И. С. Борисов, Новый подход к проблеме аппроксимации распределений сумм независимых случайных величин в линейных пространствах,
Тр. Ин-та математики, 1985, том 5, 3–27

НОВЫЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ АППРОКСИМАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН В ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

И. С. БОРИСОВ

В работе описан достаточно общий метод исследования точности аппроксимации распределений сумм независимых случайных величин (с. в.) со значениями в произвольном псевдонормированном линейном пространстве. Речь идет о точности гауссовской аппроксимации, хотя метод позволяет изучать скорость сходимости и в случаях, когда предельным для указанных распределений будет другой безгранично делимый закон (например, пуассоновский).

Предлагаемый метод основан на представлении сумм независимых с. в. в виде стохастических интегралов по соответствующим эмпирическим мерам. Аналогичное представление имеет место и для предельной с. в., что позволяет сводить рассматриваемую задачу к соответствующим предельным теоремам для вещественнозначных эмпирических полей.

Символами C, C_i, $i=0, 1, \ldots$, в работе обозначаются абсолютные, т. е. не зависящие от параметров рассматриваемой задачи, положительные постоянные. В целях более компактной записи индексы использованы только при необходимости подчеркнуть различие постоянных. Если последние зависят от тех или иных параметров задачи, то используются либо другие буквы, либо запись вида $C(\cdot)$.

1. Суммирование независимых случайных величин в банаховых пространствах

Пусть $\{\xi_i;\ i\geqslant 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных с. в., принимающих значения в сепарабельном банаховом пространстве $(\mathfrak{X}, \mathscr{B})$, где $\mathscr{B}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств $\mathfrak{X}$. Всюду в дальнейшем предполагается, что $\mathbf{E}\xi_1=0$, где среднее понимается в смысле Бохнера. Рассмотрим последовательность так называемых эмпирических мер на $\mathscr{B}$

$$Q_n(A)=n^{1/2}(P_n(A)-P(A)),\quad n=1, 2, \ldots, \tag{1.1}$$

где $P_n(\cdot)$ — эмпирическое распределение, построенное по выборке $\{\xi_i;\ i\leqslant n\}$; $P(\cdot)$ — распределение с. в. ξ_1. Ясно, что для всех элементарных исходов $Q_n(\cdot)$ — счетно-аддитивный заряд на $\mathscr{B}$ с ограниченной вариацией.

В основе предлагаемого метода лежит следующее простое соотношение

$$s_n\equiv n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}\xi_i=\int_{\mathfrak{X}} xQ_n(dx), \tag{1.2}$$

где интеграл в правой части (1.2) понимается в смысле Бохнера (точнее, в виде разности двух интегралов Бохнера) при всех элементарных исходах.

Хорошо известно, что конечномерные распределения случайного поля $Q_n(\cdot)$ слабо сходятся к соответствующим конечномерным распределениям гауссовского поля $G_P(\cdot)$ с нулевым средним и ковариацией

$$\mathbf{E}G_P(A)G_P(B)=P(A\cap B)-P(A)P(B). \tag{1.3}$$

Более того, имеет место слабая сходимость для достаточно широкого класса функционалов от рассматриваемых случайных полей ([1], [2]).

Лемма 1.1. *Случайное поле $G_P(\cdot)$ с вероятностью 1 является счетно-аддитивным зарядом на $\mathscr{B}$.*

Доказательство. Обозначим через $W_P(A)$, $A \in \mathscr{B}$, гауссовское поле с нулевым средним и ковариацией

$$\mathbf{E}W_P(A)W_P(B) = P(A \cap B). \tag{1.4}$$

Из (1.4) следует: если $A \cap B = \varnothing$, то с. в. $W_P(A)$ и $W_P(B)$ независимы. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что

$$G_P(A) = W_P(A) - P(A)W_P(\mathfrak{X}), \tag{1.5}$$

поскольку средние и ковариации обеих частей (1.5) совпадают. Представление (1.5) и классические результаты о сходимости рядов независимых с. в. позволяют утверждать, что для любой последовательности попарно несовместных подмножеств $\{A_i\}$ из $\mathscr{B}$ ряд $\Sigma G_P(A_i)$ сходится с вероятностью 1 и в среднеквадратичном. Тогда для таких $\{A_i\}$

$$\mathbf{E}\Big(G_P\left(\bigcup A_i\right) - \sum G_P(A_i)\Big)^2 = P\left(\bigcup A_i\right)\left(1 - P\left(\bigcup A_i\right)\right) - 2\sum P(A_i)\left(1 - P\left(\bigcup A_i\right)\right) +$$
$$+ \sum P(A_i)(1 - P(A_i)) - \sum_{i \neq j}\sum P(A_i)P(A_j) = 0.$$

Лемма доказана.

Этот результат дает основания рассчитывать на то, что при условии слабой сходимости s_n к гауссовской с. в. γ последнюю можно представить в виде

$$\gamma = \int_{\mathfrak{X}} x G_P(dx). \tag{1.6}$$

К сожалению, интеграл в (1.6) уже не удается определить для почти всех элементарных исходов, так как заряд $G_P(\cdot)$, как правило, имеет с вероятностью 1 неограниченную полную вариацию. Это можно проиллюстрировать на следующем примере. Пусть $\mathfrak{X} = R$ и P — равномерное распределение на $[0, 1]$. В этом случае $G_P((a, b)) = w^0(b) - w^0(a)$, где $w^0(t)$ — так называемый «броуновский мост» на отрезке $[0, 1]$. Очевидно, $w^0(t)$ имеет с вероятностью 1 неограниченное изменение на $[0, 1]$.

Однако интеграл в (1.6) можно понимать в более слабом смысле. Соответствующую конструкцию, которая будет рассмотрена в следующем пункте, можно условно назвать стохастическим интегралом Бохнера.

2. Построение стохастического интеграла

Построение стохастического интеграла (1.6) будет проведено для пространств $\mathfrak{X}$ типа 2. Данное ограничение может быть существенно ослаблено. Однако при этом неизбежно возникнут технические трудности, которые лишь «утяжелят» рассматриваемую конструкцию. Напомним, что банахово пространство $\mathfrak{X}$ называется пространством типа 2, если для любого конечного набора независимых с. в. $\{\zeta_i;\ i \leqslant \mathrm{n}\}$ с нулевым средним имеет место неравенство

$$\mathbf{E}\left\|\sum_{i=1}^{n} \zeta_i\right\|^2 \leqslant C(\mathfrak{X}) \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\|\zeta_i\|^2. \tag{2.1}$$

В дальнейшем будем рассматривать формально более общий, чем (1.6), стохастический интеграл. Пусть $(\mathfrak{X}, \mathscr{B})$ — произвольное измеримое пространство, P — распределение на $\mathscr{B}$. Пусть Y — сепарабельное банахово пространство типа 2 с нормой $\|\cdot\|$. Обозначим через $L_Y^2 \equiv L_Y^2(\mathfrak{X}, \mathscr{B}, P)$ класс борелевских отображений $\varphi : \mathfrak{X} \to Y$, для которых $\mathbf{E}\|\varphi(\xi_1)\|^2 < \infty$. Нетрудно убедиться в том, что L_Y^2 — сепарабельное банахово пространство с нормой

$$\|\varphi\|_2 = \mathbf{E}^{1/2}\|\varphi(\xi_1)\|^2.$$

Отображение $\varphi_m \in L_Y^2$ назовем простым или дискретным приближением $\varphi \in L_Y^2$, если

$$\varphi_m(x) = \sum_{k=1}^{m} \varphi(x_{mk}) I_{B_{mk}}(x), \tag{2.2}$$

где попарно несовместные измеримые множества $\{B_{mk},\ k \leqslant m\}$ образуют разбиение пространства $\mathfrak{X}$ и $P(B_{mk}) > 0$, $k \leqslant m$; $x_{mk} \in \mathfrak{X}$; $I_A(\cdot)$ — индикатор множества $A \in \mathscr{B}$. В силу теоремы Бохнера (см. [3]) для любого $\varphi \in L_Y^2$ существует последовательность дискретных приближений $\{\varphi_m\}$, сходящихся к φ в L_Y^2 и P почти всюду. Назовем ковариацией с. в. ζ функционал

$$\mathrm{Cov}_\zeta(l_1, l_2) = \mathbf{E} l_1(\zeta) l_2(\zeta) - \mathbf{E} l_1(\zeta) \mathbf{E} l_2(\zeta),$$

где $l_1, l_2 \in Y^*$ (пространство непрерывных линейных функционалов на Y). Очевидно, для существования ковариации достаточно потребовать наличия второго момента с. в. $\|\zeta\|$.

Для любого простого отображения φ_m положим

$$\gamma(\varphi_m) \equiv \int_{\mathfrak{X}} \varphi_m(x) G_P(dx) = \sum_{k=1}^{m} \varphi(x_{mk}) G_P(B_{mk}). \tag{2.3}$$

Напомним, что Y-значная с. в. γ называется гауссовской, если для любого $l \in Y^*$ вещественнозначная с. в. $l(\gamma)$ имеет гауссовское распределение. Очевидно, $\gamma(\varphi_m)$ — гауссовская с. в. в Y с нулевым средним и ковариацией

$$\mathrm{Cov}_{\gamma(\varphi_m)}(l_1, l_2) = \mathbf{E} l_1(\varphi_m(\xi_1))\, l_2(\varphi_m(\xi_1)) - \mathbf{E} l_1(\varphi_m(\xi_1))\, \mathbf{E} l_2(\varphi_m(\xi_1)). \tag{2.4}$$

Лемма 2.1. *Пусть $\{\varphi_m\}$ — последовательность простых отображений, сходящихся в L_Y^2 к φ. Тогда последовательность с. в. $\{\gamma(\varphi_m)\}$ сходится в среднеквадратичном к некоторой с. в. $\gamma(\varphi)$.*

Доказательство. Покажем, что последовательность $\{\gamma(\varphi_m)\}$ стабилизируется в среднеквадратичном. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что при любых натуральных m и l отображения φ_m и φ_{m+l} определены в (2.2) для одного и того же разбиения $\{B_{Nk}\}$. Тогда из (2.3) и (1.5) следует

$$\mathbf{E}\|\gamma(\varphi_{m+l}) - \gamma(\varphi_m)\|^2 \leqslant 2\mathbf{E}\left\| \sum_{k=1}^{N} \left(\varphi(x_{Nk}) - \varphi(\tilde{x}_{Nk})\right) W_P(B_{Nk}) \right\|^2 +$$
$$+ 2\left\| \sum_{k=1}^{N} \left(\varphi(x_{Nk}) - \varphi(\tilde{x}_{Nk})\right) P(B_{Nk}) \right\|^2 \leqslant 4\|\varphi_{m+l} - \varphi_m\|_2^2. \tag{2.5}$$

Так как пространство Y-значных с. в. с конечным вторым моментом нормы является полным в среднеквадратичном (см. [4]), то полученное неравенство обеспечивает существование упомянутого предела. Лемма доказана.

Легко видеть, что с. в. $\gamma(\varphi)$ корректно определена (т. е. не зависит от аппроксимирующей последовательности $\{\varphi_m\}$). Величину $\gamma(\varphi)$ назовем стохастическим интегралом φ по случайной мере G_P:

$$\gamma(\varphi) = \int_{\mathfrak{X}} \varphi(x) G_P(dx). \tag{2.6}$$

Отметим некоторые свойства интеграла (2.6), вытекающие непосредственно из определения и леммы 2.1: а) $\gamma(\varphi)$ — непрерывный (в среднеквадратичном) случайный линейный оператор на L_Y^2; б) для любых $l \in Y^*$ и $\varphi \in L_Y^2$

$$l(\gamma(\varphi)) = \gamma(l(\varphi)) \tag{2.7}$$

с вероятностью 1. Причем правая часть (2.7) корректно определена, так как суперпозиция $l(\varphi)$ переводит $\mathfrak{X}$ в R, которое, очевидно, удовлетворяет (2.1). Кроме того, $l(\varphi(\cdot)) \in L_R^2(\mathfrak{X}, \mathscr{B}, P)$; в) для любых l_1, $l_2 \in Y^*$, $\varphi \in L_Y^2$

$$\mathrm{Cov}_{\gamma(\varphi)}(l_1, l_2) = \mathrm{Cov}_{\varphi(\xi_1)}(l_1, l_2). \tag{2.8}$$

Формула (2.8) легко выводится из (2.4). Из (2.7) и (2.8) следует, что $\gamma(\varphi)$ — гауссовская с. в. с нулевым средним и такой же ковариацией, как и у с. в. $\varphi(\xi_1)$.

Таким образом, если $\{\xi_i;\ i \geqslant 1\}$ дополнительно удовлетворяют условию $\mathbf{E}\|\xi_1\|^2 < \infty$ и пространство $\mathfrak{X}$ имеет тип 2, то предельную гауссовскую с. в. γ в схеме суммирования с. в. $\{\xi_i\}$ (в пространствах типа 2 таковая всегда существует) можно представить в виде стохастического интеграла (2.6) с функцией $\varphi(x) \equiv x$.

3. Оценка погрешности гауссовской аппроксимации в банаховых пространствах типа 2

Пусть $\{\xi_i;\ i \geqslant 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных с. в. со значениями в сепарабельном банаховом пространстве $\mathfrak{X}$ типа 2. Пусть $\mathbf{E}\xi_1 = 0$ и $\mathbf{E}\|\xi_1\|^2 < \infty$. Тогда в $\mathfrak{X}$ справедлива центральная предельная теорема (см. [5]), т. е. существует такая гауссовская с. в. γ в $\mathfrak{X}$, что нормированная сумма s_n сходится к ней по распределению. На основе результатов предыдущего пункта построим оценку скорости этой сходимости.

Пусть $\{\varphi_m\}$ — последовательность простых отображений, приближающих в $L_{\mathfrak{X}}^2$ отображение $\varphi(x) \equiv x$.

Лемма 3.1. *Случайные поля $Q_n(\cdot)$ и $G_P(\cdot)$ можно так задать на одном вероятностном пространстве, что при любом $t \geqslant 0$*

$$\mathbf{P}\left(\left\|\int_{\mathfrak{X}} \varphi_m(x)\,(Q_n - G_P)(dx)\right\| > d_n(t, \varphi_m)\right) \leqslant C \exp\{-C_0 t\},$$

где

$$\varphi_m(x) = \sum_{k=1}^{m} x_{mk} I_{B_{mk}}(x); \tag{3.1}$$

$$d_n(t, \varphi_m) = n^{-1/2}(t + C\log n) \max_{\varepsilon_k = \pm 1, k<m} \left\|\sum_{k=1}^{m-1} \varepsilon_k (x_{mk+1} - x_{mk})\right\|. \tag{3.2}$$

Доказательство. Введем обозначения $v_n(t) = n^{1/2}(F_n(t) - t)$, $t \in [0, 1]$, $w^0(t) = w(t) - tw(1)$, $t \in [0, 1]$, где $F_n(t)$ — эмпирическая функция распределения, построенная по выборке объема n из равномерного распределения на отрезке $[0, 1]$, $w(t)$ — стандартный винеровский процесс;

$$\Delta_i g = g\left(\sum_{k=1}^{i} p_k\right) - g\left(\sum_{k=1}^{i-1} p_k\right), \quad i = 1, \ldots, m,$$

где g — произвольная функция на R, $\{p_k;\ k = 1, \ldots, m\}$ — произвольное дискретное распределение с конечным числом атомов, $\sum_1^0 = 0$.

Далее, пусть $\{A_i;\ i \leqslant m\}$ — произвольное разбиение пространства $\mathfrak{X}$, $p_k = P(A_k)$. Тогда нетрудно видеть, что для данного распределения $\{p_k\}$

$$(\Delta_1 v_n, \ldots, \Delta_m v_n) \overset{d}{=} (Q_n(A_1), \ldots, Q_n(A_m)); \tag{3.3}$$

$$(\Delta_1 w^0, \ldots, \Delta_m w^0) \overset{d}{=} (G_P(A_1), \ldots, G_P(A_m)). \tag{3.4}$$

Здесь и всюду в дальнейшем символ «$\overset{d}{=}$» обозначает равенство распределений в соответствующих выборочных пространствах.

Теперь зададим случайные процессы $v_n(\cdot)$ и $w^0(\cdot)$ на одном вероятностном пространстве методом [6]. Это позволяет (см. (3.3), (3.4)) построить на одном вероятностном пространстве совокупности с. в. $\{Q_n(A_i);$ $i \leqslant m\}$ и $\{G_P(A_i);\ i \leqslant m\}$. Доопределить значения случайных полей $Q_n(A)$ и $G_P(A)$ для других борелевских множеств A можно, например, так же, как в [2].

Таким образом, для любого φ_m

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{X}} \varphi_m(x)\, Q_n(dx) &\overset{d}{=} \sum_{k=1}^{m} x_{mk}\Delta_k v_n = -\sum_{k=1}^{m-1} v_n\left(\sum_{i=1}^{k} p_i\right)(x_{mk+1}-x_{mk}), \\ \int_{\mathfrak{X}} \varphi_m(x)\, G_P(dx) &\overset{d}{=} \sum_{k=1}^{m} x_{mk}\Delta_k w^0 = -\sum_{k=1}^{m-1} w^0\left(\sum_{i=1}^{k} p_i\right)(x_{mk+1}-x_{mk}). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Следовательно (см. [6]), для любого $t \geqslant 0$

$$\mathbf{P}\left\{\left\|\int_{\mathfrak{X}} \varphi_m(x)\,(Q_n - G_P)(dx)\right\| > n^{-1/2}(t + C\log n)\times \right.$$
$$\left.\times \sup_{\varepsilon_k \in [-1,1],\, k<m}\left\|\sum_{k=1}^{m-1} \varepsilon_k (x_{mk+1}-x_{mk})\right\|\right\} \leqslant C\exp\{-C_0 t\}.$$

Остается только заметить, что функция

$$\varphi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{m-1}) = \left\|\sum_{k=1}^{m-1} \varepsilon_k (x_{mk+1}-x_{mk})\right\|$$

выпукла в R^{m-1}. Это значит, что функция $\psi(\cdot)$, заданная на множестве $[-1,\ 1]^{m-1} \subset R^{m-1}$, достигает максимального значения по меньшей мере в одной из крайних точек $\{(\pm 1, \ldots, \pm 1)\}$. Лемма доказана.

Замечание. Величина $\Delta_n(t,\ \varphi_m)$ существенно зависит не только от вида φ_m, но и от порядка нумерации элементов разбиения $\{B_{mk};\ k \leqslant m\}$ в (3.1). Рассмотрим следующий пример. Пусть $\mathfrak{X} = R$, $x_{mk} = k(2m)^{-1}$, $k = 1, \ldots, 2m$. Тогда, очевидно,

$$\Delta_n(t,\ \varphi_m) = n^{-1/2}(t + C\log n)(2m-1)(2m)^{-1}. \tag{3.6}$$

С другой стороны, если $x_{m2k-1} = k(2m)^{-1}$, а $x_{m2k} = (2m-k+1)(2m)^{-1}$, $k = 1, \ldots, m$, то, как нетрудно видеть, $\Delta_n(t,\ \varphi_m) = n^{-1/2}(t + C\log n)\times$ $\times(2m-1)2^{-1}$. Поэтому в дальнейшем будем различать два простых отображения $\varphi_m^{(1)}$ и $\varphi_m^{(2)}$, у которых «вектор» $\left(x_{m1}^{(1)}, \ldots, x_{mm}^{(2)}\right)$ в (3.1) для $\varphi_m^{(1)}$ есть нетождественная перестановка элементов $\left(x_{m1}^{(2)}, \ldots, x_{mm}^{(2)}\right)$, соответствующих $\varphi_m^{(2)}$.

Лемма 3.2. *Для любого простого* φ_m *и* $t \geqslant 0$

$$\mathbf{P}\left(\left\|\int_{\mathfrak{X}} (\varphi_m(x) - x)\, G_P(dx)\right\| > t\right) \leqslant CC^{-1}(\mathfrak{X})\,\sigma^{-2}\exp\{-C_1 C^{-1}(\mathfrak{X})\,\sigma^{-2} t^2\},$$

где $\sigma^2 = \mathbf{E}\|\varphi_m(\xi_1) - \xi_1\|^2$.

Доказательство. Пусть γ — произвольная гауссовская с. в. в $\mathfrak{X}$. Пусть $s \in R$ таково, что $q = \mathbf{P}(\|\gamma\| \leqslant s) > 1/2$. В [5] показано: если $\alpha > 0$ удовлетворяет соотношению

$$\log(q/(1-q)) - 4(2^{1/2}+1)^2 s^2 \alpha > C_0, \tag{3.7}$$

то

$$\mathbf{E}e^{\alpha\|\gamma\|^2} \leqslant \alpha\left(e^{\alpha s^2} + C(C_0)\right). \tag{3.8}$$

Пусть теперь

$$\gamma = \int_{\mathfrak{X}} (\varphi_m(x) - x)\, G_P(dx).$$

Заметим, что для любой центрированной гауссовской с. в. γ в пространствах типа 2 справедливо неравенство $\mathbf{E}\|\gamma\|^2 \leqslant C(\mathfrak{X})\mathbf{E}\|\xi\|^2$, где ξ — любая с. в. с нулевым средним и той же ковариацией, что и у с. в. γ. Для этого достаточно ограничиться случаем $\mathbf{E}\|\xi_1\|^2 < \infty$ и перейти к пределу по n в неравенстве $\mathbf{E}\|s_n\|^2 \leqslant C(\mathfrak{X})\mathbf{E}\|\xi_1\|^2$. Следовательно, $1-q \leqslant s^{-2}\mathbf{E}\|\gamma\|^2 \leqslant C(\mathfrak{X})s^{-2}\sigma^2$, откуда получаем

$$\log\frac{q}{1-q} \geqslant \log\frac{s^2 - C(\mathfrak{X})\sigma^2}{C(\mathfrak{X})\sigma^2}.$$

Положим

$$s = (3C(\mathfrak{X}))^{1/2}\sigma, \qquad \alpha = [24(2^{1/2}+1)^2 C(\mathfrak{X})\sigma^2]^{-1}\log 2. \tag{3.9}$$

Тогда легко видеть, что для выбранных s и α соотношение (3.7) имеет место при $C_0 = 2^{-1}\log 2$.

Таким образом, из (3.8) и (3.9) следует

$$\mathbf{P}(\|\gamma\| > t) \leqslant \mathbf{E}\exp\{\alpha\|\gamma\|^2 - \alpha t^2\} \leqslant C(C(\mathfrak{X})\sigma^2)^{-1}\exp\{-C_1(C(\mathfrak{X})\sigma^2)^{-1}t^2\}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Для любых* φ_m, $t \geqslant 0$, $\Delta \geqslant 0$

$$\mathbf{P}\left(\left\|\int_{\mathfrak{X}}(\varphi_m(x) - x)\,Q_n(dx)\right\| > t + 2C(\mathfrak{X})^{-1}\sigma + g_n(\Delta, \sigma)\right) \leqslant$$

$$\leqslant n\mathbf{P}(\|\xi_1 - \varphi_m(\xi_1) - \mathbf{E}(\xi_1 - \varphi_m(\xi_1))\| > n^{1/2}\Delta) + \exp\{-t^2(32\sigma^2 + 4t\Delta)^{-1}\} \tag{3.10}$$

где величина σ *определена в лемме* 3.2,

$$g_n(\Delta, \sigma) = n^{1/2}\int_{A(n,m,\Delta)}\|x - \varphi_m(x) - \mathbf{E}(\xi_1 - \varphi_m(\xi_1))\|\,P(dx),$$

$$A(n, m, \Delta) = \{x \in \mathfrak{X} : \|x - \varphi_m(x) - \mathbf{E}(\xi_1 - \varphi_m(\xi_1))\| > n^{1/2}\Delta\}.$$

Доказательство. Обозначим $\eta_k = \xi_k - \varphi_m(\xi_k) - \mathbf{E}(\xi_k - \varphi_m(\xi_k))$. Легко видеть, что

$$\tilde{s}_n \equiv n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}\eta_k = \int_{\mathfrak{X}}(x - \varphi_m(x))\,Q_n(dx),$$

причем

$$\mathbf{E}\|\tilde{s}_n\|^2 \leqslant C(\mathfrak{X})\mathbf{E}\|\eta_1\|^2 \leqslant 4C(\mathfrak{X})\sigma^2. \tag{3.11}$$

Обозначим

$$\tilde{s}_n^{(\Delta)} = n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}\eta_k I_{\{x:\|x\|<n^{1/2}\Delta\}}(\eta_k).$$

Отметим, что в силу (3.11)

$$\mathbf{E}\|\tilde{s}_n^{(\Delta)}\| \leqslant 2C(\mathfrak{X})^{1/2}\sigma + g_n(\Delta, \sigma). \tag{3.12}$$

Таким образом, из (3.12) получаем

$$\mathbf{P}(\|\tilde{s}_n\| > t + 2C(\mathfrak{X})^{1/2}\sigma + g_n(\Delta, \sigma)) \leqslant n\mathbf{P}(\|\eta_1\| > \Delta n^{1/2}) + \\ + \mathbf{P}(\|\tilde{s}_n^{(\Delta)}\| > t + \mathbf{E}\|\tilde{s}_n^{(\Delta)}\|). \tag{3.13}$$

Остается только воспользоваться экспоненциальным неравенством В. В. Юринского (см. [7]) и элементарной оценкой $\mathbf{E}\|\eta_1\|^2 \leqslant 4\sigma^2$. Лемма доказана.

Леммы 3.1—3.3 позволяют построить оценку скорости сходимости в центральной предельной теореме в банаховых пространствах типа 2. Положим в лемме 3.1 $t = C\log n$, а в леммах 3.2, 3.3 — $t = C(\mathfrak{X})^{1/2}\sigma\psi(\sigma)$, где положительная функция ψ удовлетворяет условиям

$$\lim_{\sigma\to+0}\sigma\psi(\sigma) = 0; \qquad \psi(z) \geqslant C|\log z|^{1/2}, \ z > 0. \tag{3.14}$$

Кроме того, пусть $\sigma = \sigma(n) \to 0$, когда $n \to \infty$. Выберем $\Delta = \Delta(n) \to 0$ так, чтобы

$$\sigma\psi(\sigma)\Delta^{-1} \geqslant C|\log \sigma|, \tag{3.15}$$

Тогда из лемм 3.1—3.3 немедленно следует

Теорема 3.1. *Пусть* $\{\xi_i;\ i \geqslant 1\}$ — *независимые одинаково распределенные* $\mathfrak{X}$-*значные с. в. с нулевым средним и конечным вторым моментом нормы. Тогда с. в.* $\{\xi_i;\ i \leqslant n\}$ *при любом n можно так задать на одном вероятностном пространстве с предельной гауссовской с. в.* γ, *что*

$$\mathbf{P}(\|s_n - \gamma\| \geqslant \alpha) \leqslant \alpha,$$

где

$$\alpha = C\{C(\mathfrak{X})^{1/2}\psi(\sigma)\sigma + g_n(\Delta,\ \sigma) + n\mathbf{P}(\|\xi_1 - \varphi_m(\xi_1) - \mathbf{E}(\xi_1 - \varphi_m(\xi_1))\| > n^{1/2}\Delta) + \\ + \min d_n(C\log n,\ \varphi_m)\}, \tag{3.16}$$

$\sigma^2 = \mathbf{E}\|\varphi_m(\xi_1) - \xi_1\|^2$, Δ *и* $\psi(\cdot)$ *удовлетворяют* (3.14) *и* (3.15); *нижняя грань в* (3.16) *берется по всем перестановкам атомов* $\{x_{mk};\ k \leqslant m\}$ *дискретного приближения* $\varphi_m(\xi_1)$ с. в. ξ_1 (см. замечание к лемме 3.1).

Замечание 1. Если для второго и третьего слагаемых в (3.16) можно построить удовлетворительные верхние оценки, зависящие только от σ, Δ и n, то в формулировке теоремы 3.1 $\Delta = \Delta(n)$, $\sigma = \sigma(n)$ — произвольные положительные последовательности, удовлетворяющие (3.14) и (3.15), а нижняя грань в последнем слагаемом (3.16) берется по всем простым отображениям φ_m, для которых $\mathbf{E}\|\varphi_m(\xi_1) - \xi_1\|^2 \leqslant \sigma^2$ (с учетом замечания к лемме 3.1). Например, легко получить оценки

$$n\mathbf{P}(\|\varphi_m(\xi_1) - \xi_1 - \mathbf{E}(\varphi_m(\xi_1) - \xi_1)\| > n^{1/2}\Delta) \leqslant \sigma^2\Delta^{-2}, \tag{3.17}$$

$$g_n(\Delta,\ \sigma) \leqslant \sigma^2\Delta^{-1}. \tag{3.18}$$

Положим $\Delta = \sigma\psi_1^{1/2}(\sigma)$, где ψ_1 удовлетворяет условиям

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\sigma\to+0} \sigma\psi_1(\sigma) = 0;\\ &\psi_1(z) \geqslant C|\log z|^2,\ z > 0, \end{aligned}\right. \tag{3.19}$$

Если $\psi = \psi_1$, то условия (3.14) и (3.15) будут выполнены.

Таким образом, для α в теореме 3.1 справедлива оценка (см. (3.17), (3.18))

$$\alpha \leqslant C\left\{C(\mathfrak{X})^{1/2}\psi_1(\sigma)\sigma + \psi_1^{-1}(\sigma) + \inf_{\varphi_m : \mathbf{E}\|\varphi_m(\xi_1) - \xi_1\|^2 \leqslant \sigma^2} d_n(C\log\ n,\ \varphi_m)\right\},$$

где ψ_1 удовлетворяет (3.19), $\sigma = \sigma(n)$ — произвольная неотрицательная последовательность, сходящаяся к нулю. Отметим также, что всегда существует такая последовательность $\sigma(n) \downarrow 0$, что

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{\varphi_m : \mathbf{E}\|\varphi_m(\xi_1) - \xi_1\|^2 \leqslant \sigma^2(n)} d_n(C\log n,\ \varphi_m) = 0.$$

Замечание 2. Оценка (3.16) существенно зависит от числа атомов распределения с. в. $\varphi_m(\xi_1)$, приближающей в среднеквадратичном с. в. ξ_1. Иными словами, в оценке (3.16) существенную роль играют определенные энтропийные характеристики пространства $\mathfrak{X}$. Влияние последних на точность гауссовской аппроксимации сумм независимых с. в. будет наглядно продемонстрировано на примере суммирования вещественнозначных случайных полей с произвольным параметрическим множеством.

4. Принцип инвариантности в банаховых пространствах типа 2

Под принципом инвариантности обычно понимают факт сходимости по распределению (в соответствующем выборочном пространстве) траекторий, порожденных последовательностью нормированных частичных сумм независимых с. в. Пусть с. в. $\{\xi_i\}$ удовлетворяют условиям предыдущего пункта. Рассмотрим на отрезке [0, 1] случайный процесс

$$S_n(t) = n^{-1/2} \sum_{i \leqslant nt} \xi_i, \tag{4.1}$$

который будем интерпретировать как с. в. со значениями в банаховом пространстве $B_{\mathfrak{X}}[0, 1]$, т. е. в пространстве $\mathfrak{X}$-значных ограниченных функций на отрезке [0, 1] с равномерной нормой

$$\|\varphi\|_B = \sup_{t \in [0,1]} \|\varphi(t)\|.$$

Задание распределения $S_n(\cdot)$ на σ-алгебре борелевских подмножеств $B_{\mathfrak{X}}[0, 1]$ не составляет труда, так как оно имеет сепарабельный носитель.

Оценим близость распределений $S_n(\cdot)$, $n = 1, 2, \ldots$, в $B_{\mathfrak{X}}[0, 1]$ к распределению винеровского процесса $W(\cdot)$ (поскольку процесс $W(t)$ непрерывен (см. [8]), его распределение в $B_{\mathfrak{X}}[0, 1]$ имеет сепарабельный носитель), т. е. однородного процесса с независимыми приращениями, для которого с. в. $W(t)$ имеет гауссовское распределение с нулевым средним и

$$\mathrm{Cov}_{W(t)}(l_1, l_2) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Cov}_{S_n(t)}(l_1, l_2).$$

В основе указанного оценивания также лежат представления случайных процессов $S_n(\cdot)$ и $W(\cdot)$ в виде стохастических интегралов, аналогичных (1.2) и (1.6). Обозначим

$$Q_n^{(t)}(A) = (n^{-1}[nt])^{1/2} Q_{[nt]}(A), \quad t \geqslant 0, \tag{4.2}$$

где $[\cdot]$ — целая часть числа; заряд $Q_n(\cdot)$ определен в (1.1). В известном смысле предельным для $Q_n^{(t)}(\cdot)$ будет гауссовский случайный заряд $G_P^{(t)}(\cdot)$ с нулевым средним и ковариацией

$$\mathbf{E} G_P^{(t_1)}(A)\, G_P^{(t_2)}(B) = \min(t_1, t_2)\,[P(A \cap B) - P(A)\,P(B)]. \tag{4.3}$$

Из (4.2) и (4.3) следует, что $Q_n^{(t)}(\cdot)$ и $G_P^{(t)}(\cdot)$ как процессы по t (при фиксированных n и A) имеют независимые приращения, а при фиксированных n и t они — счетно-аддитивные заряды на $\mathscr{B}$ (см. лемму 1.1). Справедливо следующее очевидное обобщение соотношений (1.2) и (1.6).

Лемма 4.1. *Если* $\mathbf{E}\xi_1 = 0$ *и* $\mathbf{E}\|\xi_1\|^2 < \infty$, *то в* $B_{\mathfrak{X}}[0, 1]$ *имеют место равенства*

$$S_n(\cdot) \overset{d}{=} \int_{\mathfrak{X}} x Q_n^{(\cdot)}(dx);$$

$$W(\cdot) \overset{d}{=} \int_{\mathfrak{X}} x G_P^{(\cdot)}(dx).$$

Стохастический интеграл в последнем равенстве определен так же, как в (2.6).

Все дальнейшие рассуждения незначительно отличаются от предыдущих.

Лемма 4.2. *Случайные поля* $\{Q_n^{(t)}(\cdot);\ t \in [0, 1]\}$ *и* $\{G_P^{(t)}(\cdot);\ t \in [0, 1]\}$ *можно так задать на одном вероятностном пространстве, что для любого* $t \geqslant 0$

$$\mathbf{P}\left(\left\| \int_{\mathfrak{X}} \varphi_m(x) \left(Q_n^{(\cdot)} - G_P^{(\cdot)}\right)(dx) \right\|_B > d_n(t, \varphi_m) \log n\right) \leqslant C \exp\{-C_0 t\},$$

где $\varphi_m(x)$ *и* $d_n(t, \varphi_m)$ *определены в лемме* 3.1.

Доказательство. Введем в рассмотрение случайное поле

$$V_n(t, z) = (n^{-1}[nt])^{1/2} v_{[nt]}(z),$$

где процесс $v_n(\cdot)$ определен в лемме 3.1. Обозначим через $K(t, z)$ так называемое поле Кифера, т. е. гауссовское поле с нулевым средним и ковариацией

$$\mathbf{E}K(t_1, z_1)K(t_2, z_2) = \min(t_1, t_2)(\min(z_1, z_2) - z_1 z_2).$$

Далее, имеют место соотношения, аналогичные (3.5) с заменой процессов $v_n(\cdot)$ и $w^0(\cdot)$ случайными полями $V_n(\cdot)$ и $K(\cdot)$. Построение $V_n(\cdot)$ и $K(\cdot)$ на одном вероятностном пространстве осуществляется методом работы [6] (см. также [9]), откуда и следует наше утверждение. Лемма доказана.

Утверждение леммы 3.2 имеет место при замене $G_P(\cdot)$ на $G_P^{(t)}(\cdot)$ и $\|\cdot\|$ на $\|\cdot\|_B$. Это есть следствие неравенства Леви (см. [5]) и непрерывности $W(\cdot)$. Утверждение леммы 3.3 также сохранится при замене $Q_n(\cdot)$ на $Q_n^{(t)}(\cdot)$ и $\|\cdot\|$ на $\|\cdot\|_B$, так как неравенство В. В. Юринского, применяемое для оценки второго слагаемого правой части (3.13), имеет место и для нормы $\|\cdot\|_B$ (см. [7]). Таким образом, справедлива следующая

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда случайные процессы $S_n(\cdot)$ и $W(\cdot)$ можно так задать на одном вероятностном пространстве, что*

$$\mathbf{P}(\|S_n - W\|_B \geqslant \alpha_1) \leqslant \alpha_1, \tag{4.4}$$

где α_1 отличается от α в (3.16) лишь наличием множителя $\log n$ у последнего слагаемого правой части (3.16).

Замечание. Рассмотренный метод получения оценок скорости сходимости в принципе инвариантности в банаховых пространствах — это реализация более общей конструкции (см. следующий пункт), которая оказалась достаточно эффективной при исследовании точности гауссовской аппроксимации эмпирических мер. Однако данный метод неожиданно нашел применение в, казалось бы, хорошо изученной проблеме — классическом принципе инвариантности Донскера — Прохорова в R.

Пусть $\mathfrak{X} = R$. Тогда справедливо следующее утверждение (см. [10]).

Лемма 4.3. *Если $\mathbf{E}\xi_1 = 0$ и $\mathbf{E}\xi_1^2 = 1$, то*

$$\begin{aligned} S_n(t) &\overset{d}{=} -\int_R V_n(t, F(z))\,dz, \\ W(t) &\overset{d}{=} -\int_R K(t, F(z))\,dz, \end{aligned} \tag{4.5}$$

где $F(z)$ — функция распределения с. в. ξ_1, причем несобственные интегралы в (4.5) сходятся с вероятностью 1.

Отметим, что знак «минус» перед интегралом в представлении $W(\cdot)$ в (4.5) можно опустить, так как поле $K(\cdot)$ симметрично распределено. Минус оставлен для удобства использования результатов, касающихся близости распределений случайных полей $V_n(\cdot)$ и $K(\cdot)$.

Если несобственные интегралы в (4.5) понимать в несколько более слабом смысле — как пределы в среднеквадратичном, то соотношения (4.5) сразу следуют из определения стохастического интеграла (см. (3.5)). В этом случае атомы $\{x_{mk}\}$ дискретного приближения φ_m необходимо занумеровать в порядке возрастания (см. (3.5), лемму 2.1 и доказательство леммы 4.2.). Тогда соотношения (4.5) можно понимать как результат интегрирования по частям стохастического интеграла.

В [10] с помощью леммы 4.2 получена неулучшаемая оценка скорости сходимости в принципе инвариантности в R, уточняющая целый ряд результатов в [11—13]. Несколько менее точную оценку, но во многих случаях совпадающую по порядку с отмеченной выше, дает теорема 4.1. Так как последнее слагаемое в (3.16) зависит только от n и крайних членов ряда $\{x_{mk};\ k \leqslant m\}$ (см. (3.6)), но не зависит от m, то в (3.16) можно считать, что величина $\varphi_m(\xi_1)$ есть не что иное, как срезка с. в. ξ_1 на некотором уровне, который явно войдет в выражение для α_1 в (4.4).

5. Суммирование случайных величин в псевдонормированных линейных пространствах

Обобщим рассмотренную выше конструкцию на произвольные псевдонормированные линейные пространства. Необходимость такого обобщения будет пояснена на примере изучения скорости сходимости в принципе инвариантности для эмпирических мер (см. также [14]). Отказ от полноты и сепарабельности $\mathfrak{X}$, замена нормы псевдонормой приводят к существенным изменениям рассмотренной схемы. В таких пространствах уже нельзя построить интеграл Бохнера (тем более стохастический), трудности возникают уже при определении понятия случайной величины со значениями в $\mathfrak{X}$ и т. д. Однако все же удается построить аналог рассмотренной выше схемы, хотя количественные оценки вида (3.16) и (4.4) в указанной общности будут (и это естественно) менее конкретными.

Итак, пусть $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|, \mathscr{C})$ — произвольное измеримое псевдонормированное линейное пространство, где σ-алгебра $\mathscr{C}$ порождается некоторым семейством L линейных функционалов на $\mathfrak{X}$. Случайной величиной в $\mathfrak{X}$ назовем $\mathscr{C}$-измеримое отображение основного вероятностного пространства. Иначе говоря, если ξ является $\mathfrak{X}$-значной с. в., то для любого $l \in L$ суперпозиция $l(\xi)$ есть обычная (борелевская) с. в. в R. Отметим, что при таком определении любая линейная комбинация с. в. снова будет с. в. В то же время отображение $\|\xi\|$, вообще говоря, уже не будет $\mathscr{C}$-измеримым.

Пусть $\{\xi_i;\ i \geqslant 1\}$ — независимые одинаково распределенные с. в. в $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|, \mathscr{C})$. Наряду с ξ_i нам понадобится дискретная «аппроксимация» ξ_i:

$$\xi_i^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} x_{mk} I_{B_{mk}}(\xi_i),$$

где $B_{mk} \in \mathscr{C}$ образуют разбиение пространства $\mathfrak{X}$; $x_{mk} \in B_{mk}$. Для таких с. в. естественно определить среднее по формуле

$$\mathbf{E}\xi_i^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} x_{mk} p_k,$$

где $p_k = \mathbf{P}(\xi_i \in B_{mk}) > 0$. Через $S_n(t)$ по-прежнему будем обозначать случайную ломаную, построенную по совокупности с. в. $\{\xi_i;\ i \leqslant n\}$ (см. (4.1)). Рассмотрим в пространстве $_{\mathfrak{X}}[0, 1]$ σ-алгебру, порожденную цилиндрическими множествами вида

$$\{x(\cdot) \in B_{\mathfrak{X}}[0, 1]\colon x(t_1) \in A_1, \ldots, x(t_k) \in A_k\},$$

где $A_i \in \mathscr{C}$, $k = 1, 2, \ldots$. Случайным элементом в $B_{\mathfrak{X}}[0, 1]$ будем называть измеримое относительно указанной σ-алгебры отображение основного вероятностного пространства. В основе метода лежит отмеченный выше факт (см. (3.5)).

Лемма 5.1. *Для любой последовательности дискретных с. в.* $\{\xi_i^{(m)}\}$ *справедливо равенство (по распределению в* $B\mathfrak{X}[0, 1]$*)*

$$S_n^{(m)}(t) \equiv n^{-1/2} \sum_{i \leqslant nt} \left(\xi_i^{(m)} - \mathbf{E}\xi_i^{(m)}\right) \overset{d}{=} -\sum_{k=1}^{m-1} V_n\left(t, \sum_{i=1}^{k} p_i\right)(x_{mk+1} - x_{mk}). \quad (5.1)$$

Будем говорить, что с. в. ζ в $\mathfrak{X}$ имеет L-среднее x, если $\mathbf{E}l(\zeta) = l(x)$ для любого $l \in L$. Назовем также L-ковариацией с. в. ζ билинейный функционал $\mathrm{Cov}_\zeta(l_1, l_2)$, определенный в п. 2 для любых $l_1, l_2 \in L$. Если функционалы из L непрерывны, то для корректного задания L-ковариации с. в. ζ достаточно потребовать существования квадратично интегрируемой измеримой мажоранты для $\|\zeta\|$.

Назовем с. в. γ L-гауссовской, если для любого $l \in L$ с. в. $l(\gamma)$ имеет гауссовское распределение. Нетрудно проверить, что L-гауссовская с. в.

$$\gamma^m = -\sum_{k=1}^{m-1} w^0 \left(\sum_{i=1}^{k} p_i \right) (x_{mk+1} - x_{mk}) \tag{5.2}$$

имеет нулевое L-среднее и ту же L-ковариацию, что и с. в. $\xi_1^{(m)}$ (или $S_n^{(m)}(1)$) Более того, справедлива следующая

Лемма 5.2. *Пусть* $\{\gamma_i^{(m)};\ i \geqslant 1\}$ *— независимые* L*-гауссовские с. в., совпадающие по распределению с* (5.2). *Тогда в* $B_{\mathfrak{X}}[0, 1]$ *справедливо равенство*

$$W_n^{(m)}(t) \equiv n^{-1/2} \sum_{i \leqslant nt} \gamma_i^{(m)} \overset{d}{=} -\sum_{k=1}^{m-1} K\left(\frac{[nt]}{n}, \sum_{i=1}^{k} p_i \right) (x_{mk+1} - x_{mk}), \tag{5.3}$$

где $K(\cdot)$ *— поле Кифера.*

Доказательство сразу следует из сравнения L-средних и L-ковариаций обеих частей (5.3).

Имеет место аналог леммы 4.2:

Лемма 5.3. *Случайные процессы* $S_n^{(m)}(\cdot)$ *и* $W_n^{(m)}(\cdot)$ *можно так задать на одном вероятностном пространстве, что*

$$\mathbf{P}^* \left(\| S_n^{(m)} - W_n^{(m)} \|_B > d_n(t, \varphi_m) \log n \right) \leqslant C_1 e^{-Ct}, \tag{5.4}$$

где $\mathbf{P}^*$ *— внешняя мера для вероятности* $\mathbf{P}$, $d_n(\cdot)$ *определено в* (3.2).

Замечание. Неравенство (5.4) и аналогичные соотношения в дальнейшем понимаются в несколько более сильном смысле, а именно: существует измеримая верхняя оценка для $\|\cdot\|_B$, для распределения которой справедливо неравенство (5.4).

Дадим краткое описание предлагаемого метода оценки скорости сходимости в принципе инвариантности. Допустим, что по последовательности $\{\xi_i\}$ построены дискретные «приближения» $\{\xi_i^{(m)}\}$, для которых

$$\mathbf{P}^* \left(\| S_n - S_n^{(m)} \|_B \geqslant \varepsilon_1(m) \right) \leqslant \beta_1(m). \tag{5.5}$$

Предположим, что в $\mathfrak{X}$ существует L-гауссовская с. в. γ с нулевым L-средним и такой же L-ковариацией, как и у с. в. ξ_1. Пусть $\gamma^{(m)}$ — конечномерная проекция с. в. γ, совпадающая по распределению с (5.2), причем

$$\mathbf{P}^* \left(\| W_n - W_n^{(m)} \|_B \geqslant \varepsilon_2(m) \right) \leqslant \beta_2(m), \tag{5.6}$$

где $W_n(t) = n^{-1/2} \sum_{i \leqslant nt} \gamma_i$, $\{\gamma_i\}$ независимы и $\gamma_i \overset{d}{=} \gamma$. Разумеется, желательно, чтобы $\varepsilon_1(m)$, $\varepsilon_2(m)$, $\beta_1(m)$, $\beta_2(m)$ в (5.5) и (5.6) стремились к нулю с ростом m.

Далее, зададим случайные процессы $S_n^{(m)}(\cdot)$ и $W_n^{(m)}(\cdot)$ на одном вероятностном пространстве с помощью леммы 5.3 и зафиксируем их, а следовательно, и значения $\xi_1^{(m)} = x_{mk(1)}$, $\xi_2^{(m)} = x_{mk(2)}, \ldots, \xi_m^{(m)} = x_{mk(m)}$. Обозначим через $\{\eta_i(x_{mk(i)});\ i \leqslant m\}$ независимые с. в. с распределением

$$\mathbf{P}(\eta_i(x_{mk(i)}) \in A) = \mathbf{P}(\xi_i - x_{mk(i)} \in A \mid \xi_i \in B_{mk(i)}).$$

Считаем, что с. в. $\{\eta_i(x_{mk(i)})\}$ не зависит от $\{\xi_i\}$. Тогда $\eta_i(\xi_i^{(m)}) + \xi_i^{(m)} \overset{d}{=} \xi_i$. Таким образом, на одном вероятностном пространстве с $S_n^{(m)}(\cdot)$ задан процесс $S_n(\cdot)$.

Для построения случайного процесса $W_n(\cdot)$ на вероятностном пространстве, где уже заданы $W_n^{(m)}(\cdot)$, $S_n^{(m)}(\cdot)$ и $S_n(\cdot)$, дополнительно предположим, что при любом m существует регулярное условное распределение

$$\tilde{P}(A \mid y) = \mathbf{P}(\gamma - y \in A \mid \gamma^{(m)} = y). \tag{5.7}$$

Пусть $\{\widetilde{\gamma}_i(y_i),\ i \geqslant 1\}$ — независимые с. в. в $\mathfrak{X}$ с распределением (5.7), где $y = y_i$, а y_i — любой элемент из линейной оболочки, натянутой на векторы $\{x_{mk};\ k \leqslant m\}$. Кроме того, будем считать, что на расширенном вероятностном пространстве семейство с. в. $\{\widetilde{\gamma}_i(y_i)\}$ не зависит от построенных случайных процессов. Очевидно, $\widetilde{\gamma}_i(\gamma^{(m)}) + \gamma_i^{(m)} \overset{d}{=} \gamma_i$, где $\gamma_i^{(m)}$ определены в (5.2). Следовательно, все четыре процесса $S_n(\cdot)$, $S_n^{(m)}(\cdot)$, $W_n^{(m)}(\cdot)$ и $W_n(\cdot)$ построены на одном вероятностном пространстве, причем выполнено (5.4)—(5.6). Таким образом, справедлива

Теорема 5.1. *При выполнении* (5.5)—(5.7) *случайные процессы* $S_n(\cdot)$ *и* $W_n(\cdot)$ *можно так задать на одном вероятностном пространстве, что*

$$\mathbf{P}^*(\|S_n - W_n\|_B \geqslant \alpha_2) \leqslant \alpha_2, \tag{5.8}$$

где $\alpha_2 = C\{d_n(C_1 \log n,\ \varphi_m) + \varepsilon_1(m) + \varepsilon_2(m) + \beta_1(m) + \beta_2(m)\}$, m — *любое натуральное число.*

Замечание 1. Если $\mathfrak{X}$ — банахово пространство, то при выполнении условия (5.5) существуют L-гауссовские с. в. γ и $\{\gamma^{(m)}\}$, для которых имеют место соотношения (5.6) и (5.7). Это нетрудно показать, используя результаты [14].

Замечание 2. Расстояние по внешней мере (или по вероятности) вида (5.8), по-видимому, наиболее естественное при такой общности задачи (ср. с [14]), поскольку использование других наиболее распространенных метрик существенно зависит от измеримости нормы.

6. Суммирование независимых случайных полей. Оценки для распределений

Пусть $\{\xi(\theta);\ \theta \in \Theta\}$ — вещественнозначное случайное поле (с. п.) с произвольным параметрическим множеством Θ. Мы будем рассматривать ξ как случайный элемент со значениями в измеримом пространстве $(\mathcal{F}(\Theta),\ \mathcal{C})$, где $\mathcal{F}(\Theta)$ — множество всех функций, заданных на Θ, а $\mathcal{C}$ — минимальная σ-алгебра, содержащая все цилиндрические множества $\mathcal{F}(\Theta)$. Распределение ξ и независимость последовательности с. п. определяются здесь стандартным образом.

Всюду в дальнейшем предполагается, что $\mathbf{E}|\xi(\theta)| < \infty$ при всех $\theta \in \Theta$. Пусть $\Theta_0 \subseteq \Theta$; с. п. $\xi(\theta)$ назовем Θ_0-регулярным, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие подмножества $U_i(\varepsilon) \subseteq \Theta_0$, $i = 1, 2, \ldots, N(\varepsilon)$, и с. в. $\Delta_i(\varepsilon,\ \xi) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, N(\varepsilon)$, что $\mathbf{E}\Delta_i(\varepsilon,\ \xi) \leqslant \varepsilon$, $i \leqslant N(\varepsilon)$, $\cup U_i(\varepsilon) = \Theta_0$, кроме того, при всех i

$$\sup_{\theta_1, \theta_2 \in U_i(\varepsilon)} |\xi(\theta_1) - \xi(\theta_2)| \leqslant \Delta_i(\varepsilon,\ \xi) \tag{6.1}$$

с вероятностью 1. Логарифм минимального числа подмножеств $\{U_i(\varepsilon)\}$ с указанным свойством назовем $(\varepsilon,\ \xi)$-энтропией множества Θ_0 и обозначим через $H_\xi(\varepsilon)$.

Замечание. Необходимость введения с. в. $\{\Delta_i(\cdot)\}$ объясняется возможной неизмеримостью функционала $\sup|\cdot|$. Всюду в дальнейшем для независимых одинаково распределенных Θ_0-регулярных с. п. $\{\xi_i(\theta)\}$ без каких-либо оговорок предполагается, что семейства с. в. $\{\Delta_i(\varepsilon,\ \xi_1)\}$, $\{\Delta_i(\varepsilon,\ \xi_2)\}$, ... независимы и распределение $\Delta_i(\varepsilon,\ \xi_k)$ не зависит от k. Нетрудно построить примеры, когда отмеченные свойства с. в. $\{\Delta_i(\varepsilon,\ \xi_k)\}$ не имеют места. Все это объясняется относительной бедностью цилиндрической σ-алгебры $\mathcal{C}$, на которой и рассматриваются распределения с. п.

Выделим один важный класс Θ_0-регулярных с. п. Будем называть с. п. $\xi(\theta)$ локально монотонным на Θ_0, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется конечный набор точек $\theta_i \equiv \theta_i(\varepsilon) \in \Theta$, $i = 1, 2, \ldots, N_1(\varepsilon)$ (возможно, не принадлежащих Θ_0) со следующим свойством: для любой точки $\theta_0 \in \Theta_0$

существует такая пара точек θ_{i_1}, θ_{i_2} из указанного семейства, что

$$\rho(\theta_{i_1}, \theta_{i_2}) \equiv \mathbf{E}|\xi(\theta_{i_1}) - \xi(\theta_{i_2})| \leqslant \varepsilon, \tag{6.2}$$

и для всех элементарных исходов

$$\xi(\theta_{i_1}) \leqslant \xi(\theta_0) \leqslant \xi(\theta_{i_2}). \tag{6.3}$$

Если теперь обозначить

$$U_{i_1, i_2}(\varepsilon) = \{\theta \in \Theta_0 \colon \xi(\theta_{i_1}) \leqslant \xi(\theta) \leqslant \xi(\theta_{i_2}),\ \rho(\theta_{i_1}, \theta_{i_2}) \leqslant \varepsilon\},$$

то легко видеть, что конечная совокупность подмножеств $\{U_{i_1, i_2}(\varepsilon)\}$ удовлетворяет условиям Θ_0-регулярности $\xi(\theta)$.

Функцию $H_1(\varepsilon)$ — логарифм минимального числа элементов $\{\theta_i\}$, удовлетворяющих (6.2), (6.3),— назовем (см. [1], [14]) двусторонней метрической энтропией множества Θ_0 (в отличие от обычной ε-энтропии А. Н. Колмогорова). Очевидно, для локально монотонных с. п. выполнено неравенство $H_\xi(\varepsilon) \leqslant 2H_1(\varepsilon)$.

Конкретный пример локально монотонных с. п. содержится в [14], где рассматривалась более частная задача, когда $\xi_i(\theta) = \theta(\zeta_i)$. Здесь $\{\zeta_i;\ i \geqslant 1\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в произвольном измеримом пространстве, а $\Theta = \{\theta(\cdot)\}$ — некоторое подмножество вещественнозначных измеримых функций. Отметим, что в этом случае условия (6.2), (6.3) выглядят менее ограничительными. Например, если $\Theta = \{I_A(\cdot)\}$ — совокупность индикаторов всех измеримых подмножеств, а $\Theta_0 = \{I_A(\cdot);\ A \in \mathscr{B}\}$ — совокупность индикаторов некоторого семейства $\mathscr{B}$ измеримых подмножеств, то условия (6.2), (6.3) преобразуются в следующие. Для всякого $\varepsilon > 0$ существуют такие измеримые множества $A_i \equiv A_i(\varepsilon)$, $i = 1, \ldots, N_1(\varepsilon)$, возможно, не принадлежащие $\mathscr{B}$, что для любого $A \in \mathscr{B}$ выполнено

$$A_{i_1} \subseteq A \subseteq A_{i_2}, \quad P_\zeta(A_{i_2} \setminus A_{i_1}) \leqslant \varepsilon \tag{6.4}$$

для некоторых i_1, $i_2 \leqslant N_1(\varepsilon)$, где P_ζ — распределение ζ_1 (см. [1]).

Примерами семейства $\mathscr{B}$, для которого выполнено (6.4), могут служить множество параллелепипедов в R^m (в том числе и неограниченных) с гранями, параллельными соответствующим координатным плоскостям, множество всех шаров в R^m и др. При этом в указанных примерах распределение P_ζ произвольно. Во всех приведенных далее утверждениях $\{\xi_i(\theta);\ i \geqslant 1\}$ — независимые одинаково распределенные Θ_0-регулярные с. п.

Основной результат этого пункта состоит в следующем.

Теорема 6.1. *Пусть* $\sup\{|\xi_1(\theta)|;\ \theta \in \Theta_0\} \leqslant M$ *с вероятностью* 1. *Тогда для любых* $y \geqslant 0$ *и натуральных* n, m *имеет место неравенство*

$$\mathbf{P}^*\left(\max_{k \leqslant n} \sup_{\theta \in \Theta_0} |S_{nk}(\theta)| > \psi_n(y, m, M, \lambda)\right) \leqslant Ce^{-y^2}, \tag{6.5}$$

где

$$\psi_n(y, N, M, \lambda) = CMn^{-1/2}\left(\sum_{i=0}^{m} H_\xi(2^{-i}) + my^2 + m^2\right) +$$

$$+ C\lambda^{1/2} \sum_{i=0}^{m} \left(H_\xi(2^{-i})\, 2^{-i}\right)^{1/2} + C\lambda^{1/2}(y+1) + Cn^{1/2}2^{-m};$$

$$\lambda = \sup_{\varepsilon > 0;\ j = 1, 2, \ldots} \varepsilon^{-1} \mathbf{E}\Delta_j^2(\varepsilon, \xi_1);$$

$$S_{nk}(\theta) = n^{-1/2} \sum_{i=1}^{k} (\xi_i(\theta) - \mathbf{E}\xi_i(\theta)).$$

Замечание. Следующий пример (см. [1]) показывает, что при получении оценок вида (6.5) (ε, ξ)-энтропия $H_\xi(\cdot)$ не может быть заменепа обычной ε-энтропией А. Н. Колмогорова. Рассмотрим частный случай задачи, когда $\xi_i(A)=I_A(\zeta_i)$, $A\in\mathcal{A}$; здесь $\mathcal{A}$ — σ-алгебра борелевских множеств отрезка [0, 1], $\{\zeta_i\}$ — последовательность независимых случайных величин с равномерным распределением на [0, 1]. Пусть $\mathcal{B}$ — совокупность всех конечных подмножеств отрезка [0, 1]. Очевидно, ε-энтропия А. Н. Колмогорова класса $\mathcal{B}$ относительно метрики $\rho(\cdot)$ тождественно равна нулю. В то же время

$$\sup_{A\in\mathcal{B}}\left|n^{-1/2}\sum_{i=1}^{k}(I_A(\zeta_i)-\mathrm{E}I_A(\zeta_i))\right|\equiv n^{1/2}.$$

Отметим, что в этом случае $H_\xi(\varepsilon)=\infty$ при всех $\varepsilon<1$.

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы* 6.1. *Тогда для всех* $y\geqslant 0$ *и* $n\geqslant n_0$ *справедлива оценка*

$$\mathbf{P}^*\left(\max_{k\leqslant n}\sup_{\theta\in\Theta_0}|S_{nk}(\theta)|>CM^{1/2}\left\{\sum_{i=0}^{N_*+1}\left(H_\xi(2^{-i})2^{-i}\right)^{1/2}+y+1\right\}\right)\leqslant Ce^{-y},\tag{6.6}$$

где $N_*=\max\{k\geqslant 1\colon M\max\{1,\ H(2^{-k})\}\leqslant n2^{-k}\}$. *Кроме того, в более узкой зоне* $0\leqslant y\leqslant(n/M)^{1/2}(\log(n/M))^{-1}$ *показатель экспоненты в правой части* (6.6) *можно заменить на* $-y^2$.

Сформулированные утверждения следуют из (6.5) и очевидных неравенств $N_*\leqslant\log(n/M)$, $z^{-1/2}\log z<2e^{-1}$ и $z^{-1/2}(\log z)^2<16e^{-2}$ при $z\geqslant 2$ ($n/M\geqslant 2$ при $n\geqslant n_0$), $\lambda\leqslant 2M, n^{1/2}2^{-N_*-1}<M^{1/2}\left(H_\xi(2^{-N_*-1})+1\right)$.

Например, если $H_\xi(\varepsilon)\leqslant C_0\varepsilon^{-a}$, где $a>0$, то можно положить в (6.6)

$$N_*=\left[\frac{\log\left(n(MC_0)^{-1}\right)}{(a+1)\log 2}\right]\quad 1,$$

при этом величину $\sum_{i=0}^{N_*+1}\left(H_\xi(2^{-i})2^{-i}\right)^{1/2}$ в (6.6) можно заменить на

$$C_0^{1/2}\left(1-2^{(a-1)/2}\right)^{-1},\quad \text{если}\quad 0<a<1,$$

$$C_0^{1/2}\log\left(n(MC_0)^{-1}\right),\quad \text{если}\quad a=1,$$

$$\frac{C_0^{1/2}2^{(a-1)/2}}{2^{(a-1)/2}-1}\left(\frac{n}{MC_0}\right)^{(a-1)/2(a+1)},\quad \text{если}\quad a>1.$$

Порядок по n последних двух оценок улучшить нельзя. Полученные соотношения обобщают и усиливают соответствующие результаты в [15].

Определенный интерес для теории представляет оценка вероятностей локальных выбросов (т. е. оценка распределения «модуля непрерывности») сумм независимых с. п. Такие результаты необходимы, например, при получении оценок скорости сходимости в соответствующей центральной предельной теореме. Обозначим

$$\omega(\varepsilon)=\max_{k\leqslant n}\sup_{\theta_1,\theta_2\in\Theta_0:\rho(\theta_1,\theta_2)\leqslant\varepsilon}|S_{nk}(\theta_1)-S_{nk}(\theta_2)|.$$

Теорема 6.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 6.1. *Тогда для любых* $y\geqslant 0$ *и натуральных* n, m *и* $r>m$

$$\mathbf{P}^*\left(\omega(2^{-m})>\psi_n^{(m)}(y,r,M,\lambda)\right)<Ce^{-y^2-m},\tag{6.7}$$

где

$$\psi_n^{(m)}(y,r,M,\lambda)=CMn^{-1/2}\left(\sum_{i=m}^{r}H_\xi(2^{-i})+ry^2+r^2\right)+$$

$$+C\lambda^{1/2}\sum_{i=m}^{r}\left(H_\xi(2^{-i})2^{-i}\right)^{1/2}+C\lambda^{1/2}2^{-m/2}(y+1)+Cn^{1/2}2^{-r}.$$

Следствие. *Для любых* $y \geqslant 0$ *и натуральных* m *и* $n \geqslant \min\{k:$ $M \max\{1, H_\xi(2^{-m-1})\} \leqslant 2^{-m-1}k\}$ *справедлива оценка*

$$\mathbf{P}^*\left(\omega(2^{-m}) > CM^{1/2}\left\{\sum_{i=m}^{N_*(m)+1}\left(H_\xi(2^{-i})2^{-i}\right)^{1/2} + (y+1)2^{-m/2}\right\} + \right.$$
$$\left. + CMn^{-1/2}N_*^2(m)(y^2+1)\right) \leqslant Ce^{-y^2-m}, \tag{6.8}$$

где (*см.* (6.6)) $N_*(m) = \max\{m, N_*\}$.

В некоторых случаях более удобна следующая модификация (ε, ξ)-энтропии. Пусть в определении Θ_0-регулярных с. п. конечный набор с. в. $\{\Delta_i(\varepsilon, \xi);\ i \leqslant N(\varepsilon)\}$ в (6.1) при любом $\varepsilon > 0$ удовлетворяет условию

$$\mathbf{E}^{1/2}\Delta_i^2(\varepsilon, \xi) \leqslant \varepsilon, \quad i \leqslant N(\varepsilon).$$

Обозначим через $H_\xi^{(2)}(\varepsilon)$ логарифм минимального числа $N(\varepsilon)$ таких с. в. Очевидно, для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство $H_\xi(\varepsilon) \leqslant H_\xi^{(2)}(\varepsilon)$.

Теорема 6.3. *Пусть* $\{\xi_i(\theta);\ i \geqslant 1\}$ — Θ_0-*регулярные ограниченные с. п. с конечной* (ε, ξ)-*энтропией* $H_\xi^{(2)}(\varepsilon)$. *Тогда имеют место неравенства* (6.5) *и* (6.7), *в которых величины* $H_\xi(\cdot)$, $\lambda^{1/2}\sum\left(H_\xi(2^{-i})2^{-i}\right)^{1/2}$ *и* $\lambda^{1/2}2^{-m/2}$ *заменены соответственно на* $H_\xi^{(2)}(\cdot)$, $\sum\left(H_\xi^{(2)}(2^{-i})\right)^{1/2}2^{-i}$ *и* 2^{-m}.

Доказательство теоремы 6.1. Для всех $m \geqslant 0$ из каждого множества $U_i(2^{-m})$; $i \leqslant N(2^{-m}) \equiv \exp\{H_\xi(2^{-m})\}$, выберем по одной точке $\theta_i^{(m)}$. Очевидно, при любом $k \geqslant 1$

$$\sup_{\theta\in\Theta_0}|S_{nk}(\theta)| \leqslant \max_{j\leqslant N(2^{-m})}\left|S_{nk}(\theta_j^{(m)})\right| + \max_{j\leqslant N(2^{-m})}\sup_{\theta\in U_j(2^{-m})}\left|S_{nk}(\theta) - S_{nk}(\theta_j^{(m)})\right|. \tag{6.9}$$

Очевидно, для любого $\theta_j^{(m)}$ существует такая точка $\theta_{l(j,m)}^{(m-1)}$, что

$$\rho\left(\theta_j^{(m)}, \theta_{l(j,m)}^{(m-1)}\right) \leqslant 2^{1-m}, \tag{6.10}$$

где $\rho(\cdot)$ определено в (6.2). Поэтому первое слагаемое правой части (6.9) можно оценить следующим образом:

$$\max_{j\leqslant N(2^{-m})}\left|S_{nk}(\theta_j^{(m)})\right| \leqslant \max_{j\leqslant N(2^{-m})}\left|S_{nk}(\theta_j^{(m)}) - S_{nk}(\theta_{l(j,m)}^{(m-1)})\right| +$$
$$+ \max_{j\leqslant N(2^{1-m})}\left|S_{nk}(\theta_j^{(m-1)}) - S_{nk}(\theta_{l(j,m-1)}^{(m-2)})\right| + \ldots + \max_{j\leqslant N(1)}\left|S_{nk}(\theta_j^{(0)})\right|. \tag{6.11}$$

Оценка для второго слагаемого правой части (6.9) следует из определения $U_j(\varepsilon)$:

$$\max_{j\in N(2^{-m})}\sup_{\theta\in U_j(2^{-m})}\left|S_{nk}(\theta) - S_{nk}(\theta_j^{(m)})\right| \leqslant \max_{j\leqslant N(2^{-m})} n^{-1/2} \times$$
$$\times\left|\sum_{i=1}^{k}\left(\Delta_j(2^{-m}, \xi_i) - \mathbf{E}\Delta_j(2^{-m}, \xi_i)\right)\right| + n^{1/2}2^{1-m}. \tag{6.12}$$

Неравенство (6.11) позволяет получить оценку

$$\mathbf{P}\left(\max_{k\leqslant n}\max_{j\leqslant N(2^{-m})}\left|S_{nk}(\theta_j^{(m)})\right| > \sum_{i=0}^{m}y_i\right) \leqslant \sum_{i=0}^{m}N(2^{-i}) \times$$
$$\times \max_{j\leqslant N(2^{-i})}\mathbf{P}\left(\max_{k\leqslant n}\left|S_{nk}(\theta_j^{(i)}) - S_{nk}(\theta_{l(j,i)}^{(i-1)})\right| > y_i\right), \tag{6.13}$$

где $\{y_i\}$ — произвольные положительные числа, $S_{nk}\left(\theta_{l(j,0)}^{(-1)}\right) = 0$. Для оценки каждого слагаемого правой части (6.13) нам понадобится следующий вариант неравенства С. Н. Бернштейна (см. [7]). Пусть $\{\eta_i\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, для которых $\mathbf{E}\eta_i=0$, $E\eta_i^2\leqslant\sigma^2$ и $|\eta_i|\leqslant K$ с вероятностью 1. Тогда при любом $y\geqslant 0$

$$\mathbf{P}\left(\max_{k\leqslant n} n^{-1/2}\left|\sum_{r=1}^{k}\eta_r\right|>y\sigma\right)\leqslant 2\exp\left\{-\frac{y^2}{2\left(1+Ky\left(\sigma\sqrt{n}\right)^{-1}\right)}\right\}. \tag{6.14}$$

Применительно к i-му слагаемому суммы в (6.13) имеем

$$\eta_r=\xi_r\left(\theta_j^{(i)}\right)-\xi_r\left(\theta_{l(j,i)}^{(i-1)}\right)-\mathbf{E}\left(\xi_r\left(\theta_j^{(i)}\right)-\xi_r\left(\theta_{l(j,i)}^{(i-1)}\right)\right),$$

$$\mathbf{E}\eta_r^2\leqslant\lambda\rho\left(\theta_j^{(i)},\ \theta_{l(j,i)}^{(i-1)}\right)\leqslant\lambda 2^{1-i}\equiv\sigma^2, \tag{6.15}$$

$$|\eta_r|\leqslant 4M=K. \tag{6.16}$$

Теперь положим в (6.13)

$$y_i=(\lambda 2^{1-i})^{1/2}z_i. \tag{6.17}$$

Тогда из (6.13)—(6.17) следует неравенство

$$\mathbf{P}\left(\max_{k\leqslant n}\max_{j\leqslant N(2^{-m})}\left|S_{nk}\left(\theta_j^{(m)}\right)\right|>\sum_{i=0}^{m}y_i\right)\leqslant 2\sum_{i=0}^{m}\exp\{H_\xi(2^{-i})-$$
$$-z_i^2\left(2+z_iM(\lambda n)^{-1/2}2^{5/2+i/2}\right)^{-1}\}. \tag{6.18}$$

В качестве z_i в (6.17) возьмем положительный корень уравнения

$$z_i^2=\left(H_\xi(2^{-i})+y^2+i\right)\left(2+z_iM(\lambda n)^{-1/2}2^{5/2+i/2}\right). \tag{6.19}$$

Очевидно, в этом случае

$$\mathbf{P}\left(\max_{k\leqslant n}\max_{j\leqslant N(2^{-m})}\left|S_{nk}\left(\theta_j^{(m)}\right)\right|>\sum_{i=0}^{m}y_i\right)\leqslant 4e^{-y^2}. \tag{6.20}$$

Аналогично оценивается вероятность того, что первое слагаемое правой части (6.12) превзойдет уровень y_m. Из (6.19) получаем

$$z_i\leqslant M(\lambda n)^{-1/2}(H_\xi(2^{-i})+y^2+i)2^{5/2+i/2}+(H_\xi(2^{-i})+y^2+i)^{1/2}. \tag{6.21}$$

Далее нам необходимо оценить величину Σy_i. Из (6.17) и (6.21) следует

$$\sum_{i=0}^{m}y_i\leqslant CMn^{-1/2}\left(\sum_{i=0}^{m}H_\xi(2^{-i})+m^2+my^2\right)+$$
$$+C\lambda^{1/2}\sum_{i=0}^{m}\left(H_\xi(2^{-i})2^{-i}\right)^{1/2}+C\lambda^{1/2}(y+1). \tag{6.22}$$

Утверждение теоремы следует из (6.9), (6.12), (6.13), (6.20) и (6.22).

Доказательство теоремы 6.2. Остановимся лишь на некоторых деталях доказательства, поскольку оно в основном повторяет рассуждения теоремы 6.1.

Имеем

$$\omega(2^{-m})\leqslant\max_{k,i,j:\rho\left(\theta_i^{(r)},\theta_j^{(r)}\right)\leqslant 2^{-m}}\left|S_{nk}\left(\theta_i^{(r)}\right)-S_{nk}\left(\theta_j^{(r)}\right)\right|+$$
$$+2\max_{k,j}\sup_{\theta\in U_j(2^{-r})}\left|S_{nk}(\theta)-S_{nk}\left(\theta_j^{(r)}\right)\right|. \tag{6.23}$$

Обозначим первое слагаемое правой части (6.23) через J. Тогда

$$J\leqslant 2\max_{k,j}\left|S_{nk}\left(\theta_j^{(r)}\right)-S_{nk}\left(\theta_{l(j,r)}^{(r-1)}\right)\right|+2\max_{k,j}\left|S_{nk}\left(\theta_j^{(r-1)}\right)-S_{nk}\left(\theta_{l(j,r-1)}^{(r-2)}\right)\right|+$$
$$+\ldots+2\max_{j,k}\left|S_{nk}\left(\theta_j^{(m+1)}\right)-S_{nk}\left(\theta_j^{(m)}\right)\right|+$$
$$+\max_{i,j:\rho\left(\theta_i^{(m)},\theta_j^{(m)}\right)\leqslant 2^{2-m}}\left|S_{nk}\left(\theta_i^{(m)}\right)-S_{nk}\left(\theta_j^{(m)}\right)\right|.$$

Все дальнейшие рассуждения повторяют доказательство теоремы 6.1.

Доказательство теоремы 6.3. Отличие от доказательства предыдущих двух теорем состоит лишь в том, что неравенство (6.15) в этом случае будет точнее: $\mathbf{E}^{1/2}\eta_r^2 \leqslant 2^{1-i} \equiv \sigma$. Теперь в (6.17) необходимо положить $y_i = 2^{1-i} z_i$. Все остальные рассуждения в точности повторяют приведенные (с заменой $\rho(\cdot)$ в (6.2) на среднеквадратическое расстояние).

7. Принцип инвариантности для независимых случайных полей

Пусть $\{\xi_i(\theta),\ \theta \in \Theta;\ i \geqslant 1\}$ — независимые одинаково распределенные с. п. с произвольным параметрическим множеством Θ, удовлетворяющие условию Θ_0-регулярности для некоторого $\Theta_0 \subseteq \Theta$. Это условие, в частности, означает, что

$$\|\xi\| = \sup_{\theta \in \Theta_0} |\xi(\theta)| < \infty$$

с вероятностью 1. Очевидно, введенная функция $\|\cdot\|$ является полунормой в линейном измеримом пространстве $(\mathcal{F}_0(\Theta), \mathscr{C})$ всех числовых функций, заданных на Θ и ограниченных на Θ_0. Здесь σ-алгебра $\mathscr{C}$ порождается семейством так называемых координатных функционалов $L = \{\delta_\theta;\ \theta \in \Theta\}$, где $\delta_\theta x = x(\theta)$ для любого элемента $x \in \mathcal{F}_0(\Theta)$, которые, очевидно, линейны (но, вообще говоря, не непрерывны относительно $\|\cdot\|$).

Если $\mathbf{E}\xi^2(\theta) < \infty$ при всех $\theta \in \Theta$, то конечномерные распределения с. п. $S_{nn}(\cdot)$ слабо сходятся к конечномерным распределениям гауссовского поля $\gamma(\cdot)$ с нулевым средним и ковариацией

$$\mathrm{Cov}_\gamma(\delta_{\theta_1}, \delta_{\theta_2}) = \mathbf{E}\xi(\theta_1)\,\xi(\theta_2) - \mathbf{E}\xi(\theta_1)\,\mathbf{E}\xi(\theta_2).$$

Обозначим через $\|\cdot\|^*$ измеримую мажоранту для полунормы $\|\cdot\|$ (см. [14]).

Теорема 7.1. *Пусть независимые одинаково распределенные Θ_0-регулярные случайные поля $\{\xi_i(\cdot)\}$ удовлетворяют следующим условиям:*

$$\mathbf{E}\Phi(\|\xi_1\|^*) < \infty, \tag{7.1}$$

где $\Phi(x)$ — непрерывная строго возрастающая положительная функция на $[0, \infty)$, для которой $\lim\limits_{x\to\infty} \Phi(x) = \infty$, $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \varepsilon\Phi_{-1}(\varepsilon^{-2}) = 0$, где $\Phi_{-1}(z)$ — корень уравнения $\Phi(x) = z$;

$$\int_0^1 H_\xi^{1/2}(x^2)\,dx < \infty; \tag{7.2}$$

$$\sup_{n\geqslant 1} n^{-1/2}\Phi_{-1}(n) \sum_{i\leqslant m+(1/2)\log n} H_\xi(2^{-i}) < \infty, \tag{7.3}$$

где m — любое натуральное число;

$$\lambda = \max_j \sup_{\varepsilon>0} \varepsilon^{-1}\mathbf{E}\Delta_j^2(\varepsilon, \xi_1) < \infty. \tag{7.4}$$

Тогда на основном вероятностном пространстве можно так задать независимые гауссовские поля $\{\gamma_i(\cdot)\}$ с нулевым средним и такой же ковариацией, как и у с. п. $\xi_1(\cdot)$, что при $n \to \infty$

$$\mathbf{P}^*(\|S_n - W_n\|_B > \varepsilon) \to 0. \tag{7.5}$$

Теорема 7.2. *Пусть $\{\xi_i(\cdot);\ i \geqslant 1\}$ — независимые одинаково распределенные Θ_0-регулярные с. п. с конечной (ε, ξ)-энтропией $H_\xi^{(2)}(\varepsilon)$. Если выполнены условия (7.1) и (7.3) с заменой $H_\xi(\cdot)$ на $H_\xi^{(2)}(\cdot)$, то имеет место (7.5).*

Следствие 1. *Если $\|\xi_1\| \leqslant M < \infty$ с вероятностью 1, то для выполнения (7.5) достаточно требовать либо (7.2) для $H_\xi(\cdot)$, либо (7.3) для $H_\xi^{(2)}(\cdot)$ и $\Phi_{-1}(n) \equiv 1$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что существует функция $\Phi(x)$ в (7.1), для которой $\Phi_{-1}(n)\leqslant 2M$ при всех n. Пусть $N_*(m)$ определено в (6.8). Тогда

$$n^{-1/2}\Phi_{-1}(n)\sum_{i=m}^{N_*(m)} H_\xi(2^{-i})\leqslant 2M^{1/2}\sum_{i=m}^{N_*(m)}\left(H_\xi(2^{-i})\,2^{-i}\right)^{1/2}. \qquad (7.6)$$

Кроме того, из определения $N_*(m)$ следует, что $N_*(m)\geqslant\max\{m,\ \log(n/M)\}$. Остается только заметить, что условие (7.2) эквивалентно сходимости ряда $\sum\limits_{i\geqslant 1}\left(H_\xi(2^{-i})\,2^{-i}\right)^{1/2}$, откуда и следует нужная оценка для правой части (7.6).

Второе утверждение — очевидное следствие теоремы 7.2 и неравенства $\Phi_{-1}(n)\leqslant 2M$.

Замечание 1. В [16] приведен пример класса ограниченных локально монотонных с. п., для которых условие (7.2) эквивалентно соответствующей центральной предельной теореме.

Следствие 2. *Если при любом* $\varepsilon>0$

$$H_\xi(\varepsilon)\leqslant C(\varepsilon\Phi_{-1}(\varepsilon^{-2})|\log\varepsilon|)^{-1} \qquad (7.7)$$

и $\limsup\limits_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\Phi_{-1}(\varepsilon^{-2})|\log\varepsilon|<\infty$, *то имеет место* (7.3).

Доказательство. Положим $r=(1/2)\log_2 n$. Тогда, учитывая монотонность $H_\xi(\cdot)$ и $\Phi_{-1}(\cdot)$, получаем

$$n^{-1/2}\Phi_{-1}(n)\sum_{i=1}^{m+r} H_\xi(2^{-i})\leqslant\frac{n^{-1/2}\Phi_{-1}(n)\,r2^{m+r}}{\Phi_{-1}\left(2^{2(m+r)}\right)(m+r)}\leqslant 2^m.$$

Следовательно, условие (7.3) выполнено.

В частности, если при всех $x>0$ и некотором $\alpha\in(0,1)$

$$C_1(x\log x)^2\leqslant\Phi(x)\leqslant C_2e^{x^\alpha}$$

и выполнено (7.7), то условия (7.2) и (7.3) будут выполнены.

В [17] для одного класса локально монотонных с. п. получены близкие к приведенным результаты в случае, когда $\Phi(x)=x^p$, $p>2$.

Доказательство теоремы 7.1. Из результатов п. 5 и [14] (см. теорему 1.1) следует, что если для любого $\varepsilon>0$ найдутся такие $m=m(\varepsilon)$ и $n=n(\varepsilon)$, для которых

$$\sup_{n\geqslant n(\varepsilon)}\mathbf{P}^*\left(\omega(2^{-m})\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\varepsilon,$$

то теорема будет доказана. Обозначим

$$\alpha(M)=\mathbf{E}\Phi(\|\xi_1\|^*)I_{\{x:x>M\}}(\|\xi\|^*).$$

Очевидно $\lim\limits_{M\to\infty}\alpha(M)=0$. Теперь имеем

$$\mathbf{P}^*\left(\omega(2^{-m})\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\mathbf{P}^*\left(\omega(2^{-m})\geqslant\varepsilon,\ \ \|\xi_i\|\leqslant\Phi_{-1}(n\psi(n));\ i\leqslant n\right)+$$
$$+\psi^{-1}(n)\,\alpha\left(\Phi_{-1}(n\psi(n))\right), \qquad (7.8)$$

где $\psi(n)$ — положительная функция, стремящаяся с ростом n к нулю настолько медленно, что второе слагаемое правой части (7.8) также стремится к нулю.

Введем срезки с. п. $\xi_i(\cdot)$ по формуле

$$\xi_i^{(M)}(\theta)=\begin{cases}\xi_i(\theta), & \text{если}\quad |\xi_i(\theta)|\leqslant M,\\ M, & \text{если}\quad \xi_i(\theta)>M,\\ -M, & \text{если}\quad \xi_i(\theta)<-M.\end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $\{\xi_i^{(M)}\}$ — тоже Θ_0-регулярные с. п. и для любого $\varepsilon>0$

$$H_{\xi^{(M)}}(\varepsilon)\leqslant H_\xi(\varepsilon). \qquad (7.9)$$

Это есть следствие неравенства

$$\sup_{\theta_1,\theta_2\in U_i(\varepsilon)} |\xi_1^{(M)}(\theta_1)-\xi_1^{(M)}(\theta_2)| \leqslant \sup_{\theta_1,\theta_2\in U_i(\varepsilon)} |\xi_1(\theta_1)-\xi_1(\theta_2)|.$$

Далее положим $M=\Phi_{-1}(n\psi(n))$. Тогда

$$\mathbf{P}^*(\omega(2^{-m})\geqslant\varepsilon,\ \|\xi_i\|\leqslant M;\ i\leqslant n)\leqslant \mathbf{P}^*(\omega^{(M)}(2^{-m})\geqslant\varepsilon-\lambda^{1/2}2^{1-m/2}),$$

где $\omega^{(M)}(\cdot)$ определено в теореме 6.2 для с. п. $\{\xi_i^{(M)}(\cdot)\}$. Опуская элементарные рассуждения, отметим, что для завершения доказательства нужно воспользоваться теоремой 6.2, неравенством (7.9) и условиями (7.2) и (7.3). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 7.2 в точности повторяет предыдущие рассуждения с той лишь разницей, что в конце доказательства нужно воспользоваться теоремой 6.3. Отметим только, что из условия (7.3) (с заменой $H_\xi(\cdot)$ на $H_\xi^{(2)}(\cdot)$) следует оценка $H_\xi^{(2)}(\varepsilon)\leqslant C\varepsilon^{-1}$, т. е.

$$\sum_{i>m}\left(H_\xi^2\ (2^{-i})\right)^{1/2}2^{-i}\leqslant C2^{-m/2}.$$

Напомним также, что в условиях теоремы 7.2 $\lambda=1$.

8. Скорость сходимости в принципе инвариантности для эмпирических процессов

Рассмотрим частный случай схемы, описанной в п. 7. Пусть с. п. $\{\xi_i(\cdot)\}$ заданы следующим образом:

$$\xi_i\equiv\xi_i(f)=f(\zeta_i)-\mathbf{E}f(\zeta_i),\quad f\in\mathscr{L}^2, \tag{8.1}$$

где $\{\zeta_i\}$ — независимые одинаково распределенные с. в. со значениями в произвольном измеримом пространстве $(\Omega,\mathscr{A})$, а $\mathscr{L}^2$ — множество измеримых числовых функций на $(\Omega,\mathscr{A})$, для которых $\mathbf{E}f^2(\zeta_1)<\infty$.

Пусть $\mathscr{D}$ — некоторый подкласс $\mathscr{L}^2$. Предположим, что существует функция $F\in\mathscr{L}^2$, удовлетворяющая для почти всех (относительно распределения с. в. ζ_1) $x\in\Omega$ неравенству

$$\sup_{f\in\mathscr{D}}|f(x)|\leqslant F(x). \tag{8.2}$$

На основании (8.2) заключаем, что в качестве выборочного пространства $\mathfrak{X}$ для с. п. (8.1) можно взять множество всех функционалов, заданных на $\mathscr{L}^2$ и ограниченных на $\mathscr{D}$, с полунормой $\|y(f)\|=\sup\limits_{f\in\mathscr{D}}|y(f)|$.

В качестве L можно взять линейную оболочку множества всех координатных функционалов (см. п. 7). Предельное гауссовское поле $\gamma(\cdot)$ в схеме суммирования с. п. $\{\xi_i\}$ в (8.1) имеет нулевое среднее и ковариацию

$$\mathrm{Cov}_\gamma(\delta_f,\delta_g)=\mathbf{E}f(\zeta_1)g(\zeta_1)-\mathbf{E}f(\zeta_1)\mathbf{E}g(\zeta_1). \tag{8.3}$$

Пусть при любом $\varepsilon>0$ (ε,ξ)-энтропия $H_\xi(\varepsilon)$ множества $\mathscr{D}$ конечна. Например, это будет выполнено (см. п. 6) если при любом $\varepsilon>0$ в $\mathscr{L}^2$ существует конечный набор функций $\{f_i;\ i\leqslant N(\varepsilon)\}$ со следующим свойством: для каждого $f\in\mathscr{D}$ найдутся такие номера $i_1,\ i_2\leqslant N(\varepsilon)$, что (см. [17])

$$f_{i_1}\leqslant f\leqslant f_{i_2}; \tag{8.4}$$

$$\rho(f_{i_1},f_{i_2})\equiv\mathbf{E}\left|f_{i_1}(\zeta_1)-f_{i_2}(\zeta_1)\right|\leqslant\varepsilon. \tag{8.5}$$

В терминологии п. 6 с. п. $\{\xi_i\}$, удовлетворяющие (8.4) и (8.5),— локально монотонные, а функция $H_\xi(\varepsilon)$ для с. п. (8.1) со свойствами (8.4) и (8.5) — двусторонняя метрическая энтропия.

Сумму n независимых с. п. в (8.1) будем называть эмпирическим процессом (с параметрическим множеством $\mathscr{D}$), построенным по выборке $\{\zeta_i;\ i\leqslant n\}$. Если класс $\mathscr{D}$ состоит только из индикаторов некоторого семейства подмножеств из $\mathscr{A}$ (в этом случае $\mathscr{L}^2$ — класс индикаторов всех измеримых подмножеств), то соответствующий процесс принято называть эмпирической мерой (см. [1], [2]).

Если выполнены условия теоремы 7.1, то для последовательности эмпирических процессов имеет место принцип инвариантности, т. е. утверждение вида (7.5). Основная наша цель — получить оценку скорости сходимости в указанном принципе инвариантности.

Для любой функции $f \in \mathscr{L}^2$ положим

$$A_{mr}(f) = \{x \in \Omega: rm^{-1} < f(x) \leqslant (r+1)m^{-1}\}, \quad r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Обозначим также через $n_l\{A_{mr}(f)\}$ число непустых множеств совокупности $\{A_{mr}(f);\ r = 0, \pm 1, \ldots, \pm l\}$.

Теорема 8.1. *Пусть $\{\xi_i\}$ — независимые одинаково распределенные эмпирические процессы, удовлетворяющие условиям (7.2) и (7.4) теоремы 7.1. Предположим, что для некоторого $p > 2$ выполнено $\mathbf{E}F^p(\zeta_1) < \infty$ и*

$$g_p(k) = \sup_{n \geqslant 1} \Big\{ n^{(2-p)/2p} \varphi(n) \sum_{k \leqslant i \leqslant k + (1/2)\log n} H_\xi(2^{-i}) \Big\} < \infty$$

при любом натуральном k, где $\varphi(n)$ — некоторая монотонно неубывающая положительная функция. Тогда процессы $S_n(\cdot)$ и $W_n(\cdot)$ можно так задать на одном вероятностном пространстве, что для любых y, z, l, $m \geqslant 1$

$$\mathbf{P}^*\big(\| S_n - W_n \|_B \geqslant \varepsilon_n^{(p)}(y, z, l, m)\big) \leqslant \alpha_n^{(p)}(y, z, l, m), \tag{8.6}$$

где
$$\alpha_n^{(p)}(y, z, l, m) = C\Big\{ e^{-C_1 y^2} + e^{-C(p) z^2} + n^{-2} + C(p) z^{-p} n^{(2-p)/2} \times$$
$$\times \frac{\mu(p, l/m) + m^{-p}}{(\mu(p, l/m)(l/m)^{2-p} + m^{-2})^{p/2}} + \varphi(n)^{-p/(p+1)} \mu(p, \varphi(n)^{1/(p+1)} n^{1/p}) \Big\},$$
$$\varepsilon_n^{(p)}(y, z, l, m) = C\,\{\beta_n(k, y, p) + z(m^{-2} + \mu(p, l/m)(l/m)^{2-p})^{1/2} +$$
$$+ n^{-1/2}(\log n)^2 (l/m) \max_{|r| \leqslant l;\, j \leqslant N(2^{-k})} h\big(A_{mr}(f_j^{(k)})\big) \max_j n_l\{A_{mr}(f_j^{(k)})\}\Big\},$$
$$\mu(p, b) = \mathbf{E}F(\zeta_1)^p I_{\{x: F(x) > b\}}(\zeta_1),$$

величина $\beta_n(k, y, p)$ определена в лемме 8.4, а $h(\cdot)$ — в лемме 8.3.

Доказательство. Пусть $U_i(2^{-k})$ и $f_i^{(k)} \in U_i(2^{-k})$ определены в п. 6. Для любых натуральных k, l, m, i обозначим

$$f_{lmi}^{(k)}(x) = \sum_{|r| \leqslant l} \frac{r}{m} I_{A_{mr}(f_i^{(k)})}(x).$$

Лемма 8.1. *Для любого положительного $s \leqslant p$*

$$\mathbf{E}\,|f_{lmi}^{(k)}(\zeta_1) - f_i^{(k)}(\zeta_1)|^s \leqslant C(s)(m^{-s} + \mu(p, l/m)(l/m)^{s-p}). \tag{8.7}$$

Доказательство. В самом деле, нетрудно видеть, что

$$\mathbf{E}\,|f_{lmi}^{(k)}(\zeta_1) - f_i^{(k)}(\zeta_1)|^s \leqslant C(s)\big(m^{-s} + \mathbf{E}\,|f_i^{(k)}(\zeta_1) - l/m|^s I_{B^+(m)}(\zeta_1) +$$
$$+ \mathbf{E}\,|f_i^{(k)}(\zeta_1) + l/m|^s I_{B^-(m)}(\zeta_1)\big), \tag{8.8}$$

где
$$B^{\pm}(m) = \{x \in \Omega:\ \pm f_i^{(k)}(x) > l/m\}.$$

Оценим второе слагаемое правой части (8.8):

$$\mathbf{E}\,|f_i^{(k)}(\zeta_1) - l/m|^s I_{B^+(m)}(\zeta_1) \leqslant (l/m)^{s-p}\,\mathbf{E}\,|f_i^{(k)}(\zeta_1)|\, I_{B^+(m)}(\zeta_1) \leqslant$$
$$\leqslant (l/m)^{s-p} \mu(p, l/m). \tag{8.9}$$

Точно так же оценивается и последнее слагаемое в (8.8), откуда следует (8.7). Лемма доказана.

Лемма 8.2. *Для любых натуральных m, l и k существует дискретная с. в. $\zeta_1^{(N)}$, определенная на одном вероятностном пространстве со с. в. ζ_1 и удовлетворяющая тождеству $f_{lmi}^{(k)}(\zeta_1^{(N)}) = f_{lmi}^{(k)}(\zeta_1)$ при всех $i \leqslant N(2^{-k})$.*

Доказательство. Рассмотрим конечную систему множеств

$$\mathfrak{R}_l = \{A_{mr}(f_i^{(k)});\ i \leqslant N(2^{-k}),\quad r = 0, \pm 1, \ldots, \pm l\}.$$

Пусть $\{B_j;\ j \leqslant N\}$ — минимальная система попарно несовместных подмножеств, порождающих все элементы $\mathfrak{R}_l$. Из каждого непустого подмножества B_j выберем по одной точке b_j и определим с. в. $\zeta_1^{(N)}$:

$$\zeta_1^{(N)} = \sum_{j \leqslant N} b_j I_{B_j}(\zeta_1). \tag{8.10}$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Можно показать (см. [2]), что число N атомов дискретного распределения $\zeta_1^{(N)}$ удовлетворяет неравенству

$$N \leqslant \exp\left\{\sum_i n_l\{A_{mr}(f_i^{(k)})\}\right\} \leqslant \exp\{2lN(2^{-k})\}.$$

Будем говорить, что множество A содержит r цепочек атомов распределения с. в. $\zeta_1^{(N)}$, если существуют натуральные числа $k_1 < k_2 < \ldots < k_{2r-1} < k_{2r}$, для которых

$$A \cap \{b_j;\ j \leqslant N\} = \bigcup_{s \leqslant r} \{b_j;\ k_{2s-1} \leqslant j \leqslant k_{2s}\}. \tag{8.11}$$

Иначе говоря, цепочкой атомов в A называется подмножество из $\{b_j\} \cap A$, элементы которого занумерованы натуральными числами в порядке возрастания без пропусков. Обозначим через $h(A)$ число цепочек атомов $\{b_j\}$ в A. Очевидно, что $h(A)$ существенно зависит от порядка нумерации атомов $\{b_j\}$, и для любого A выполнено неравенство $h(A) \leqslant N$.

Лемма 8.3. *Существует такая нумерация атомов $\{b_j\}$, что для любого $A \in \mathfrak{R}_l$*

$$h(A) \leqslant \mathrm{CN}(\log N)^{-1}.$$

Дальнейшие рассуждения в значительной мере опираются на теорему 5.1. Чтобы не вводить новых обозначений, условимся, что $U_j(\varepsilon) \cap U_i(\varepsilon) = \varnothing$ при $i \neq j$. Обозначим

$$\xi_i^{(N)} \equiv \xi_i^{(N)}(f) = \sum_j \left(f_{lmj}^{(k)}(\zeta_i^{(N)}) - \mathbf{E} f_{lmj}^{(k)}(\zeta_i^{(N)})\right) I_{U_j(2^{-k})}(f),$$

где $\{\zeta_i^{(N)}\}$ определены в (8.10) по последовательности $\{\zeta_i\}$. Очевидно, с. в. $\xi_1^{(N)}$ имеет дискретное распределение с атомами

$$x_{Ni} \equiv x_{Ni}(f) = \sum_j \left(f_{lmj}^{(k)}(b_i) - \mathbf{E} f_{lmj}^{(k)}(\zeta_1)\right) I_{U_j(2^{-k})}(f). \tag{8.12}$$

Пусть атомы $\{b_i\}$ (а значит, и x_{Ni}) занумерованы по правилу, указанному в лемме 8.3. Тогда из (8.12) получаем

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} |x_{Ni+1} - x_{Ni}| &\leqslant \sum_j I_{U_j(2^{-k})}(f) \sum_{i=1}^{N} |f_{lmj}^{(k)}(b_{i+1}) - f_{lmj}^{(k)}(b_i)| \leqslant \\ &\leqslant \max_j \sum_{|r| \leqslant l} \frac{r}{m} \sum_{i=1}^{N} \left| I_{A_{mr}(f_j^{(k)})}(b_{i+1}) - I_{A_{mr}(f_j^{(k)})}(b_i)\right| \leqslant \\ &\leqslant (l/m) \max_{|r| \leqslant l,\, j \leqslant N(2^{-k})} h(A_{mr}(f_j^{(k)})) \max_j n_l\{A_{mr}(f_j^{(k)})\}.\end{aligned} \tag{8.13}$$

Из (8.13) следует оценка (см. обозначения в п. 5)

$$\Delta_n\left(C\log n,\ \varphi_N\right)\leqslant Cn^{-1/2}(\log n)\,(l/m)\max_{|r|\leqslant l;\,j\leqslant N(2-k)} h\left(A_{mr}\left(f_j^{(k)}\right)\right)\times$$
$$\times\max_j n_l\left\{A_{mr}\left(f_j^{(k)}\right)\right\}.$$

Введем следующие обозначения:

$$\xi_i'\equiv\xi_i'(f)=\sum_j\left(f_j^{(k)}(\zeta_i)-\mathbf{E}f_j^{(k)}(\zeta_i)\right)I_{U_j(2-k)}(f);$$

$S_n'(t)$ — случайная ломаная, построенная по последовательности $\{\xi_i'\}$ (см. (4.1)); $W_n'(t)$ — гауссовский процесс (4.1), построенный по последовательности независимых гауссовских полей $\gamma_i'(f)=\gamma_i\left(\sum_j f_j^{(k)}I_{U_j(2-k)}(f)\right)$, где независимые с. п. $\{\gamma_i\}$ определены в (8.3).

Лемма 8.4. *Для любого* $y\geqslant 0$

$$\mathbf{P}^*\left(\|S_n-S_n'\|_B>C\beta_n(K,y,p)\right)\leqslant C\mathrm{e}^{-y^2}+\varphi(n)^{-p/(1+p)}\mu\left(p,\ \varphi(n)^{1/(1+p)}n^{1/p}\right),$$

где

$$\beta_n(k,y,p)=\varphi(n)^{1/(p+1)}n^{(2-p)/2p}(\log n)^2(y^2+1)+\varphi(n)^{-p/(p+1)}g_p(k)+$$
$$+\lambda^{1/2}\sum_{i\geqslant k}\left(H_\xi\left(2^{-i}\right)2^{-i}\right)^{1/2}+\lambda^{1/2}2^{-k/2}(y+1).$$

Доказательство следует из теоремы 6.2 с использованием срезок с. п. $\xi_i(\cdot)$ на уровне $M=\varphi(n)^{1/(p+1)}n^{1/p}$ (см. доказательство теоремы 7.1).

Следующее утверждение доказывается для ρ-сепарабельных гауссовских с. п.

Лемма 8.5. *Для любого* $y>0$

$$\mathbf{P}^*\left(\|W_n-W_n'\|_B>C\lambda^{1/2}\left(\sum_{i\geqslant k}\left(H_\xi\left(2^{-i}\right)2^{-i}\right)^{1/2}+y2^{-k/2}\right)\right)\leqslant \mathrm{e}^{-y^2k}\left(1-\mathrm{e}^{-y}\right)^{-1}. \tag{8.14}$$

Доказательство вполне аналогично рассуждениям при оценке модуля непрерывности гауссовских полей в R^d (см. [18]). Так же как при доказательстве теоремы 6.2, имеем

$$J_1\equiv\mathbf{P}^*\left(\|W_n-W_n'\|_B>\sum_{i\geqslant k}y_i2^{-i/2}\right)\leqslant 2\sum_{i\geqslant k}N\left(2^{-i}\right)\times$$
$$\times\sup_{f,g:\rho(f,g)<2^{-i}}\mathbf{P}\left(\max_{s\leqslant n}n^{-1/2}\left|\sum_{j=1}^{s}\left(\gamma_j(f)-\gamma_j(g)\right)\right|>y_i2^{-i/2}\right). \tag{8.15}$$

Положим в (8.15) $y_i=(8\lambda\max\{y^2i,\ H_\xi(2^{-i})\})^{1/2}$. Тогда, применяя к вероятностям под знаком суммы в (8.15) неравенство Леви и принимая во внимание элементарные оценки

$$\mathbf{E}(\gamma_j(f)-\gamma_j(g))^2\leqslant 2\lambda\rho(f,g),$$
$$\mathbf{P}\left(|\gamma(f)-\gamma(g)|>y\,(2\lambda\rho(f,g))^{1/2}\right)\leqslant 2\mathrm{e}^{-y^2/2},$$

получаем (8.14). Лемма доказана.

Обозначим

$$\gamma_i^{(N)}\equiv\gamma_i^{(N)}(f)=\gamma_i\left(\sum_j f_{lmj}^{(k)}I_{U_j(2-k)}(f)\right),$$

т. е. $\gamma_i^{(N)}$ — гауссовское поле с нулевым средним и такой же ковариацией, как и у с. п. $\xi_i^{(N)}$. По последовательности $\{\gamma_i^{(N)}\}$ построим случайную ломаную $W_n^{(N)}(t)$.

Лемма 8.6. *Для любого* $z\geqslant 0$

$$\mathbf{P}^*\left(\|W_n^{(N)}-W_n'\|_B>Cz\left(m^{-2}+\mu(p,\ l/m)\,(l/m)^{2-p}\right)^{1/2}\right)\leqslant 4\mathrm{e}^{-z^2/2}. \tag{8.16}$$

Неравенство (8.16) следует из соотношений

$$\| W_n^{(N)} - W_n' \|_B = \max_{s<n} \max_{j<N(2^{-k})} \left| n^{-1/2} \sum_{i=1}^{s} \left(\gamma_i \left(f_{lmj}^{(k)} \right) - \gamma_i \left(f_j^{(k)} \right) \right) \right|, \quad (8.17)$$

$$\mathbf{D}(\gamma(f) - \gamma(g)) = \mathbf{D}(f(\zeta_1) - g(\zeta_1)) \leqslant \mathbf{E}(f(\zeta_1) - g(\zeta_1))^2,$$

леммы 8.1 и неравенства Леви для хвоста распределения максимальной суммы независимых симметричных с. в.

Лемма 8.7. *Для любого* $z > 0$

$$\mathbf{P}^* \left(\| S_n^{(N)} - S_n' \|_B > Cz \left(m^{-2} + \mu(p, l/m) (l/m)^{2-p} \right)^{1/2} \right) \leqslant$$

$$\leqslant C(p)\, z^{-p} n^{(2-p)/2} \frac{\mu(p, l/m) + m^{-p}}{\left(\mu(p, l/m)(l/m)^{2-p} + m^{-2} \right)^{p/2}} + 2e^{-C_1(p) z^2}. \quad (8.18)$$

Оценка (8.18) следует из представления, аналогичного (8.17), леммы 8.1 и неравенств Нагаева — Фука ([19], [20]). Утверждение теоремы следует из лемм 8.4—8.7 и теоремы 5.1.

В качестве следствия теоремы 8.1 получаем оценку скорости сходимости в принципе инвариантности для эмпирических мер.

Теорема 8.2. *Пусть эмпирический процесс* (8.1) *задан на множестве индикаторов всех подмножеств из* $\mathscr{A}$. *Пусть* $\mathscr{D} = \{ I_A(\cdot);\ A \in \mathscr{B} \}$, *где* $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$. *Предположим, что двусторонняя метрическая энтропия множества* $\mathscr{D}$ (*см.* (6.4)) *удовлетворяет условию* (7.2). *Тогда при любом* n *можно так задать случайные процессы* $S_n(\cdot)$ *и* $W_n(\cdot)$ *на одном вероятностном пространстве, что*

$$\mathbf{P}^* \left(\| S_n - W_n \|_B > \varepsilon(n, y) \right) \leqslant C_1 e^{-y^2} + C_2 n^{-2},$$

где

$$\varepsilon(n, y) \doteq C \inf_{k>1} \Big\{ n^{-1/2} (\log n)^2 \max_{j \leqslant N(2^{-k})} h\left(A_j^{(k)} \right) +$$

$$+ \sum_{i \geqslant k} \left(H_\xi(2^{-i})\, 2^{-i} \right)^{1/2} + y^2 n^{-1/2} \log n + (y+1)\, 2^{-k/2} \Big\}, \quad (8.19)$$

$A_j^{(k)}$ — *носитель индикатора* $f_j^{(k)}$.

Для доказательства (8.19) положим в (8.6) $l = m$, $z = m^{1/2}$, $p = n$, $\varphi(n) \equiv 1$. При этом необходимо учесть, что в рассматриваемом частном случае (см. (7.6)) $\mu(p, 1) \equiv 0$, $\max\limits_j n_l \{ A_{mr} (f_j^{(k)}) \} = 2$, $g_n(k) \leqslant \leqslant C \sum\limits_{i \geqslant k} \left(H_\xi(2^{-i})\, 2^{-i} \right)^{1/2}$. Выбирая $m = m(n)$ достаточно большим, получаем (8.19).

Например, пусть при $\tau \in (0, 1)$ $h(A_j^{(k)}) \leqslant N(2^{(-k)})^{c_0}$ и

$$H_\xi(\varepsilon) \leqslant C \varepsilon^{-\tau}. \quad (8.20)$$

Очевидно, в этом случае условие (7.3) выполнено. Положим $k = \tau^{-1} \log_2 (\log (n^{1/2} (\log n)^{-\alpha(\tau)}))$, где $\alpha(\tau) = 2 + (1 - \tau)(2\tau)^{-1}$. Тогда из (8.20) и леммы 8.3 следует

$$n^{-1/2} (\log n)^2 \max_j h\left(A_j^{(k)} \right) \leqslant C n^{-1/2} (\log n)^2 \exp\{ C_0 C 2^{\tau k} \} \leqslant C(\tau) \log n)^{(\tau-1)/2\tau}. \quad (8.21)$$

Кроме того,

$$\sum_{i \geqslant k} \left(H_\xi(2^{-i})\, 2^{-i} \right)^{1/2} \leqslant C 2^{(\tau-1)k/2} \leqslant C(\tau) (\log n)^{(\tau-1)/2\tau}; \quad (8.22)$$

$$2^{-k/2} \leqslant C(\tau) (\log n)^{-1/2\tau}. \quad (8.23)$$

Полагая $y = (\log n)^\beta$, где $\beta = \beta(\tau)$ достаточно мало́, получаем из (8.19)—(8.23) близкий к [14] результат.

В заключение отметим, что теорема 8.3 позволяет получать оценки скорости сходимости и в том случае, когда вместо (8.20) выполнено более слабое условие $H_\xi(\varepsilon)\leqslant C\varepsilon^{-1}\varphi^2(\varepsilon)$, где функция $\varphi(\varepsilon)$ при $\varepsilon\to+0$ убывает медленнее ε^a при любом $a>0$, и

$$\sum\varphi(2^{-i})<\infty. \tag{8.24}$$

При этом величина $\varepsilon(n, y)$ в (8.19) будет убывать с ростом n тем медленнее, чем медленнее убывает (с сохранением (8.24)) функция $\varphi(\cdot)$. Важно отметить, что такое ухудшение оценки объясняется не издержками метода, поскольку и нижние оценки скорости сходимости могут быть сколь угодно плохими в зависимости от величины энтропии (см. [2]). Если $\varphi(\cdot)$ убывает настолько медленно, что (8.24) не выполнено, то соответствующей гауссовской аппроксимации последовательности эмпирических мер может и не быть (см. [16]).

Несмотря на то, что в рассматриваемой общности приведения в лемме 8.3, оценка величины $h(A)$ неулучшаемая, во многих конкретных задачах она становится слишком грубой. В зависимости от тех или иных условий $h(A)$ можно оценить значительно точнее (подробнее см. [2]), получая при этом существенно более точные оценки скорости сходимости в принципе инвариантности для эмпирических процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Dudley R. M.** Central limit theorems for empirical measures.— Ann. Probab., 1978, v. 6, N 6, p. 899—929.
2. **Борисов И. С.** О скорости сходимости в центральной предельной теореме для эмпирических мер.— В кн.: Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. Новосибирск: Наука, 1984, с. 125—143.
3. **Иосида К.** Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 624 с.
4. **Булдыгин В. В.** Сходимость случайных элементов в топологических пространствах. Киев: Наукова думка, 1980. 240 с.
5. **Araujo A., Gine E.** The central limit theorem for real and Banach valued random variables. N. Y.: John Wiley and Sons, Inc., 1980, p. 233.
6. **Komlos J., Major P., Tusnady G.** An approximation of partial sums of independent RV'-s and sample DF.I.— Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 1975, B. 32, H. 1/2, S. 111—133.
7. **Yurinskiĭ V. V.** Exponential inequalities for sums of random vectors.— J. Multivar. Anal., 1976, v. 6, N 4, p. 473—499.
8. **Скороход А. В.** Замечание о гауссовских мерах в банаховых пространствах.— Теория вероятн. и ее примен., 1970, т. XV, № 3, с. 519—520.
9. **Borisov I. S.** Rate of convergence in invariance principle in linear spaces. Application to empirical measures.— Lecture Notes in Mathematics, 1983, v. 1021, p. 45—58.
10. **Борисов И. С.** К вопросу о скорости сходимости в принципе инвариантности Донскера — Прохорова.— Теория вероятн. и ее примен., 1983, т. XXVIII, № 2, с. 367—371.
11. **Komlos J., Major P., Tusnady G.** An approximation of partial sums of independent RV'-s and sample DF. II.— Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 1976, B. 34, H. 1, S. 33—58.
12. **Major P.** The approximation of partial sums of independent RV'-s.— Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 1976, B. 35, H. 3, S. 213—220.
13. **Major P.** Approximation of partial sums of i. i. d. r. v-s when the summands have only two moments.— Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 1976, B. 35, H. 3, S. 221—229.
14. **Dudley R. M., Philipp W.** Invariance principles for sums of Banach space valued random elements and empirical processes.— Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 1983, B. 62, H. 4, S. 509—552.
15. **Dudley R. M.** Empirical and Poisson processes on classes of sets or functions too large for central limit theorems.— Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 1982, B. 61, H. 3, S. 355—368.
16. **Борисов И. С.** К вопросу о точности приближения в центральной предельной теореме для эмпирических мер.— Сиб. мат. журн., 1983, т. XXIV, № 6, с. 14—25.
17. **Dudley R. M.** Donsker classes of functions, Statistics and Related Topics.— In: Proceedings Symposium on Probability Theory. Ottawa, 1980.— N. Y.— Amsterdam: North-Holland, 1981, p. 341—352.
18. **Ферник К.** Регулярность траекторий гауссовских случайных функций.— В кн.: Случайные процессы. Выборочные функции и пересечения. М.: Мир, 1978, с. 63—132.

19. **Фук Д. Х., Нагаев С. В.** Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин.— Теория вероятн. и ее примен., 1971, т. XVI, № 4, с. 660—675.
20. **Боровков А. А.** Замечание о неравенствах для сумм независимых случайных величин.— Теория вероятн. и ее примен., 1972, т. XVII, № 3, с. 587—589.

Поступила в редколлегию 31 января 1984 г.

ОЦЕНКИ В ПРИНЦИПЕ ИНВАРИАНТНОСТИ

А. И. САХАНЕНКО

1. Введение

В настоящее время имеется несколько направлений исследований, объединенных общим названием «изучение скорости сходимости в принципе инвариантности». Главными из них следует считать «принцип инвариантности в форме Штрассена» и «классический принцип инвариантности Донскера — Прохорова». Более подробно каждое из двух указанных направлений рассмотрено в пп. 7—9. Общей чертой этих задач является наличие следующей трудности. Требуется последовательности независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots$ с известными распределениями задать на одном вероятностном пространстве таким образом, чтобы значение

$$\mathbf{P}\left(\Delta \equiv \sup_n \Big|\sum_{j\leqslant n} \xi_j - \sum_{j\leqslant n} \eta_j\Big| > x\right)$$

при некотором x было достаточно мало́.

Решение этой задачи при существовании у случайных величин экспоненциальных моментов найдено в [1] (см. теорему 1 в п. 2). Данная работа посвящена получению следствий из указанного результата в различных направлениях. Так, если известно поведение характеристик вида $\max\limits_{j\leqslant n} \mathbf{M}H(\xi_j)/\mathbf{D}\xi_j$ и $B_n^2 = \sum\limits_{i\leqslant n} \mathbf{D}\xi_j$, то удобно использовать теоремы 1, 7 и их следствия. Остальные результаты предполагают ограничения на суммы типа $\sum\limits_{j\leqslant n} \mathbf{M}H(\xi_j)$. В этой связи нужно отметить теоремы 2 и 5, в последней из которых получена оценка

$$\mathbf{M}\Delta^\alpha \leqslant C\alpha^{2\alpha} \sum \mathbf{M}|\xi_j|^\alpha \quad \forall \alpha \geqslant 2.$$

Несколько слов об обозначениях. Нумерация теорем, следствий и замечаний в работе общая. Леммы и формулы нумеруются в каждом пункте независимо, ссылки на них из других пунктов не допускаются. Знак □ обозначает конец доказательства. Буквы C и c (с индексами или без них) заменяют абсолютные постоянные, одни и те же в пределах нескольких абзацев. Когда соответствующие постоянные не абсолютны, употребляются символы O и K. Упрощенные обозначения Σ и Π используются только в том случае, когда сумма или произведение берется по переменной j, пробегающей значения от 1 до ∞.

2. Постановка основной задачи и ключевые результаты

Пусть $F_1(\cdot)$, $F_2(\cdot)$, ...— последовательность функций распределения, а $\eta_1, \eta_2, \ldots$— независимые случайные величины, имеющие нормальные распределения. Нас интересует вопрос: *можно ли построить независимые случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ с функциями распределения $F_1(\cdot)$, $F_2(\cdot)$, ... соответственно, причем таким образом, чтобы величина*

$$\Delta = \sup_n \Big|\sum_{j\leqslant n} \xi_j - \sum_{j\leqslant n} \eta_j\Big| \tag{1}$$

удовлетворяла некоторым условиям малости. Эта задача является основной при получении оценок в принципе инвариантности. В такой поста-