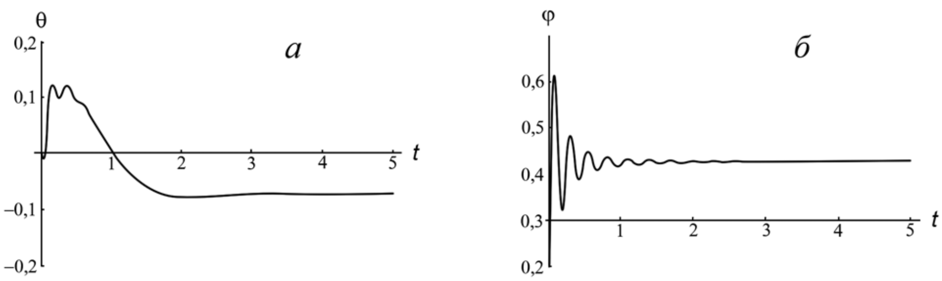

Рис. 2. Процесс планирования ЛА при субоптимальном законе стабилизации

В случае субоптимального алгоритма автоматической стабилизации и наличия измерений $v(t)$, $\theta(t)$, $\varphi(t)$, $\omega(t)$ коэффициенты обратной связи для быстрых переменных $\Delta\delta = k_1(\varphi - \varphi_0) + k_2\omega$ находятся из решения задачи (5)–(7) при $G = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ и при тех же характеристиках ЛА имеют вид $\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\end{pmatrix} = m_z^\delta v^2 \begin{pmatrix}0{,}2328\\ 0{,}7566\end{pmatrix}$. Субоптимальный алгоритм дает лучший вариант стабилизации планирования (см. рис. 2, *а* и *б*, где показано соответствующее поведение траекторного угла θ и тангажа ЛА). Здесь следует отметить, что полностью реализуется методика А. Н. Тихонова, так как δ_0 зависит от $\theta(t)$ и $\Delta\delta$ зависит от $v(t)$. В связи с этим управление усложняется — необходимо добавить измерения траекторного угла и скорости.

Таким образом, новый подход, заключающийся в применении теоремы А. Н. Тихонова, позволяет формировать программное движение и алгоритм автоматической стабилизации этого движения, используя упрощенную модель и "быструю" подсистему. Другие подходы к управлению сингулярно возмущенной системой изложены в работе [4].

Работа поддержана РФФИ (гранты № 04–01–00379 и 05–08–50148).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Матем. сб. 1952. **31(73)**, № 3. 575–586.
2. *Александров В.В., Воронин Л.И, Глазков Ю.Н.* и др. Математические задачи динамической имитации аэрокосмических полетов. М.: Изд-во МГУ, 1995.
3. *Новожилов И.В.* Фракционный анализ. М.: Изд-во МГУ, 1991.
4. *Kokotovic F., O'Reily J., Khalil H.* Singular Perturbation Methods in Control. Analysis and Design, SIAM, 1999.

Поступила в редакцию
28.04.2006