УДК 514.75+51(092)

ОБЗОР НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ВЯЧЕСЛАВА ТИМОФЕЕВИЧА БАЗЫЛЕВА

М. А. Акивис, В. А. Тихонов

В настоящее время теория многомерных сетей на гладких многообразиях является важной главой дифференциальной геометрии пространств различной структуры. Многочисленными исследователями строятся обобщения классической теории двумерных сетей и даются новые способы определения сетей, учитывающие специфику многомерной геометрии.

Теория многомерных сетей глубоко проникла в другие разделы современной геометрии: геометрию многообразий фигур, линейчатую дифференциальную геометрию, геометрию дифференцируемых отображений пространств, теорию дифференциально-геометрических структур. Существенную роль она играет и в вопросах преобразований многомерных поверхностей.

С развитием теории распределений на дифференцируемых многообразиях естественным образом возникла потребность изучения сетей, принадлежащих распределениям. Аналогия между геометрией распределений и геометрией многомерных поверхностей позволяет перенести многие свойства сетей на поверхностях на сети, принадлежащие распределениям. Но особенности геометрии распределений обогащают теорию многомерных сетей новыми геометрическими результатами. Поэтому теория распределений на гладких многообразиях стимулировала новый подход к задачам дифференциальной геометрии многомерных сетей.

Некоторые специальные типы многомерных сетей изучались Э. Картаном, Чжень Шиншенем и другими геометрами. Но лишь в работах В. Т. Базылева, его учеников и сотрудников теория многомерных сетей получила широкое и общее развитие. В. Т. Базылевым была создана проективная теория многомерных сетей общего вида, изучены сети на гладких многообразиях евклидова и аффинного пространств, а также пространства аффинной связности. Теория сетей связывалась В. Т. Базылевым с теорией дифференцируемых отображений гладких многообразий. Им было введено понятие графика отображения и изучены графики отображений различных типов. Работы В. Т. Базылева по теории многомерных сетей, а также по теории точечных отображений представляют собой ценный вклад в современную дифференциальную геометрию и имеют большое значение для ее дальнейшего развития.

Вячеслав Тимофеевич Базылев (15.03.1919—5.01.1989) родился в деревне Путятино Смоленской области в многодетной крестьянской семье. Он был в ней самым младшим, одиннадцатым ребенком. Отец его был деревенским портным, мать занималась хозяйством. В доме отца имелись книги, старшие дети учились, и В. Т. Базылев рано пристрастился к чтению. Любовь к литературе сохранилась у него на всю жизнь. В деревне В. Т. Базылев окончил семилетнюю школу. В 1934 году, после смерти матери, он приехал в Москву, где жили его старшие братья, и поступил учиться в Московский педагогический техникум. В техникуме были замечены математические способности В. Т. Базылева, поэтому после окончания техникума в 1937 году он был направлен на математический факультет Московского городского педагогического института им. В. П. Потемкина. Учился он успешно и получал именную государственную стипендию. Начал свою научную деятельность с исследований по теории функций.

В 1941 году В. Т. Базылев с отличием окончил институт.

Началась Великая Отечественная война. В. Т. Базылев был призван на военную службу. С августа 1941 года и по декабрь 1945 года он находился в Советской армии в войсках ПВО, участвовал в боях в Подмосковье и Прибалтике, был награжден медалями «За оборону Москвы», «За боевые заслуги», «За победу над Германией», а впоследствии — орденом Отечественной войны. После демобилизации из армии в декабре 1945 года В. Т. Базылев начал свой педагогический путь работой на подготовительных курсах Московского энергетического института. Но уже в сентябре 1946 года он — ассистент кафедры геометрии Московского городского пединститута им. В. П. Потемкина. Этой кафедрой заведовал в то время профессор С. П. Фиников, он и заинтересовал молодого ассистента научной работой по дифференциальной геометрии.

В конце сороковых — начале пятидесятых годов С. П. Фиников занимается изучением проективно-дифференциальной геометрии и привлекает к этой работе своих учеников. Он руководит научно-исследовательскими семинарами по дифференциальной геометрии в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова и Московском городском пединституте им. В. П. Потемкина, в работе этих семинаров активное участие принимает В. Т. Базылев. Его первые работы посвящены изучению квазилапласовых преобразований многомерных многообразий проективного пространства P_n. Эта же тема становится предметом его кандидатской диссертации, которая была им успешно защищена в 1953 году. Заметим, что В. Т. Базылев не состоял в аспирантуре, а написал свою диссертацию, работая ассистентом на кафедре геометрии. Кандидатские экзамены он сдавал уже после того, как им была написана диссертация. В 1956 году В. Т. Базылеву было присвоено звание доцента.

В Московском городском пединституте им. В. П. Потемкина В. Т. Базылев работал вплоть до слияния этого института в 1960 году с Московским государственным педагогическим институтом им. В. И. Ленина. Затем он переходит на работу на кафедру математической физики МГПИ им. В. И. Ленина и преподает на ней до 1968 года. Кроме геометрических курсов, он читает также математический анализ, высшую алгебру, теоретическую механику. В 1969 году В. Т. Базылев защищает докторскую диссертацию на тему «Основы теории многомерных сетей». Вскоре после защиты докторской диссертации ему было присвоено звание профессора. С 1968 года В. Т. Базылев заведует кафедрой геометрии Московского областного педагогического института им. Н. К. Крупской.

Важный вид деятельности В. Т. Базылева — его методическая работа. С 1969 года он — член и затем председатель комиссии по геометрии научно-методического совета по математике при Министерстве просвещения СССР. Он является соавтором всех программ по геометрии для педагогических институтов, которые издавались с 1970 года. В 1974, 1975 годах им совместно с К. И. Дуничевым и В. П. Иваницкой были изданы учебные пособия по геометрии для педагогических институтов. В 1980 году совместно с К. И. Дуничевым, В. П. Иваницкой и группой преподавателей Ярославского пединститута издан сборник задач по геометрии. В 1986—87 годах выходит новое учебное пособие по геометрии, написанное совместно с Л. С. Атанасяном. Эти книги имели большое значение для геометрического образования будущих учителей.

В 1975 году В. Т. Базылев возвращается в МГПИ им. В. И. Ленина и занимает должность профессора кафедры геометрии. Здесь он читает лекции по геометрии студентам, ведет занятия на факультете повышения квалификации, а также продолжает работу с аспирантами. Под его руководством работает научный семинар по дифференциальной геометрии на математическом факультете. На нем выступают с докладами о результатах своих научных исследований аспиранты, преподаватели-стажеры, соискатели и преподаватели других вузов страны, ведущие научную работу по геометрии. Много времени уделял В. Т. Базылев рецензированию научных работ и диссертаций. При этом он всегда был строгим, но доброжелательным рецензентом.

Педагогическое мастерство, высокая научная квалификация и обаяние В. Т. Базылева притягивали к нему многих молодых людей, желающих посвятить себя дифференциальной геометрии. Он умел увлечь аспирантов поставленными перед ними задачами, заботливо и с большим вниманием работал с каждым из своих учеников. В общей сложности В. Т. Базылев подготовил 28 аспирантов, успешно защитивших кандидатские диссертации. Ученики В. Т. Базылева работают во многих союзных республиках нашей страны, некоторые из них заведуют кафедрами в педагогических институтах.

В. Т. Базылев постоянно читал для аспирантов специальные курсы по геометрии. На основании этих спецкурсов в 1978 и 1979 годах им были изданы в МГПИ им. В. И. Ленина учебные пособия «Материалы по геометрии» (части 1 и 2), а также подготовлена к печати книга «Геометрия дифференцируемых многообразий». К сожалению, эта книга выходит в свет уже после смерти ее автора. Научные и педагогические заслуги В. Т. Базылева по достоинству оценены: он был награжден знаками «Отличник народного просвещения РСФСР», «Отличник просвещения СССР» и медалью им. К. Д. Ушинского.

В. Т. Базылев принимал активное участие в работе Всесоюзных геометрических конференций, был членом Бюро Всесоюзного геометрического семинара им. Г. Ф. Лаптева при ВИНИТИ АН СССР, членом Московского математического общества. Немаловажна его работа и в реферативном журнале «Математика», у истоков создания которого он стоял вместе с С. П. Финиковым.

В Т. Базылев был разносторонне образованным человеком. Он великолепно знал классическую художественную литературу, увлекался поэзией, интересовался историей. Труды В. О. Ключевского, С. М. Соловьева, Н. М. Карамзина — его любимые книги. Увлечения накладывали свой след и на профессиональные качества. Для лекций В. Т. Базылева по математике, которые он читал с большим искусством, характерно литературное изящество.

5 января 1989 года В. Т. Базылева не стало.

Сердце неутомимого труженика науки, тепло которого он щедро дарил людям, остановилось. Светлый образ В. Т. Базылева навсегда сохранится в благодарной памяти его многочисленных учеников и товарищей по научной работе.

В настоящей статье мы проводим краткий обзор основных результатов научных исследований В. Т. Базылева по квазилапласовым преобразованиям многообразий, проективной теории многомерных сетей, геометрии сетей на подмногообразиях евклидова пространства. Показан вклад В. Т. Базылева в теорию дифференцируемых отображений пространств, позволивший рассматривать многомерные сети и в этой главе геометрии. Освещено выполненное В. Т. Базылевым обобщение понятий и результатов классической дифференциальной геометрии сетей на случай сетей на дифференцируемых многообразиях. Приведены также два конструктивно построенные им класса многомерных сетей.

§ 1. КВАЗИЛАПЛАСОВЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ p-МЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ n-МЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Первый цикл научных работ [1]—[3] В. Т. Базылевым выполнен в 1950—1955 годах. Эти работы связаны с обобщением классической теории преобразований Лапласа поверхностей в трехмерном пространстве. Понятие преобразования Лапласа ввел Дарбу, обнаруживший, что аналитическое преобразование решений уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v}=a\frac{\partial\theta}{\partial u}+b\frac{\partial\theta}{\partial v}+c\theta,$$

где a, b, c — известные функции переменных u, v, может быть интерпретировано геометрически как переход от одной фокальной сети прямолинейной конгруэнции проективного пространства P_3 к другой ее фокальной сети. Теория преобразований Лапласа интенсивно изучалась С. П. Финиковым и его учениками. С. П. Финиковым был поставлен вопрос об обобщении преобразования Лапласа на многомерный случай.

Так как фокальная сеть прямолинейной конгруэнции является сопряженной сетью на двумерной поверхности, то построение многомерных обобщений преобразований Лапласа связано с изучением сопряженных сетей на многомерных многообразиях. Пусть V_p — p-мерное многообразие в проективном пространстве P_n, имеющее в каждой точке x ровно p сопряженных направлений. Если присоединить к V_p проективный репер $\{A_0, A_i, A_\alpha\}$, где $i, j=\overline{1, p}$, $\alpha=\overline{p+1, n}$, $x=A_0$, а прямые A_0A_i касаются сопряженных направлений, то на этом многообразии будут выполнены уравнения $\omega^\alpha=0$, $\omega_i^\alpha=b_{ii}^\alpha\omega^i$, где по индексу i суммирование не производится. Асимптотические квадратичные формы рассматриваемого многообразия имеют вид $\Phi^\alpha=\sum\limits_i b_{ii}^\alpha(\omega^i)^2$. Соприкасающееся подпространство многообразия V_p в его точке A_0 определяется точками A_0, A_i и $B_i=b_{ii}^\alpha A_\alpha$. Его размерность равна $p+q$, где q — число линейно независимых среди точек B_i.

Э. Картан в работе «О многообразиях постоянной кривизны» (1919—1920 гг.) рассмотрел случай, когда $q=p$. В этом случае сопряженная сеть на V_p оказывается голономной. Она расслаивается на $\frac{p(p-1)}{2}$ правильных семейств двумерных поверхностей V_{ij}, пересекающихся по линиям l_i, которые будут сопряженными как на многообразии V_p, так и на поверхностях V_{ij}.

Чжень Шиншень в 1944 году в работе «О преобразованиях Лапласа одного класса многомерных многообразий в проективном пространстве n измерений» строит обобщение преобразований Лапласа для многообразий, рассмотренных Э. Картаном.

Р. В. Смирнов в работе «Преобразования Лапласа p-сопряженных систем» (1950 г.) рассмотрел случай, когда $q \leqslant p$, но сопряженная сеть на V_p остается голономной, и также перенес на этот случай теорию преобразований Лапласа. При $q=0$ отсюда получаются результаты другой ученицы С. П. Финикова — Т. Л. Козьминой, которая в 1947 году рассмотрела преобразование Лапласа трижды сопряженных систем поверхностей трехмерного проективного пространства.

В. Т. Базылев рассматривает многообразия V_p пространства P_n, несущие неголономные сопряженные сети, и строит для них преобразования более общего вида, чем преобразования Лапласа. А именно, он доказывает, что касательные к линиям одного из семейств неголономной сопряженной сети на многообразии V_p образуют фокальное семейство прямых и несут, кроме точки $x \in V_p$, еще $p-1$ фокусов, каждый из которых описывает многообразие V_p', снова несущее неголономную сопряженную сеть. Но сопряженные сети на многообразиях V_p и V_p' уже не будут соответствовать друг другу. В этом случае переход от многообразия V_p к многообразию V_p' называется квазилапласовым преобразованием.

Изучению таких преобразований посвящены кандидатская диссертация В. Т. Базылева и его работы [1]—[3]. В частности, в них рассмотрены квазилапласовы преобразования многообразий V_p, несущих только двумерное линейное пространство асимптотических квадратичных форм, а также доказана обобщенная теорема Сегре, которая формулируется так: если многообразие V_p, несущее сопряженную сеть, имеет q-мерное $(q<p)$ линейное пространство квадратичных асимптотических форм, то либо оно является многообразием ранга q, либо целиком принадлежит своему $(p+q)$-мерному соприкасающемуся подпространству, либо расслаивается двумя способами на подмногообразия указанных выше типов. Для $q=1$ эта теорема была доказана Сегре в 1904 году.

Затем в работе [7] определяются и изучаются почти картановские многообразия пространства P_n — многообразия V_p, несущие сопряженную сеть и имеющие $(p-1)$-мерное линейное пространство квадратичных асимптотических форм, $p-2$ из которых приводятся к полному квадрату. Доказывается существование таких многообразий при $n \geqslant 3\,(p-1)$ и изучаются их квазилапласовы преобразования.

В работе [8], опубликованной в 1964 году, В. Т. Базылев рассматривает проектирование многообразия Картана $V_p \subset P_{2p}$ на подпространство P_p из $(p-1)$-мерного центра и доказывает, что при этом в P_p возникает p-сопряженная система, преобразования Лапласа которой являются проекциями преобразований

Лапласа многообразия V_p из того же центра. Кроме того, точка $M=T_p(x)\cap P_p$ также описывает р-сопряженную систему, линии которой соответствуют линиям сопряженной сети многообразия V_p. (Здесь $T_p(x)$ — касательное пространство к многообразию V_p в его точке x.)

§ 2. ПРОЕКТИВНАЯ ТЕОРИЯ МНОГОМЕРНЫХ СЕТЕЙ

Следующий цикл работ В. Т. Базылева посвящен разработке проективной теории сетей общего вида. Сетью на гладком многообразии V_p называется система Σ_p, состоящая из p семейств гладких линий таких, что через каждую точку $x\in V_p$ проходит одна и только одна линия каждого семейства, причем пространство, натянутое на касательные векторы к линиям сети Σ_p в точке x имеет размерность p. Если $p=n$ и V_n есть область в n-мерном проективном или аффинном пространствах, то сеть Σ_n называется плоской.

В работе [11], опубликованной в 1965 году, изучается проективная геометрия плоских многомерных сетей. К плоской сети $\Sigma_n\subset P_n$ присоединяется проективный репер так, что $A_0=x$ и прямые A_0A_i являются касательными к линиям сети. Тогда эта сеть определяется системой дифференциальных уравнений $\omega^i_j=a^i_{jk}\omega^k$ $(i\neq j;\ i,\ j,\ k=\overline{1,n})$. При этом объект $\nu^i_{jk}=2a^i_{[jk]}$ является объектом неголономности сети Σ_n.

На прямых A_0A_i определяются псевдофокусы — точки F^j_i $(j\neq i)$, для которых dF^j_i при смещении в направлении A_0A_i принадлежит подпространству $[A_0,\ldots,\hat{A}_j,\ldots,A_n]$, не содержащему точку A_j. Эти псевдофокусы определяются формулой $F^j_i=-a^j_{ij}A_0+A_i$. Если сеть Σ_n является n-сопряженной системой в P_n, то псевдофокусы становятся обычными фокусами прямых A_0A_i. Псевдофокусы F^j_i описывают в пространстве P_n новые сети $\Sigma_n(F^j_i)$, которые будут обобщениями преобразований Лапласа сети Σ_n.

На прямых A_0A_i инвариантно определяются гармонические полюсы $F_i=\frac{1}{n-1}\sum_{j\neq i}F^j_i$ точки A_0 относительно псевдофокусов F^j_i. При этом гиперплоскости $\Pi_{n-1}(A_0)=[F_1,F_2,\ldots,F_n]$ не содержат точек A_0 и определяют инвариантную нормализацию пространства P_n в смысле А. П. Нордена. Если положить $A_i=F_i$, то ввиду этого возникает соотношение $\omega^0_i=a^0_{ij}\omega^j$. Дальнейшая классификация плоских сетей $\Sigma_n\subset P_n$ связывается с изучением строения тензора a^0_{ij}. В частности, исследуется случай понижения ранга этого тензора.

В работе [16] рассматривается аффинная связность ∇ в пространстве P_n, определяемая указанной выше нормализацией, связанной с сетью Σ_n. Эта связность не имеет кручения, а ее тензор кривизны выражается через тензор a_{ij}^0. Сеть $\Sigma_n \subset P_n$ называется проективно чебышевской, если в связности ∇ направления касательных к любой линии сети переносятся параллельно вдоль любой другой линии этой сети. Доказывается существование таких сетей $(s_1 = n^2)$ и изучаются их свойства.

В работе [21] устанавливается, что фундаментальный объект третьего порядка сети Σ_n является полным и если его компоненты удовлетворяют некоторым конечным соотношениям, то он определяет эту сеть в P_n с точностью до проективного преобразования пространства. Затем из объекта a^j_{ik} выделяется ряд квазитензоров и относительных инвариантов, с их помощью строятся абсолютные инварианты и выясняется их геометрический смысл.

Сети на p-мерных многообразиях V_p проективного пространства P_n исследуются в работе [14], опубликованной в 1966 году. К точке x сети Σ_p присоединяется проективный репер так, что $x = A_0$, прямые $A_0 A_i$ $(i, j, k = \overline{1, p})$ являются касательными к ее линиям, а точки A_α $(\alpha = \overline{p+1, n})$ не лежат в касательном пространстве $T_p(x)$. В таком репере уравнения сети Σ_p записываются в виде

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega_i^\alpha = b^\alpha_{ij} \omega^j, \quad b^\alpha_{ij} = b^\alpha_{ji}, \quad \omega^i_k = a^i_{kj} \omega^j \quad (i \neq k).$$

На прямых $A_0 A_i$, также как и в случае плоской сети, определяются псевдофокусы $F_i{}^j$, но теперь их положение, вообще говоря, зависит от выбора главной компоненты $N_q(x)$ нормали $N_{n-p}(x)$, принадлежащей $(p+q)$-мерному соприкасающемуся пространству $T_{p+q}(x)$ многообразия V_p. Для того чтобы положение псевдофокусов $F_i{}^j$ на прямой $A_0 A_i$ не зависело от выбора $N_q(x)$, необходимо и достаточно, чтобы направления касательных к линиям ω^i и ω^j сети были сопряжены.

Если сеть Σ_p является сопряженной, то все псевдофокусы $F_i{}^j$ не зависят от выбора поля нормалей $N_q(x)$ и обратно. Если поверхность V_p — p-сопряженная система относительно сети Σ_p, то псевдофокусы $F_i{}^j$ являются обычными фокусами касательных к линиям сети. При заданном нормальном оснащении псевдофокусы определяют преобразование сети Σ_p в новые сети $\Sigma_p(F_i{}^j)$, которые можно рассматривать как обобщения преобразований Лапласа и псевдолапласовых преобразований сопряженных систем.

Если задано нормальное оснащение $N_q(x)$ многообразия V_p, несущего сеть Σ_p, то гармонические полюсы F_i псевдофокусов $F_i{}^j$ на прямой $A_0 A_i$ определяют плоскость $\Pi_{p-1}(x)$, которая служит нормалью второго рода в точке A_0 многообразия V_p в смысле А. П. Нордена. Семейства нормалей $N_q(x)$ и $\Pi_{p-1}(x)$ определяют нормализацию многообразия V_p и индуцируют на ней аффинную связность ∇.

Главная компонента $N_q(x)$ нормали называется q-мерной осью сети Σ_p, если соприкасающиеся плоскости к линиям сети, проходящим через точку A_0, пересекают ее по прямым. В этом случае сеть Σ_p будет геодезической сетью по отношению к связности ∇, индуцируемой оснащением. Условие существования оси для данной сети Σ_p находится в виде $\operatorname{rang}(b^a_{il}) = \operatorname{rang}(b^a_{il}, a^k_{il})$, $(a = \overline{p+1, p+q})$.

При смещении точки $x = A_0$ вдоль линии ω^j сети Σ_p прямая A_0A_i вместе с соседней прямой $A_0A_i + d_j(A_0A_i)$ определяет трехмерную плоскость $P_{i,j}(x)$. Главная компонента нормали $N_q(x)$ называется нормалью Чебышева сети Σ_p, если все 3-плоскости $P_{i,j}(x)$ пересекают эту компоненту по прямой. Сеть Σ_p называется проективно чебышевской, если она допускает такую нормаль Чебышева, относительно которой совпадают псевдофокусы на каждой касательной A_0A_i к линиям сети. Такая сеть является многомерным проективным аналогом сети Чебышева в двумерных пространствах аффинной связности.

Затем в работе [14] В. Т. Базылев рассматривает два интересных примера сетей на поверхностях V_2 проективного пространства P_3. Если Σ_2 — асимптотическая сеть на поверхности V_2, то ее нормаль первого рода A_0A_3 и прямая, соединяющая псевдофокусы $F_1{}^2$ и $F_2{}^1$, будут полярно сопряжены относительно любой соприкасающейся поверхности второго порядка — поверхности Дарбу, присоединенной к точке $A_0 \in V_2$. Если Σ_2 — произвольная неасимптотическая сеть на V_2, то для того чтобы псевдофокусы $F_i{}^j$ совпадали с фокусами прямых A_0A_i, не совпадающими с точкой A_0, необходимо и достаточно, чтобы нормаль A_0A_3 была осью этой сети.

§ 3. СЕТИ НА МНОГОМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

В работах [15], [17], опубликованных в 1966 году, В. Т. Базылев строит теорию многомерных сетей на многообразиях евклидова пространства. Пусть V_p — p-мерное многообразие евклидова пространства E_n, x — его точка, $T_p(x)$ и $N_{n-p}(x)$ — его касательное и нормальное подпространства в точке x. Предположим, что единичные векторы e_i образуют базис пространства $T_p(x)$, а векторы e_α — базис $N_{n-p}(x)$ $(i, j, k, l, t = \overline{1, p};\ \alpha = \overline{p+1, n})$.
Тогда величины $g_{ij} = e_i e_j$ образуют метрический тензор V_p, а его основные уравнения записываются в виде

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega_i^\alpha = b^\alpha_{ij}\omega^j,$$

где $b^\alpha_{ij} = b^\alpha_{ji}$ — второй основной тензор многообразия V_p.

Векторы $b_{ij}=b_{ij}^{\alpha}e_{\alpha}$, среди которых ровно q линейно независимых, определяют главную нормаль $N_q(x)=T_{p+q}(x)\cap N_{n-p}(x)$ многообразия V_p. Если $e_a \in N_q(x)$ $(a, b=\overline{p+1, p+q})$, то $b_{ij}^{\sigma}=0$ $(\sigma=\overline{p+q+1, n})$ и многообразие V_p имеет q-мерное линейное пространство вторых квадратичных форм $\Phi^a=b_{ij}^a\omega^i\omega^j$.

Рассмотрим сеть Σ_p на многообразии V_p. Располагая векторы e_i подвижного репера на касательных к линиям этой сети, получим $\omega_j^i=a_{jk}^i\omega^k$ $(j\neq i)$.

Для линии ω^i сети Σ_p в точке x вектор $K_{T(i)}=a_{ii}^je_j$ будет вектором относительной (или геодезической) кривизны, $K_{N(i)}=b_{ii}^ae_a=b_{ii}$ — вектором вынужденной (или нормальной) кривизны. Векторы $a_{ij}=a_{ij}^ke_k$ и $b_{ij}=b_{ij}^ae_a$ называются соответственно вектором относительной и вектором вынужденной кривизны поля e_i вдоль линии ω^j.

Наряду с сетью Σ_p на многообразии V_p, В. Т. Базылев рассматривает взаимную сеть Σ_p', направляющие векторы которой $E^i=g^{ij}e_j$. Для сети Σ_p' взаимной будет сеть Σ_p. Только ортогональная сеть совпадает со своей взаимной. Найдены аналитические условия голономности взаимной сети Σ_p' и показано, что переход от данной сети к взаимной в общем случае не сохраняет таких свойств сети, как голономность и сопряженность.

Точно также, как и в случае сети на многообразии $V_p\subset P_n$, дается определение псевдофокусов $F_k^i=x-\frac{1}{a_{ki}^i}e_k$ прямой $[x, e_k]$. Но здесь поле главной нормали $N_q(x)$ инвариантно связано с многообразием V_p, поэтому и псевдофокусы F_k^i инвариантно связаны с сетью Σ_p.

В. Т. Базылев проводит классификацию сетей $\Sigma_p\subset V_p$ прежде всего с помощью объекта неголономности $\nu_{ij}{}^k$, разбивая их на три класса неголономные, частично голономные и голономные сети. Эти классы сетей затем рассматриваются более детально в работе [17].

Для точки $y=x+y^ae_a$ главной нормали $N_q(x)$ имеем:

$$dy=(\omega^i+y^a\omega_a^i)e_i+(dy^b+y^a\omega_a^b)e_b+y^a\omega_a^{\sigma}e_{\sigma}.$$

Условие $dy\in N_{n-p}(x)$ выполняется тогда и только тогда, когда y^a удовлетворяют уравнению $\det\left\|\sum_a g^{ik}b_{kj}^ay^a-\delta_j^i\right\|=0$, которое определяет в плоскости $N_q(x)$ алгебраическую гиперповерхность $\widetilde{V}_{q-1}$ порядка p, не проходящую через точку x. Ее называют поверхностью, присоединенной к многообразию V_p в точке x. Если $n=p+q$ и, значит, $N_q(x)=N_{n-p}(x)$, то $\widetilde{V}_{q-1}$ есть фокусная поверхность нормальной плоскости.

На многообразии V_p рассматривается поле векторов средней кривизны $M=\frac{1}{p}g^{ij}b^a_{ij}e_a$. Прямая $[x, M]$ является средней нормалью многообразия V_p. Если $M \neq 0$, то точку z, определяемую равенством $z=x+|M|^{-2}M$, называют центром средней кривизны многообразия V_p в точке x. В. Т. Базылев доказал, что первая поляра точки x относительно присоединенной поверхности $\tilde{V}_{q-1}$ проходит через центр средней кривизны и ортогональна средней нормали.

Пусть на многообразии V_p задано поле одномерных нормалей $[x, n]\subset N_q(x)$. Располагая вектор e_{a_0} (a_0 фиксировано) на прямой $[x, n]$, выделим из системы вторых тензоров b^a_{ij} тензор $b^{a_0}_{ij}$. Его главные направления, которые находятся из системы уравнений $(\rho b^{a_0}_{ij}-g_{ij})\omega^j=0$, где ρ — корень уравнения $\det\|\rho b^{a_0}_{ij}-g_{ij}\|=0$, определяют на многообразии V_p ортогональную сеть, которая называется сетью линий кривизны относительно поля одномерных нормалей $[x, e_{a_0}]$. В работе [15] установлено, что данная ортогональная сеть $\Sigma_p\subset V_p$ будет сетью линий кривизны относительно некоторого поля одномерных нормалей тогда и только тогда, когда в каждой точке $x\in V_p$ существует $(q-1)$-плоскость $\Pi_{q-1}(x)\subset\subset N_q(x)$, содержащая вектор вынужденной кривизны любой пары направлений сети по отношению друг к другу. Тогда если $[x, n]\subset N_q(x)$ и $[x, n]\perp\Pi_{q-1}(x)$, то Σ_p будет сетью линий кривизны относительно поля нормалей $[x, n]$. Отсюда, в частности, следует, что если многообразие V_p несет ортогональную сопряженную сеть, то эта сеть является сетью линий кривизны для любого поля одномерных нормалей $[x, n]\subset N_q(x)$.

В. Т. Базылев изучает сеть линий кривизны относительно средней нормали. Для того чтобы главные направления в точке $x\in V_p$ относительно средней нормали определялись однозначно, необходимо и достаточно [17], чтобы средняя нормаль пересекала присоединенную поверхность $\tilde{V}_{q-1}$ в p различных точках.

Поле одномерных нормалей $[x, n]\subset N_q(x)$ названо особым [15], если относительно этого поля любое направление на многообразии является главным. Для того чтобы существовало особое поле одномерных нормалей, необходимо и достаточно, чтобы поле метрического тензора g_{ij} многообразия и поле его второго тензора $b_{ij}{}^a$ удовлетворяли условию $g_{ij}=h_a b_{ij}{}^a$. Если такое поле существует, то оно единственное. Многообразие V_p с максимальной размерностью главной нормали $q=\frac{1}{2}p(p+1)$ всегда имеет особое поле нормалей.

Многообразие V_p имеет в точке x особую нормаль тогда и только тогда, когда его индикатриса кривизны в этой точке принадлежит некоторой $(q-1)$-плоскости, не проходящей через точку x. Особая нормаль $[x, n]$ ортогональна этой $(q-1)$-плоскости.

Пусть $[x, n] \subset N_q(x)$ — одномерная нормаль и n — орт этой нормали. В работе [15] для всякого направления $\{\omega^i\}$ на многообразии V_p определен вектор $r = \frac{d_T n}{ds}$ $(ds^2 = g_{ij}\omega^i\omega^j)$, который по аналогии с геометрией поверхности $V_2 \subset E_3$ можно назвать вектором Родрига для данного направления и данного орта n. Пусть направление $\{\omega^i\}$ определено ортом $t = t^i e_i$. Совмещая вектор e_{a_0} базиса нормали $N_q(x)$ с ортом n, получаем $r^{a_0} = -g^{ik} b^{a_0}_{kj} t^j e_i$.

Для данного направления t и q векторов e_{a_0} рассматриваются q векторов r^a. В. Т. Базылев показывает, что ранг системы векторов $\{r^a\}$ не зависит от выбора частично ортогонального репера $\{x, e_i, e_a\}$. В [15] доказано, что если в точке $x \in V_p$ направлению t сопряжено k-направление $\Pi_k(x)$, то плоскость $R(t)$, являющаяся линейной оболочкой векторов r^a, имеет размерность $p-k$ и вполне ортогональна $\Pi_k(x)$.

На многообразии $V_p \subset E_n$ индуцируется риманова структура, тензор кривизны которой вычисляется по формуле

$$R^l_{jkl} = g^{lt} \sum_a (b^a_{jk} b^a_{tl} - b^a_{jl} b^a_{tk}).$$

В работе [15] это выражение записано в виде

$$R^l_{jkl} = g^{lt} (b_{jk} b_{tl} - b_{jl} b_{tk}).$$

Далее отсюда для тензора Риччи $R_{ij} = R^k_{ijk}$ получено выражение

$$R_{ij} = p\,|M| \cdot \alpha_{ij} - \beta_{ij},$$

где $\alpha_{ij} = m \cdot b_{ij}$, $\beta_{ij} = g^{kl} b_{ki} b_{lj}$, а $m = |M|^{-1} M$ — орт вектора средней кривизны (конечно, предполагается, что $M \neq 0$). Последняя формула дает аддитивное представление тензора Риччи на многообразии $V_p \subset E_n$. Затем рассматриваются квадратичные формы $\varphi = \alpha_{ij}\omega^i\omega^j$ и $\psi = \beta_{ij}\omega^i\omega^j$. Первая из них может быть представлена в виде $\varphi = m \cdot d^2x = -dm \cdot dx$ и является второй квадратичной формой многообразия V_p относительно средней нормали $[x, M]$. Показано также, что форма ψ является аналогом третьей квадратичной формы гиперповерхности.

Изучается кривизна Риччи многообразия V_p в точке x и устанавливается [15], что на минимальном многообразии кривизна Риччи в данном направлении отличается только знаком от суммы квадратов векторов Родрига, соответствующих этому направлению.

Из аддитивного представления тензора Риччи $R_{ij} = p|M|\alpha_{ij} -$

$-\beta_{ij}$ следует, что если сеть $\Sigma_p \subset V_p$ сопряжена относительно двух конусов $\varphi=0$, $\psi=0$, то она сопряжена и относительно конуса Риччи. Такую сеть В. Т. Базылев называет [15] средней сетью многообразия V_p. Проведено исследование этой сети, и, в частности, доказано, что для того чтобы сопряженная сеть была средней сетью многообразия V_p, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке $x \in V_p$ для любой пары направлений e_i, e_j линий сети выполнялось одно из условий: а) векторы вынужденных кривизн для этих направлений ортогональны, б) соответствующие векторы $E^i=g^{ik}e_k$, $E^j=g^{jt}e_t$ ортогональны.

Теодореску и Рицеску в статье «Об обобщении одной теоремы из теории поверхностей» (РЖМат, 1966, 11А349) перенесли на случай гиперповерхности V_{n-1} евклидова пространства E_n теорему классической теории поверхностей о том, что если геодезическая является линией кривизны, то она плоская.

Этот результат привлек внимание В. Т. Базылева, и он дал в 1968 году следующее обобщение этой теоремы на случай многообразия $V_p \subset E_n$ ([22]).

Если геодезическая на многообразии $V_p \subset E_n$ является линией кривизны при любом выборе поля одномерных нормалей $[x, n] \subset N_q(x)$, то эта линия лежит в $(n-p+1)$-плоскости. При $p=n-1$ отсюда получается теорема указанных выше авторов.

§ 4. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

С теорией сетей связаны также работы В. Т. Базылева, посвященные изучению дифференцируемых отображений многомерных пространств. К этой тематике относятся его работы [25] и [26], опубликованные в 1970 году.

Теория дифференцируемых отображений пространств является важным разделом дифференциальной геометрии. Основные понятия и определения этой теории изложены в статье В. В. Рыжкова «Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами» (ВИНИТИ АН СССР, Итоги науки, Геометрия. 1963. — М., 1965. — С. 65—107).

Пусть P_n, $\bar{P}_n$ — проективные n-пространства и T — дифференцируемое биективное отображение области $\Omega \subset P_n$ на область $\bar{\Omega} \subset \bar{P}_n$. Это отображение переведет каждую сеть $\Sigma_n \subset \Omega$ в некоторую сеть $\bar{\Sigma}_n \subset \bar{\Omega}$. Области Ω, $\bar{\Omega}$ отнесены к подвижным проективным реперам $R=\{M, M_i\}$ и $\bar{R}=\{\bar{M}, \bar{M}_i\}$, где $\bar{M}=TM$, $(i, j, k=\overline{1, n})$, построенным на касательных к линиям соответствующих сетей Σ_n и $\bar{\Sigma}_n$. Нормированием вершин репера $\bar{R}$ можно добиться, чтобы система дифференциальных уравнений отображения T имела вид $\bar{\omega}^i=\omega^i$. Продолжение этой системы приводит к равенствам $\bar{\nu}^j_{ik}=\nu^j_{ik}$, согласно которым отображение T сохраняет объект неголономности сети.

Пространства P_n, $\bar{P}_n$ В. Т. Базылев рассматривает вложенными в пространство P_{2n} так, чтобы они имели лишь одну общую точку P_0. В этих пространствах фиксируются $(n-1)$-плоскости $P_{n-1}\subset P_n$ и $\bar{P}_{n-1}\subset\bar{P}_n$, не содержащие точки P_0 так, чтобы $P_{n-1}\cap\Omega=\varnothing$, $\bar{P}_{n-1}\cap\bar{\Omega}=\varnothing$. Пусть $\bar{M}=TM$ и $[\bar{P}_{n-1}, M]\cap\cap[P_{n-1}, \bar{M}]=x$. Когда точка M описывает область Ω, точка x описывает некоторое n-мерное многообразие $V_n\subset P_{2n}$, которое В. Т. Базылев и называет конструктивным графиком данного отображения T.

С каждой парой точек M, $\bar{M}=TM$ связана касательная к отображению T гомография K_0: $K_0\{M, M_1, \ldots, M_n\}=\{\bar{M}, \bar{M}_1, \ldots, \bar{M}_n\}$, которая, как показал В. Т. Базылев, порождается проектированием касательной плоскости $T_n(x)$ конструктивного графика на плоскости P_n и $\bar{P}_n$ соответственно из центров $\bar{P}_{n-1}$ и P_{n-1}. Таким образом, конструктивный график отображения T автоматически фиксирует поле касательных гомографий. В работе [25] показано, что K_0-главные направления отображения T — это такие направления, которым соответствуют асимптотические направления на многообразии V_n.

Проводится изучение ранга и класса конструктивного графика V_n. Если V_n — многообразие ранга r, то соответствующее отображение T является огибающим ∞^r гомографий. Если V_n — многообразие класса $k<n$, то отображение T переводит k-плоскости связки с центром P_{k-1} пространства P_n в k-плоскости связки с центром $\bar{P}_{k-1}$ пространства $\bar{P}_n$.

Изучаются отображения $T:\Omega\to\bar{\Omega}$, сохраняющие n-сопряженную систему. В частности, в [25] доказано, что отображение T переводит n-сопряженную систему снова в n-сопряженную систему тогда и только тогда, когда на конструктивном графике V_n отображения существует такая голономная сеть, у которой каждая из плоскостей $P_{i,j}(x)$ (определение таких плоскостей см. в § 2) пересекает плоскости $[x, P_{n-1}]$ и $[x, \bar{P}_{n-1}]$ по прямым. Для того чтобы отображение T переводило n-сопряженную систему в n-сопряженную систему с соответствием фокусов в гомографии $K_0(M, \bar{M})$, необходимо и достаточно, чтобы многообразие V_n было n-сопряженной системой.

В работе [25] рассмотрено также дифференцируемое биектив ное отображение T области Ω аффинного пространства A_n на область $\bar{\Omega}$ пространства $\bar{A}_n$. Пространства A_n, $\bar{A}_n$ вкладываются как n-плоскости в аффинное пространство A_{2n} так, что они имеют только одну общую точку 0. Пространство A_{2n} пополняется несобственной гиперплоскостью $\overset{*}{P}_{2n-1}$. Тогда центрами проектирования P_{n-1} и $\bar{P}_{n-1}$ будут несобственные $(n-1)$-плоскости пространств A_n и $\bar{A}_n$. Точки графика V_n отображения T находятся как точки пересечения n-плоскостей $A_n(\bar{M}) \parallel A_n$ и $\bar{A}_n(M) \parallel \bar{A}_n$ $(M \in \Omega,\ \bar{M} = TM)$.

График отображения аффинных n-пространств определяется с точностью до аффинного преобразования пространства A_{2n}. Теперь касательная гомография K_0 осуществляется параллельным проектированием точек плоскости $T_n(x)$, касательной к графику V_n в точке x, и значит, является касательным аффинитетом K_{af}. Для аффинных пространств A_n, $\bar{A}_n$ получен ряд результатов как следствие теорем проективного случая.

В статье [26] рассматриваются евклидовы пространства E_n, $\bar{E}_n$ и дифференцируемое биективное отображение T области $\Omega \subset E_n$ на область $\bar{\Omega} \subset \bar{E}_n$. Эти пространства вкладываются как вполне ортогональные n-плоскости с общей точкой 0 в евклидово пространство E_{2n}. Если $x_1 \in \Omega$, $x_2 = Tx_1$, то точка x с радиусом-вектором $Ox = Ox_1 + Ox_2$ опишет некоторое многообразие V_n, когда точка x_1 опишет область Ω. Это многообразие будет графиком отображения T. График отображения определяется с точностью до изометрического преобразования пространства E_{2n}.

При подходящем выборе подвижных реперов $\{x_1,\ e_i\}$ в E_n и $\{x_2,\ e_{n+i}\}$ в $\bar{E}_n$ $(i,\ j,\ k,\ t = \overline{1, n})$ дифференциальные уравнения отображения T имеют, как и в проективном случае, вид $\omega^i = \bar{\omega}^i$. Тогда на графике V_n получим $dx = \omega^i \varepsilon_i$, где $\varepsilon_i = e_i + e_{n+i}$. Обозначая $\gamma_{ij} = e_i \cdot e_j$, $\bar{\gamma}_{ij} = e_{n+i} e_{n+j}$, $g_{ij} = \varepsilon_i \varepsilon_j$, находим, что $g_{ij} = \gamma_{ij} + \bar{\gamma}_{ij}$. Векторы $\varepsilon_{n+j} = e_j - \gamma_{jk} \bar{\gamma}^{kt} e_{n+t}$ $(\bar{\gamma}^{kj} \bar{\gamma}_{ji} = \delta_i^k)$ образуют базис n-мерной нормали $N_n(x)$ к многообразию V_n в точке x. Точка x и векторы ε_i, ε_{n+i} образуют подвижной репер графика V_n отображения T.

Точка $y \in E_n$, где $x_1 y = y^i e_i$, переходит в аффинитете K_{af}, касательном к отображению T для пары точек x_1, $x_2 = Tx_1$, в точку с теми же координатами в репере $\{x_2,\ e_{n+i}\}$. Следовательно, единичная сфера $\bar{\gamma}_{ij} y^i y^j = 1$ пространства $\bar{E}_n$ получается из эллипсоида пространства E_n, который определяется в пространстве E_n относительно репера $\{x_1,\ e_i\}$ тем же уравнением. Этот эллипсоид будет эллипсоидом деформации.

Отображение $T: \Omega \to \bar{\Omega}$ определяет в области Ω поле эллипсоидов деформации. Главные направления эллипсоида деформации в точке $x_1 \in \Omega$ находятся из системы уравнений $(\bar{\gamma}_{ij} - \lambda \gamma_{ij}) \omega^j = 0$, где λ — корень уравнения $\det \|\bar{\gamma}_{ij} - \lambda \gamma_{ij}\| = 0$. Система из n линейно независимых полей этих направлений определяет в области $\Omega \subset E_n$ ортогональную сеть σ_n, которой соответствует также ортогональная сеть $\bar{\sigma}_n = T\sigma_n \subset \bar{\Omega}$. Эту сеть σ_n (как и $\bar{\sigma}_n$) называют основанием отображения T. В. Т. Базылев установил в работе [25], что основанию σ_n отображения T соответствует на графике V_n этого отображения ортогональная сеть σ_n^*. В этой работе показывается также, что для того чтобы ортогональная сеть $\Sigma_n \subset \Omega$ была основанием отображения, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке $x \in V_n$ векторы $\varepsilon^{n+i} = \gamma^{ij}\varepsilon_{n+j}$ были попарно ортогональны.

Изучены специальные виды отображения T. Отображение $T: E_n \to \bar{E}_n$ является подобием только в том случае, когда графиком отображения служит n-плоскость E_n^*, расположенная относительно E_n так, что выполняется условие

$$(\widehat{xy,\ x_1y_1}) = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}},$$

где xy — произвольный вектор из E_n^*, x_1y_1 — его ортогональная проекция на плоскость E_n, α — коэффициент подобия. Отсюда следует, что отображение T является изометрией ($\alpha = 1$) только в том случае, когда для плоскости E_n^* последнее равенство принимает вид $(\widehat{xy,\ x_1y_1}) = \frac{\pi}{4}$.

В статье [31], опубликованной в 1972 году, изучено отображение $T: E_n \to \bar{E}_n$, график V_n которого лежит на гиперсфере S_{2n-1} радиуса r этого пространства. Без ограничения общности можно считать, что точка $O = E_n \cap \bar{E}_n$ является центром гиперсферы S_{2n-1}. Оказывается справедливым равенство $M \cdot x = -1$, где M — вектор средней кривизны многообразия V_n, $x \in V_n \subset S_{2n-1}$. Из этого равенства следует, что если в каждой точке $x \in V_n \subset S_{2n-1}$ векторы M и x коллинеарны, то V_n — многообразие постоянной средней кривизны $|M| = \frac{1}{r}$, где r — радиус гиперсферы S_{2n-1}.

Заметим, что к проблеме дифференцируемых отображений многообразий В. Т. Базылев обращался в своих научных исследованиях и в последующие годы. Здесь можно указать его выступления [44], [48], [57], [58], [66] на конференциях, а также статьи [51], [56], [59].

§ 5. СЕТИ НА МНОГООБРАЗИЯХ. ∇-СОПРЯЖЕННЫЕ СЕТИ В ПРОСТРАНСТВЕ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

В статье [35], опубликованной в 1974 году в шестом томе Трудов геометрического семинара ВИНИТИ АН СССР, В. Т. Базылев переносит некоторые понятия и результаты, известные в классической теории сетей, на случай сетей, заданных в области Ω p-мерного вещественного C^∞-многообразия M.

Пусть F—R-алгебра вещественных дифференцируемых функций, определенных в области Ω, а D^1—F-модуль дифференцируемых векторных полей в этой области, которая предполагается такой, что на ней можно задать p линейно независимых векторных полей $X_i \in D^1$. Каждое векторное поле X_i $(i, j, k=\overline{1, p})$ определяет в области Ω семейство σ^i интегральных кривых этого поля. Система $\Sigma_p=\{\sigma^1, \sigma^2, \ldots, \sigma^p\}$ кривых есть сеть в области Ω.

Обозначим, как и обычно, через T_x векторное пространство, касательное к многообразию M в точке x. 1-распределения Δ_1^i, задающие сеть $\Sigma_p \subset \Omega$, определяют $(p-1)$-распределения Δ_{p-1}^i, для которых в каждой точке $x \in \Omega$ подпространство $\Delta_{p-1}^i(x) \subset T_x$ является прямой суммой подпространств $\Delta_1^1(x), \ldots, \Delta_1^{i-1}(x)$, $\Delta_1^{i+1}(x), \ldots, \Delta_1^p(x)$. Число r всех неинтегрируемых распределений Δ_{p-1}^k названо рангом сети Σ_p. Ранг сети является ее топологическим инвариантом. Множество всех сетей, определенных в области Ω, разбивается на три класса: а) голономные сети — сети ранга $r=0$; б) частично голономные сети, для них $0<r<p$; в) неголономные сети — сети ранга $r=p$.

Пусть D_1 — модуль, двойственный к F-модулю D^1. Векторные поля $X_i \in D^1$, порождающие сеть $\Sigma_p \subset \Omega$, определяют в этой области систему p линейно независимых дифференциальных 1-форм $\omega^i \in D_1$ условием $(\omega^j(X_j))(x)=\delta_j^i$, $\forall x \in \Omega$, где δ_j^i — символ Кронекера. Сеть Σ_p можно теперь задать этими 1-формами ω^i. Интегрируемость распределения $\Delta_{p-1}{}^k$ равносильна полной интегрируемости дифференциального уравнения $\omega^k=0$.

Рассмотрим отображение $\varphi: D^1 \times D^1 \to D^1$, удовлетворяющее двум условиям:

$$\forall X,\ Y \in D^1,\ \forall f \in F\ \exists g,\ h \in F \left| \begin{array}{l} \varphi_{fX} Y = gX + f\varphi_X Y, \\ \varphi_X(fY) = hY + f\varphi_X Y, \end{array} \right.$$

где $\varphi_X Y = \varphi(X, Y)$.

Множество σ всех таких отображений не является пустым. В частности, оно содержит скобку векторных полей. Если в области Ω задана линейная связность ∇, то $\nabla \in \sigma$. Множество σ наделяется структурой унитарного F-модуля, который позволяет проводить дальнейшую классификацию сетей в области Ω. F-модуль σ В. Т. Базылев называет сетевым модулем области Ω.

Пусть $\varphi \in \sigma$. Линейно независимые 1-распределения $\Delta(X)$, $\Delta(Y)$ называются φ-сопряженными, если $\varphi_X Y$, $\varphi_Y X \in \Delta(X, Y)$. 1-распределение $\Delta(X)$ называется φ-геодезическим, если $\varphi_X X = \lambda X$, $\lambda \in F$.

Линейно независимые векторные поля X, $Y \in \Delta_m$, где Δ_m — m-мерное распределение, называются (φ, Δ_m)-сопряженными, если $\varphi_X Y$, $\varphi_Y X \in \Delta_m$. 1-распределения Δ_1', $\Delta_1'' \in \Delta_m$ называются (φ, Δ_m)-сопряженными, если (φ, Δ_m)-сопряжены какие-либо векторные поля X, Y, порождающие эти 1-распределения.

Векторное поле $X \in \Delta_m$ без нулевых точек называется (φ, Δ_m)-асимптотическим, если $\varphi_X X \in \Delta_m$. Это определение позволяет говорить и о (φ, Δ_m)-асимптотических 1-распределениях. Доказано, что если φ-геодезическое 1-распределение Δ_1 принадлежит распределению Δ_m, то оно будет и (φ, Δ_m)-асимптотическим. Этот результат обобщает классическую теорему из теории поверхностей евклидова пространства E_3: прямая, лежащая на поверхности, является асимптотической линией этой поверхности.

Рассмотрим распределение $\widetilde{\Delta}_{p-m}$, дополнительное к заданному в области $\Omega \subset M$ распределению Δ_m. Векторное поле $X \in \Delta_m$ без нулевых точек названо (φ, Δ_m)-геодезическим, если двумерное распределение $\Delta(X, \varphi_X X)$ пересекает распределение $\widetilde{\Delta}_{p-m}$ по 1-распределению. 1-распределение Δ_1 называют (φ, Δ_m)-геодезическим, если какое-либо векторное поле X, порождающее это распределение, является (φ, Δ_m)-геодезическим.

Если некоторое распределение Δ_1 является одновременно (φ, Δ_m)-асимптотическим и (φ, Δ_m)-геодезическим, то Δ_1 — φ-геодезическое распределение. Это есть обобщение классической теоремы из теории поверхностей $V_2 \subset E_3$: линия на поверхности, являющаяся одновременно асимптотической и геодезической,— прямая.

Пусть в области Ω заданы $(p-1)$-распределение Δ_{p-1} и дополнительное 1-распределение $\Delta(Y)$. Интегральные кривые 1-распределения $\Delta(X) \subset \Delta_{p-1}$ называются линиями кривизны относительно 1-распределения $\Delta(Y)$, если $\varphi_X Y \in \Delta(X, Y)$. Это равенство обобщает классическую теорему Монжа о нормалях к поверхности евклидова пространства, взятых вдоль линий кривизны этой поверхности.

Сеть $\Sigma_p \subset \Omega$ называется φ-сопряженной, если φ-сопряжены любые два 1-распределения $\Delta_1{}^i$, $\Delta_1{}^j$ $(i \neq j)$, определяемых этой сетью. Относительно каждого из распределений $\Delta_1{}^i$ интегральные кривые остальных распределений $\Delta_1{}^j$ являются линиями кривизны. Получается обобщение классической теоремы Дюпена о трижды ортогональной системе поверхностей в евклидовом пространстве E_3: на каждой поверхности одного семейства поверхности двух других семейств высекают сеть линий кривизны.

Пусть в области Ω определена аффинная связность ∇ без кручения. Линейно независимые векторные поля X, Y называются ∇-сопряженными, если $\nabla_X Y$, $\nabla_Y X \in \Delta(X, Y)$. Это определение инвариантно относительно 1-направлений, порождаемых полями X, Y. Поэтому можно говорить о ∇-сопряженности двух 1-распределений $\Delta_1{}'$ и $\Delta_1{}''$. Эти 1-распределения названы ∇-сопряженными, если ∇-сопряжены какие-либо порождающие их векторные поля $X \in \Delta_1{}'$ и $Y \in \Delta_1{}''$.

Сеть $\Sigma_p \subset \Omega$ называется [33] ∇-сопряженной, если ∇-сопряжены 1-распределения $\Delta_1{}^i$, $\Delta_1{}^j$, порождаемые любыми двумя семействами σ^i, σ^j $(i \neq j)$ ее линий. Показано, что ∇-сопряженная сеть голономна. Обратное неверно: голономная сеть не обязательно является ∇-сопряженной.

Для каждой линии γ^k семейства σ^k сети $\Sigma_p \subset \Omega$ можно выполнить развертывание на аффинное пространство. При заданном начальном репере $R_0=\{y_0, (a_j)_0\}$ система дифференциальных уравнений $dy=\omega^k a_k$ (по k не суммировать), $da_j=\omega_j{}^i a_i$ определяет в аффинном пространстве A_p однопараметрическое семейство реперов $R(t)=\{y(t), a_j(t)\}$, где t пробегает некоторый интервал I. Кривая $\gamma_0{}^k=\{y(t), t\in I\}$ и есть развертка линии $\gamma^k\subset\Omega$ на аффинное пространство A_p.

В. Т. Базылев рассматривает линейчатые поверхности $L_i{}^k$ $(i\neq k)$, описанные прямыми $[y(t), a_i(t)]$ и находит, что ∇-сопряженная сеть характеризуется тем свойством, что при развертывании на аффинное пространство любой ее линии γ^k все присоединенные линейчатые поверхности $L_i{}^k$ являются торсами.

Показано также, что чебышевская сеть (см. § 2) $\Sigma_p\subset\Omega$ ∇-сопряжена и для нее все линейчатые поверхности $L_i{}^k$ $(i\neq k)$ являются цилиндрами.

Пусть V_p — подмногообразие проективного пространства P_{p+q}, оснащенное семействами q-мерных нормалей первого рода и $(p-1)$-мерных нормалей второго рода. Это оснащение индуцирует на V_p аффинную связность ∇ (см. А. П. Норден. Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976. — 432 с.). В работе [33] доказано, что сеть Σ_p на V_p является ∇-сопряженной тогда и только тогда, когда каждая из плоскостей $P_{i,j}(x)$ $(i\neq j)$ (см. § 2) либо пересекает нормаль первого рода по прямой, либо совпадает с соответствующей плоскостью $[A_0, A_i, A_j]$.

Каждая замена нормализации многообразия V_p в P_{p+q}, сохраняющая поле нормалей первого рода, сохраняет и свойство сети $\Sigma_p\subset V_p$ быть ∇-сопряженной.

Если сеть Σ_p на многообразии V_p является p-сопряженной системой, то она будет ∇-сопряженной при любой нормализации многообразия V_p. В частности, сеть Σ_n в нормализованном проективном пространстве P_n будет ∇-сопряженной тогда и только тогда, когда она является n-сопряженной системой. Поэтому ∇-сопряженную сеть Σ_n в пространстве аффинной связности можно рассматривать как аналог n-сопряженной системы в проективном пространстве.

В F-модуле σ В. Т. Базылев выделяет подмодуль σ_0 такой, что если $\varphi\in\sigma_0$, то $\varphi_{fX}Y=f\varphi_X Y$. Если этому условию удовлетворяют любые два 1-распределения $\Delta_1{}^i$, $\Delta_1{}^j$, определяемые сетью Σ_p, то сеть Σ_p названа φ-чебышевской.

Сеть $\Sigma_p\subset\Omega$ называется φ-геодезической, если все ее 1-распределения $\Delta_1{}^k$ являются φ-геодезическими. φ-сетью Фосса называется φ-сопряженная и φ-геодезическая сеть.

Далее в работе [35] рассматриваются сети на римановом многообразии. Если риманово многообразие M несет ортогональную чебышевскую сеть, то оно локально евклидово. Этот результат является обобщением известной теоремы классической теории поверхностей $V_2\subset E_3$: поверхность $V_2\subset E_3$, несущая ортогональную чебышевскую сеть, наложима на плоскость.

Доказано, что ортогональная чебышевская сеть на M является ∇-сетью Фосса. Установлено, что если риманово многообразие M несет ортогональную ∇-сеть Фосса, то эта сеть — чебышевская, а многообразие M — локально евклидово.

§ 6. КОНСТРУКТИВНО ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ СЕТИ

К этому кругу вопросов мы относим исследования В. Т. Базылева, проведенные в статьях [40] и [39], опубликованных в 1975 году. В них для многообразия $V_p \subset P_n$ указываются конструктивные способы задания p линейно независимых 1-распределений, определяющих сеть.

В статье [40] на многообразии V_p проективного пространства P_n сеть $\Sigma_p{}^*$ задается при помощи $(p-1)$-распределения Δ_{p-1} и семейства $(n-p+1)$-мерных плоскостей $P_{n-p+1}(x)$, высекающих на касательных плоскостях многообразия V_p прямые, образующие распределение Δ_1, дополнительное к распределению Δ_{p-1}. Сеть $\Sigma_p{}^*$ состоит из семейства интегральных линий распределения Δ_1 и из линий, принадлежащих распределению Δ_{p-1}, при смещении вдоль которых на прямой $\Delta_1(x)$ определяются псевдофокусы. В общем случае через точку x проходит ровно $p-1$ таких линий, которые вместе с интегральными линиями распределения Δ_1 образуют сеть $\Sigma_p{}^*$. Найдено необходимое и достаточное условие, которому должны удовлетворять компоненты объекта сети $\Sigma_p \subset V_p$, чтобы эта сеть была сетью $\Sigma_p{}^*$.

Если сеть $\Sigma_p{}^*$ голономна, а распределения Δ_1 и Δ_{p-1} сопряжены, то на каждом из многообразий V_{p-1} $(\omega^1=0)$ сеть Σ_{p-1}, образованная линиями ω^i $(i=\overline{2,p})$ является ∇-сопряженной системой относительно аффинной связности ∇, индуцированной на V_{p-1} его нормализацией, в которой плоскость $P_{n-p+1}(x)$ служит нормалью первого рода.

Сеть $\Sigma_p{}^*$ рассмотрена и на гладком многообразии V_p в евклидовом пространстве E_n. Здесь уже для любого дифференцируемого 1-распределения Δ_1 определено ортогональное к нему распределение Δ_{p-1}. В частности, если распределения Δ_1 и Δ_{p-1} сопряжены, но Δ_{p-1} неинтегрируемо, то линии ω^1 — геодезические.

С. П. Фиников изучал сети двойных линий на паре поверхностей в трехмерном проективном пространстве. В. Т. Базылев в работе [39] исследовал сети двойных линий на паре гиперповерхностей проективного пространства P_n. В пространстве P_n задаются два гладких многообразия V_{n-1} и V_{n-1}' и диффеоморфизм $f: V_{n-1} \to V_{n-1}'$ такой, что $f(x) \neq x$, $\forall x \in V_{n-1}$. Линия $\gamma \subset V_{n-1}$, как и линия $f(\gamma) \subset V_{n-1}'$, называется двойной линией отображения f, если касательные к линиям γ и $f(\gamma)$ в точках x и $f(x)$ пересекаются. На многообразии V_{n-1} определяется сеть σ_{n-1} — сеть двойных линий отображения f. Если

$n > 3$ и все фокусы прямой $(xf(x))$ различны, то сеть σ_{n-1} голономна тогда и только тогда, когда она является ∇-сопряженной системой относительно аффинной связности, индуцированной на V_{n-1} нормализацией, в которой нормалями первого рода служат прямые $(xf(x))$, а нормалями второго рода — пересечения касательных гиперплоскостей к V_{n-1} и V_{n-1}' в соответствующих точках.

Указанные поля нормалей первого рода и второго рода индуцируют на многообразии V_{n-1}' аффинную связность ∇'. Доказано, если на многообразии V_{n-1} сеть двойных линий σ_{n-1} геодезическая относительно связности ∇, то и на многообразии V_{n-1}' сеть двойных линий $\sigma_{n-1}'=f(\sigma_{n-1})$ также является геодезической относительно связности ∇'.

СПИСОК ПЕЧАТНЫХ РАБОТ В. Т. БАЗЫЛЕВА

1. Квазилапласовы преобразования p-поверхностей пространства P_n. Докл. АН СССР, 1953, *92*, № 3, 453—455 (РЖМат, 1954, 2316)
2. Квазилапласовы преобразования p-мерных поверхностей n-мерного проективного пространства. Уч. зап. Моск. гор. пед. ин-та им. В. П. Потемкина, 1955, *35*, вып. 4, 261—322 (РЖМат, 1957, 845)
3. Квазилапласовы преобразования многомерных поверхностей. Успехи мат. наук, 1955, *10*, № 2, 214—215 (РЖМат, 1956, 6106)
4. Некоторые вопросы геометрии тетраэдра. Уч. зап. Моск. гор. пед. ин-та им. В. П. Потемкина, 1959, *95*, 207—213 (РЖМат, 1960, 5723)
5. Об одной ошибке в школьных учебниках геометрии. Уч. зап. Моск. гор. пед. ин-та им. В. П. Потемкина, 1959, *95*, 215—217 (РЖМат, 1960, 4420)
6. Аффинно-конструктивное определение кривых второго порядка. Уч. зап. Моск. гор. пед. ин-та им. В. П. Потемкина, 1959, *95*, 219—225 (РЖМат, 1960, 5727)
7. Об одном классе многомерных поверхностей. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1961, № 1, 27—35 (РЖМат, 1962, 1А403)
8. О плоских сетях, присоединенных к поверхности Картана. Сиб. мат. ж., 1964, *5*, № 4, 729—737 (РЖМат, 1964, 11А355)
9. Об одном обобщении лапласовых преобразований поверхности. Докл. 3-й Сибирск. конференции по матем. и механ., 1964, Томск, Томский ун-т, 1964, 179—180 (РЖМат, 1965, 7А390)
10. О плоских многомерных сетях. Тезисы докл. 2-й Всес. геометр. конф. Харьков, 1964, 9—10
11. К геометрии плоских многомерных сетей. Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та им. В. И. Ленина, 1965, № 243, 29—37 (РЖМат, 1965, 11А411)
12. О многомерных сетях и их преобразованиях. Итоги науки ВИНИТИ. В сб. «Геометрия. 1963», М. 1965, 138—164 (РЖМат, 1966, 11А340)
13. Некоторые вопросы геометрии p-поверхностей евклидова пространства. Материалы 2-й Прибалтийской геометр. конф. Тарту, 1965, 5—9
14. О сетях на многомерных поверхностях проективного пространства. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1966, № 2, 9—19 (РЖМат, 1966, 8А514)
15. Об одном аддитивном представлении тензора Риччи p-поверхности евклидова пространства. Сиб. мат. ж., 1966, *7*, 499—511 (РЖМат, 1966, 11А344)
16. О нормализациях проективного пространства, порождаемых заданной в нем сетью. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1966, *6*, № 3, 313—322 (РЖМат, 1968, 2А563)

17. О многомерных сетях в евклидовом пространстве. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1966, *6*, № 4, 475—491 (РЖМат, 1968, 2А555)
18. О двух способах проективной классификации многомерных сетей. Междунар. Матем. конгресс. Тезисы. Геометрия. М., 1966, *21*
19. О полях сопряженных направлений на многомерных поверхностях полного ранга. Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та им. В. И. Ленина, 1967, № 271, 7—33 (РЖМат, 1969, 2А638)
20. К геометрии дифференцируемых отображений евклидовых n-пространств. Тезисы докл. 3-й межвузовск. научн. конф. по пробл. геом. Казань, 1967, 8 (РЖМат, 1968, 6А574К)
21. О фундаментальных объектах плоских многомерных сетей. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1967, № 9, 3—15 (РЖМат, 1968, 2А564)
22. Об одном свойстве геодезических линий на многомерных поверхностях. 3-я Прибалт. геометрич. конф. Тезисы докл. Паланга, 1968, 9—10
23. О программе курса «Геометрия». В сб. докладов на Всес. совещ. заведующих матем. кафедрами пед. ин-тов. Ивано-Франковск, 1970, 47—50
24. Программа по геометрии для математических факультетов пединститутов (совместно с В. Г. Болтянским). М., Просвещение, 1970
25. Многомерные поверхности, сети и дифференцируемые отображения пространств. Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та им. В. И. Ленина, 1970, *1*, № 374, 28—40 (РЖМат, 1971, 9А586)
26. К геометрии дифференцируемых отображений евклидовых пространств. Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та им. В. И. Ленина, 1970, *1*, № 374, 41—51 (РЖМат, 1971, 9А587)
27. Об одном свойстве геодезических линий на многомерных поверхностях. Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та им. В. И. Ленина, 1970, *1*, № 374, 52—56 (РЖМат, 1971, 9А577)
28. Вопросы школьного курса геометрии в едином курсе «Геометрия» пединститута. Материалы семинара повышения квалификации преподавателей методики математики. Калинин, 1971, 12—13
29. О графиках частичных диффеоморфизмов евклидовых n-пространств. 3-я респубд. конф. математиков Белоруссии. Тезисы докл., ч. 1, Минск, 1971, 26—27
30. Сети на многообразиях. Тезисы докл. 5-й Всес. конф. по совр. пробл. геометрии. Самарканд, 1972, 13 (РЖМат, 1973, 4А748К)
31. Об одном случае отображений евклидовых пространств. «Геометрия погруженных многообразий». (Сб. трудов Моск. обл. пед. ин-та им. Н. К. Крупской). М., 1972, 3—9 (РЖМат, 1973, 9А661)
32. Программа государственных экзаменов для математических факультетов пединститутов. (раздел «Геометрия»). М., Просвещение, 1973
33. А ∇-сопряженных сетях в пространстве аффинной связности. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1974, № 5, 25—30 (РЖМат, 1975, 1А814)
34. К 90-летию со дня рождения С. П. Финикова. Тр. Геометр. семинара Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1974, *6*, 17—24 (РЖМат, 1975, 2А42)
35. Сети на многообразиях. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1974, *6*, 189—205 (РЖМат, 1975, 3А726)
36. Геометрия I. (совместно с К. И. Дуничевым и В. П. Иваницкой). Учебное пособие для студентов физ.-мат. фак-тов пед. ин-тов. М., Просвещение, 1974, 352 с. (РЖМат, 1975, 2А670К)
37. Элементы многомерной геометрии. Труды Всес. семинара зав. кафедрами и преподавателей геометрии пед. ин-тов СССР. Тбилиси, Тбилисский ун-т, 1974, 45—65 (РЖМат, 1976, 1А812)
38. Геометрия II. (совместно с К. И. Дуничевым). Учебное пособие для студентов физ.-мат. фак-тов пед. ин-тов. М.: Просвещение, 1975, 367 с.
39. Многомерные сети двойных линий. В сб. «Дифференц. геометрия многообразий фигур». Вып. 6. Калининград, 1975, 19—25 (РЖМат, 1976, 9А591)

40. Об одном замечательном классе сетей. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. В сб. «Проблемы геометрии». М., 1975, *7*, 105—116 (РЖМат, 1976, 9А600)
41. О конструктивных способах задания многомерных сетей. Тезисы докл. 6-й Всес. геометр. конф. по совр. пробл. геометрии. Вильнюс, 1975, 21—22 (РЖМат, 1975, 12А583К)
42. О неевклидовых геометриях, порождаемых сетями кривых. Тезисы докл. Всес. науч. конф. по неевкл. геометрии «150 лет геометрии Лобачевского». Казань, 1976, 19 (РЖМат, 1976, 11А739К)
43. Программы techинститутов. Геометрия для специальности № 2104 «Математика» и «Математика и физика». (совместно с В. Г. Болтянским). М.: Просвещение, 1977
44. К геометрии частичных отображений евклидовых пространств. 5-я Прибалт. геометр. конф. Тезисы докл. Друскининкай, 1978, 9 (РЖМат, 1978, 9А607К)
45. К геометрии сетей в расширенном пространстве. Геометрия погруженных многообразий. М., 1978, 3—9 (РЖМат, 1979, 4А720)
46. Материалы по геометрии. Учебное пособие для студентов, аспирантов и стажеров матем. ф-та. М., Моск. гос. пед. ин-т им. В. И. Ленина, 1978, вып. 1, 100 с.
47. Материалы по геометрии. Учебное пособие для студентов, аспирантов и стажеров матем. ф-та. М., Моск. гос. пед. ин-т им. В. И. Ленина, 1979, вып. 2, 120 с.
48. Об одном случае отображений евклидовых пространств. Тезисы докл. 7-й Всес. геометр. конф. по совр. пробл. геом. Минск, 1979, 20
49. Геометрия I (совместно с К. И. Дуничевым и В. П. Иваницкой). Учебное пособие для студентов физ.-мат. фак-тов пед. ин-тов. Перевод на казахский язык. Алма-Ата, Мектеп, 1979, 376 с.
50. Сборник задач по геометрии (совместно с К. И. Дуничевым и др.) Учебное пособие для студентов физ.-мат. фак-тов пед. ин-тов. М., Просвещение, 1980, 238 с. (РЖМат, 1980, 10А437К)
51. О частичных отображениях евклидовых пространств. «Тбилисис математикис Шромеби. Сакартвелос ССР Мецниеребата Академиа. Тр. Тбилис. мат. ин-та АН ГрузССР», 1980, *64*, 19—27 (РЖМат, 1980, 12А712)
52. Программы techинститутов. Геометрия для специальности № 2105 «Физика и математика» (совместно с К. И. Дуничевым). М., Просвещение, 1980
53. Сети на многообразиях (совместно с М. К. Кузьминым и А. В. Столяровым). Итоги науки и техн. ВИНИТИ. В сб. «Проблемы геометрии». М., 1981, *12*, 97—125 (РЖМат, 1981, 10А544)
54. Геометрия II (совместно с К. И. Дуничевым). Учебное пособие для студентов физ.-мат. фак-тов пед. ин-тов. Перевод на казахский язык. Алма-Ата, Мектеп, 1981, 400 с.
55. Программы techинститутов. Геометрия для специальности № 2104 «Математика» и «Математика и физика». (совместно с В. Г. Болтянским). М., Просвещение, 1982
56. О частичном отображении $f:(\Omega\subset E_4)\to E_2$. Геометрия погруженных многообразий. М., 1983, 6—9 (РЖМат, 1984, 8А711)
57. К геометрии отображений гладких многообразий. 4-я Прибалт. конф. по соврем. пробл. дифф. геом. и их приложениям. Тезисы докл., Таллин, 1984, 18
58. К геометрии отображений пространств аффинной связности. Тезисы докл. 8-й Всес. научн. конф. по совр. пробл. дифф. геом., Одесса, 1984, 10
59. О характеристических линиях отображений пространств аффинной связности. Пространства над алгебрами и некоторые вопросы теории сетей. Уфа, 1985, 12—19 (РЖМат, 1986, 3А915)
60. Геометрия I. (совместно с К. И. Дуничевым и В. П. Иваницкой). Учебное пособие для студентов физ.-мат. фак-тов пед. ин-тов. Перевод на венгерский язык. Tankönyvkiadó, Budapest, 1985, 374 с.

61. Геометрия II (совместно с К. И. Дуничевым). Учебное пособие для студентов физ.-мат. фак-тов пед. ин-тов. Перевод на венгерский язык. Tankönyvkiadó, Budapest, 1985, 379 с.
62. Программы пединститутов. Геометрия для специальности № 2104 «Математика» и «Математика и физика» (совместно с Л. С. Атанасяном). М., Просвещение, 1986
63. Геометрия, ч. 1 (совместно с Л. С. Атанасяном). Учебное пособие для студентов пед. ин-тов. М., Просвещение, 1986, 336 с.
64. Геометрия, ч. 2 (совместно с Л. С. Атанасяном). Учебное пособие для студентов пед. ин-тов. М., Просвещение, 1987, 352 с.
65. О ткани, ассоциированной с заданной сетью. Тезисы сообщений 9-й Всес. геом. конф., Кишинев, 1988, 27—28
66. К геометрии отображений подмногообразий евклидовых пространств. Тезисы докл. Всес. школы «Оптимальное управление. Геометрия. Анализ». Кемерово, 1988, 12
67. Геометрия дифференцируемых многообразий. Учебное пособие для студентов математических специальностей вузов. М., Высшая школа, 1989, 221 с.