С. Кузнецов, Еще раз о полуправильных многогранниках, *Квант*, 2019, номер 3, 29–31

DOI: 10.4213/kvant20190304

Еще раз о полуправильных многогранниках

С.КУЗНЕЦОВ

В «КАЛЕЙДОСКОПЕ «КВАНТА» В №11 ЗА 2018 год мы рассказывали о полуправильных многогранниках, т.е. выпуклых многогранниках, грани которых суть правильные многоугольники и все вершины устроены одинаковым образом. Была приведена полная классификация таких многогранников: две бесконечные серии – призмы и антипризмы, пять правильных многогранников (платоновых тел: икосаэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр) и еще 14 многогранников, традиционно называемых архимедовыми. Полуправильный многогранник определяется *типом вершины*: информацией, какие многоугольники сходятся к ней и в каком порядке. Например, $(3,4,4)$, т.е. «треугольник–квадрат–квадрат» – это треугольная призма. При этом одному из типов вершин, а именно $(3,4,4,4)$, отвечают сразу два многогранника: ромбокубооктаэдр и псевдоромбокубооктаэдр.

Псевдоромбокубооктаэдр стоит среди полуправильных многогранников особняком – и дело не только в том, что его открыли в XX веке, в то время как остальные были известны еще древним грекам. В отличие от других полуправильных, этот многогранник не обладает глобальной симметрией, или свойством транзитивности: хоть любые две его вершины и устроены одинаковым образом, не всегда их можно совместить движением, переводящим многогранник в себя. Из-за этого псевдоромбокубооктаэдр не всегда относят к архимедовым телам, и тогда последних остается 13.

Наш постоянный читатель О.Лазутченко задал следующий интересный вопрос. Псевдоромбокубооктаэдр получается из обычного ромбокубооктаэдра поворотом «шапочки» (рис.1). Эта «шапочка» называется *n-скатным куполом*, где n – число сторон ее верхней грани. А что будет, если повернуть «шапочку» у другого полуправильного многогранника – ромбоикосододекаэдра (рис.2)? Результат немного разочаровывает: получившийся многогранник еще дальше от «правильности», чем полуправильные. У него по-прежнему к каждой вершине сходятся четыре правильных многоугольника – треугольник, два квадрата и пятиугольник, но в разном порядке. У некоторых вершин порядок остался $(3,4,5,4)$, а у других стал $(3,4,4,5)$. Однако почему бы не рассмотреть полуправильные многогранники *в слабом смысле*: потребовать, чтобы к каждой вер-

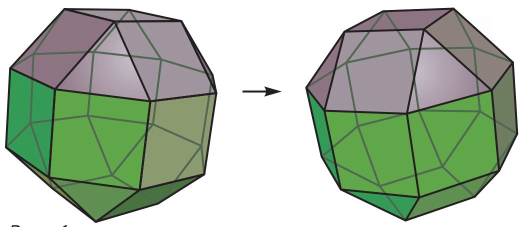

Рис. 1

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190304

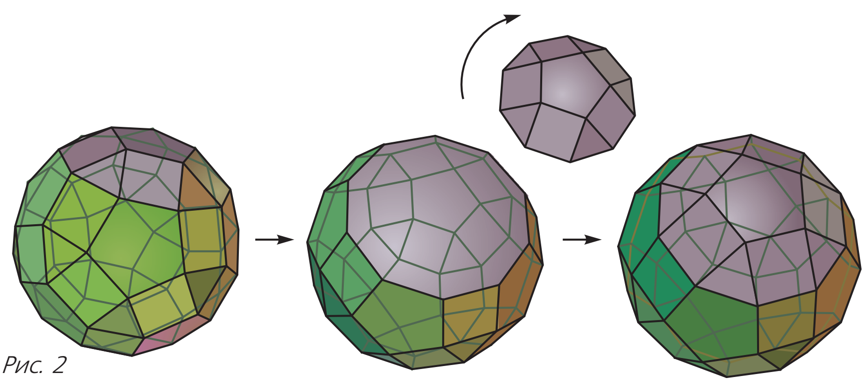

Рис. 2

шине сходился одинаковый набор многоугольников, но в произвольном порядке?

Давайте попробуем перечислить все многогранники, полуправильные в слабом смысле. Воодушевляет на такое исследование следующий более общий факт. Отбросим любые условия на вершины и потребуем только, чтобы у многогранника все грани были правильными многоугольниками – все равно, кроме призм и антипризм, получится конечное число разных многогранников! Такие многогранники называются *правильногранными*. Полная классификация правильногранных многогранников приведена в статье В.А.Залгаллера «Выпуклые многогранники с правильными гранями» (Записки научных семинаров ЛОМИ, №2, 1967, с.5–221). Статья Залгаллера доступна по адресу http://mi.mathnet.ru/znsl1408 – несмотря на ее большой объем и сложность, мы очень советуем читателю ознакомиться с ней.

Семейство правильногранных многогранников включает в себя пять платоновых тел, 13 архимедовых плюс псевдоромбокубооктаэдр, бесконечные серии призм и антипризм, а также еще 91 многогранник. Эти последние многогранники называются *джонсоновыми телами* по имени автора статьи, в которой они впервые все были перечислены: N.W.Johnson. Convex polyhedra with regular faces (Canadian Journal of Mathematics, vol.18, 1966, p.169–200, https://doi.org/10.4153/CJM-1966-021-8). Псевдоромбокубооктаэдр также относится к джонсоновым телам, если его не причислять к архимедовым; тогда джонсоновых тел становится 92. В своей работе Н.Джонсон приводит перечень всех джонсоновых тел, но не доказывает, что других не бывает (это сделал в упомянутой выше статье В.А.Залгаллер).

Нас интересуют полуправильные в слабом смысле многогранники, не являющиеся таковыми в сильном смысле. Ясно, что все они суть джонсоновы тела. Значит, нам достаточно перебрать все джонсоновы тела и отобрать среди них те, у которых в каждой вершине сходятся одни и те же многогранники. Особенно удобно делать это по статье Джонсона, где для каждого многогранника указаны типы его вершин, т.е. какие многоугольники и в каком количестве сходятся в каждую вершину.

Наш перебор дает 6 новых правильногранных многогранников, у которых в каждой вершине сходятся те же многоугольники, но в разном порядке. Интересно, что все они получаются из архимедовых многогранников с помощью операции «поворота шапочки», описанной в начале статьи. Перечислим эти шесть многогранников.

Во-первых, поворотом купола у ромбоикосододекаэдра, как предложил нам О.Лазутченко, можно получить целых четыре многогранника (у Джонсона они имеют номера 72–75). Многогранников получилось несколько, потому что можно повернуть не один, а два или даже три купола. Надобно только следить, чтобы эти купола не имели общих граней: при повороте купол «ломает» все смежные с ним купола. Если повернуть один купол, то получится *скрученный ромбоикосододекаэдр* (рис.3). Два купола можно повернуть двумя способами – либо один напротив другого, и тогда получится *дважды противоположно скрученный ромбоикосододекаэдр* (рис.4); либо два непротиволежащих, что дает *дважды косо скрученный ромбоикосододекаэдр* (рис.5). Наконец, три непересекающихся купола можно выбрать только одним способом; повернув их, получим *трижды скрученный ромбоикосододекаэдр* (рис.6). По Залгаллеру, скрученные версии ромбоикосододекаэдра обозначаются так: $\overline{M}_6 + M_{14} + M_6$ или $\overline{M}_6 + M_{13} + 2M_6$; $\overline{M}_6 + M_{14} + \overline{M}_6$; $2\overline{M}_6 + M_{13} + M_6$; $3\overline{M}_6 + M_{13}$.

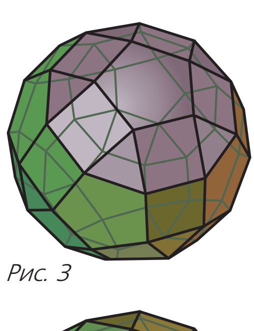
Рис. 3

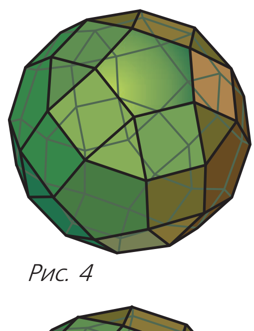
Рис. 4

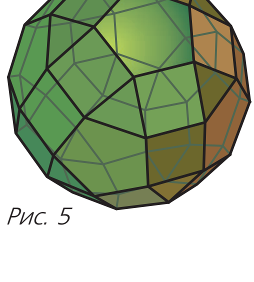
Рис. 5

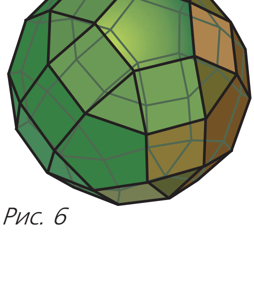
Рис. 6

(Через $М_i$ Залгаллер обозначает *простые* правильногранные многогранники, которые нельзя составить из нескольких правильногранных многогранников; остальные правильногранные многогранники получаются в виде «сумм» простых, при этом черта означает перекручивание. Видно, что $М_6$ – это как раз и есть «шапочка», пятискатный купол.)

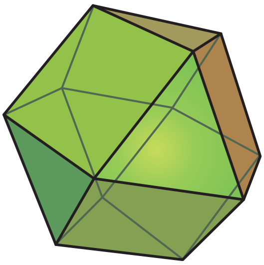
Рис. 7

Во-вторых, заметим, что кубооктаэдр (рис.7) складывается из двух трехскатных куполов, причем повернутых друг относительно друга так, что треугольные грани верхнего купола смежны с квадратными гранями нижнего и наоборот. Это объясняет другое название кубооктаэдра – *трехскатный повернутый бикупол* (или *трехскатный гиробикупол*: приставка «гиро», греческого происхождения, означает «повернутый»).

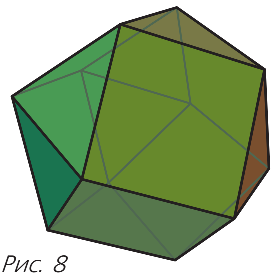
Рис. 8

Если развернуть один из куполов так, что квадраты будут смежны с квадратами, а треугольники с треугольниками, получится еще одно полуправильное в слабом смысле тело – *трехскатный прямой бикупол* (рис. 8; №27 по Джонсону, по Залгаллеру $2М_4$).

В-третьих, еще один многогранник можно получить поворотом из икосододекаэдра (рис.9), повернув одну его половину.

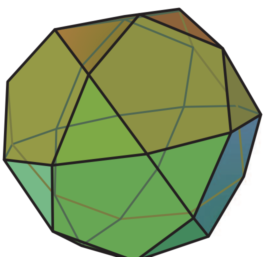
Рис. 9

В отличие от предыдущих случаев, здесь поворачивается не купол, а более сложная конструкция, называемая *ротондой* (рис.10). Получается полуправильный в слабом смысле многогранник, называемый *пятискатной прямой биротондой* (рис.11, №34 по Джонсону, по Залгаллеру

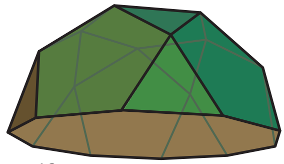
Рис. 10

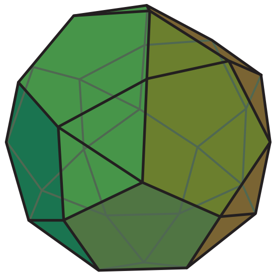
Рис. 11

$2М_9$). Сам икосододекаэдр можно назвать *пятискатной гиробиротондой*.

Наконец, не считая псевдоромбокубооктаэдр полноправным архимедовым телом, Джонсон и Залгаллер также приводят его в числе джонсоновых (№37 у Джонсона, $М_5 + П_8 + \overline{М}_5$ у Залгаллера) под именем *удлиненный четырехскатный повернутый бикупол* («удлиненный» – потому что в середине между двумя куполами вставлена призма).

Таким образом, мы получили следующую классификацию правильногранных многогранников по мере их «удаления от правильности»:

- все грани и все вершины одинаковые – 5 платоновых тел (правильных многогранников);
- все вершины одинаковы и совмещаются симметрией многогранника – добавляется еще 13 архимедовых тел и две бесконечные серии призм и антипризм;
- все вершины одинаковы, но не обязательно совмещаются симметрией – добавляется еще псевдоромбокубооктаэдр;
- в каждой вершине сходится тот же набор многоугольников, но не обязательно в том же порядке – добавляются еще 6 многогранников, полученных из полуправильных посредством перекручивания;
- нет условий на вершины – добавляются оставшиеся 85 джонсоновых тел.

Всего правильногранных многогранников, не считая призм и антипризм, получается 5 + 13 + 1 + 6 + 85 = 110 видов.