A. F. Filippov, The uniqueness of generalized solutions, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 1969, Volume 10, Number 1, 217–222

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том X, № 1 Январь — Февраль 1969 г.

УДК 517.9

А. Ф. ФИЛИППОВ

ОБ ЕДИНСТВЕННОСТИ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ

1. О. А. Ладыженская в ([1]) дает определение обобщенного решения из L_2 первой краевой задачи для гиперболического уравнения 2-го порядка и доказывает его существование и единственность. В. А. Ильин в ([2]) отмечает, что единственность такого решения доказывается при более жестких требованиях на границу области, чем существование, и ставит вопрос о доказательстве единственности решения для области с произвольной границей. Этот вопрос рассматривается в статье ([3]). Однако там в рассуждениях имеется ошибка, которая будет указана ниже. Приведенные ниже примеры показывают, что при таком определении обобщенного решения из L_2, как в ([1]) и ([3]), единственности, вообще говоря, нет, так что результаты статьи ([3]) ошибочны. Будет указано, как надо изменить определение обобщенного решения, чтобы решение было единственным для области с произвольной границей. Для обобщенного решения из L_1 и кусочно гладкой границы подобные факты были известны (([4]), § 2).

2. Ошибка в статье ([3]) следующая. Там необоснованно утверждается (стр. 1262), что каждую функцию из W_2^2, равную 0 на границе области, можно приблизить сколь угодно точно в метрике W_2^2 функциями, каждая из которых принадлежит W_2^2 и равна 0 в некоторой полосе вблизи границы. Это неверно, так как, например, функцию $u = 1 - r^2$ в n-мерном шаре $r \leqslant 1$ нельзя приблизить указанным образом (так как ее производную $u_r = -2r$, не равную нулю на границе, нельзя приблизить в W_2^1 функциями, равными 0 вблизи границы).

Построим примеры, опровергающие утверждения статьи ([3]).

а) Пусть, как в ([5]), $\overset{0}{W}{}_2^1$ — замыкание в метрике W_2^1 множества непрерывно дифференцируемых в замыкании $\bar{G}$ области G функций, каждая из которых равна 0 вблизи границы Γ области G.

Обобщенным решением из L_2 (короче L_2-решением) задачи

$$\Delta u = -f \text{ в } G, \quad u|_\Gamma = 0 \tag{1}$$

в ([3]) называется функция $u \in L_2$, которая удовлетворяет равенству

$$\int_G (u\Delta\Phi + f\Phi)\, dx = 0 \tag{2}$$

для каждой $\Phi \in W_2^2 \cap \overset{0}{W}{}_2^1$.

В случае области G вида $0 < r < 1$, $0 < \varphi < \alpha$, где r, φ — полярные координаты, $\pi < \alpha \leqslant 2\pi$, такое решение не единственно, так как при любом $c = \mathrm{const}$ функция *

$$u = cv, \text{ где } v = (r^{-\nu} - r^{\nu}) \sin \nu\varphi, \quad \nu = \pi / \alpha, \tag{3}$$

является обобщенным решением этой задачи при $f \equiv 0$. Докажем это. Пусть $\Phi \in W_2^2 \cap \overset{0}{W}{}_2^1$. Так как $\Delta u = 0$, $u|_\Gamma = 0$ при $r > 0$, то по формуле Грина имеем

$$I_\rho = \int_0^\alpha \int_\rho^1 u \Delta \Phi r \, dr \, d\varphi = \int_0^\alpha (\Phi u_r - u \Phi_r)|_{r=\rho} \rho \, d\varphi. \tag{4}$$

Из $\Phi \in W_2^2$, $\Phi_r \in W_2^1$ следует

$$\int_0^\alpha |\Phi_r(\rho, \varphi)| \, d\varphi \leqslant \int_0^\alpha |\Phi_r(1, \varphi)| \, d\varphi + \int_0^\alpha \int_\rho^1 |\Phi_{rr}| \, dr \, d\varphi \leqslant C_0 + C_1 \sqrt{\ln \frac{1}{\rho}} \tag{5}$$

(двойной интеграл оценивается по неравенству Буняковского через интегралы от $r\Phi_{rr}^2$ и от r^{-1}). Далее, $\Phi \in \overset{0}{W}{}_2^1$, а значит, $\Phi = \lim \Phi_m$ (в W_2^1), $\Phi_m \in C^1$, $\Phi_m = 0$ вблизи Γ,

$$I^* = \int_0^\alpha |\Phi(\rho, \varphi)| \, d\varphi \leqslant \int_0^\alpha \int_0^\rho |\Phi_r(r, \varphi)| \, dr \, d\varphi$$

(получается предельным переходом из аналогичного неравенства для Φ_m). Отсюда и из (5) имеем

$$I^* \leqslant \int_0^\rho \int_0^\alpha |\Phi_r(r, \varphi)| \, d\varphi \, dr \leqslant c_2 \rho \left(1 + \sqrt{\ln \frac{1}{\rho}}\right). \tag{6}$$

Так как, в силу (3), $|u(\rho, \varphi)| \leqslant c\rho^{-\nu}$, $|u_r(\rho, \varphi)| \leqslant 2c\rho^{-\nu-1}$, то из (4)—(6) следует

$$|I_\rho| \leqslant \alpha \rho c [2\rho^{-\nu-1} c_2 \rho (1 + \sqrt{\ln \rho^{-1}}) + \rho^{-\nu}(c_0 + c_1 \sqrt{\ln \rho^{-1}})].$$

Значит, $I_\rho \to 0$ при $\rho \to 0$. Поэтому для функции u вида (3) и $f \equiv 0$ равенство (2) выполнено, т. е. при любом $c = \mathrm{const}$ u — обобщенное решение в смысле [3].

б) Пусть G — любая область в пространстве $x_1, \ldots, x_n$, Q — цилиндр $G \times [0 \leqslant t \leqslant l]$. Пусть, как в [6] (стр. 39), $\overset{0}{D}_1$ — замыкание в метрике W_2^1 множества непрерывно дифференцируемых функций, равных 0 вблизи боковой поверхности цилиндра Q, а $\overset{0}{D}_2$ — то же для функций, равных 0 вблизи боковой поверхности и верхнего основания $t = l$ цилиндра Q.

Обобщенным решением из L_2 (L_2-решением) задачи

$$u_{tt} = \Delta u + f \text{ в } Q, \; u|_{x \in \Gamma} = 0, \; u|_{t=0} = \varphi, \; u_t|_{t=0} = \psi \tag{7}$$

---

* Эта функция с подобной целью строилась в [4], § 2 и [5], гл. III, § 9.

в ([1]) и ([3]) называется функция $u(t,x) \in L_2(Q)$, удовлетворяющая равенству

$$\int\limits_Q (u\Phi_{tt} - u\Delta\Phi - f\Phi)\, dt\, dx + \int\limits_G (\varphi\Phi_t(0, x) - \psi\Phi(0, x))\, dx = 0 \tag{8}$$

для всех $\Phi \in W_2^2 \cap \overset{0}{D}_2$, $\Phi_t(l, x) = 0$.

Пусть G и v те же, что в примере а). Покажем, что $u = lv$ — обобщенное решение задачи (7) при $f \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$, $\psi \equiv v$. Имеем:

$$\int\limits_0^l u\Phi_{tt}\, dt - \psi\Phi(0, x) = \int\limits_0^l tv\, d\Phi_t - v\Phi(0, x) = -\int\limits_0^l v\Phi_t\, dt - v\Phi(0, x) = 0,$$

так как $\Phi = \Phi_t = 0$ при $t = l$. Далее,

$$\int\limits_Q u\Delta\Phi\, dt\, dx = \int\limits_G v\Delta\Psi\, dx, \quad \text{где } \Psi = \int\limits_0^l t\Phi\, dt.$$

Так как $\Psi \in W_2^2 \cap \overset{0}{W}{}_2^1$, то, как показано в примере а), $\int v\Delta\Psi dx = 0$. Итак, для $u = tv$ левая часть (8) равна 0, т. е. u — обобщенное решение.

Покажем, что для рассматриваемой задачи такое решение не единственно. Так как $f \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$, $\psi \equiv v \in L_2$, то, согласно ([6]) (ст. 77), задача (7) имеет обобщенное решение из W_2^1 (короче, W_2^1-решение). Оно является одновременно L_2-решением. Оно не совпадает с решением $u = tv$, так как, в силу (3), v_r не принадлежит $L_2(G)$, а значит, u не принадлежит $W_2^1(Q)$.

в) Та же функция $u = tv$ дает пример неединственности L_2-решения первой краевой задачи для уравнения $u_t = \Delta u + f$ при $f \equiv v$.

3. Сузим так определение L_2-решения (путем расширения класса допустимых Φ в (2) и (8)), чтобы L_2-решение было единственным и чтобы оно совпадало с W_2^1-решением, когда последнее существует.

Рассмотрим задачу

$$Su \equiv \sum_{i,\, j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u = -f(x), \quad u|_\Gamma = 0, \tag{9}$$

в конечной области G. Предполагается, что a_{ij}, $\partial a_{ij} / \partial x_k$, a_i, $\partial a_i / \partial x_i$, a ограничены, измеримы и

$$a_{ij} \equiv a_{ji}, \quad \sum_{i,\, j} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \alpha \sum_i \xi_i^2, \quad \alpha = \mathrm{const} > 0. \tag{10}$$

Пусть D^2 — множество тех функций u из $\overset{0}{W}{}_2^1$, которые имеют в G обобщенные 2-е производные и удовлетворяют условию $Su \in L_2$. В силу ([5]) (стр. 219—220), D^2-множество W_2^1-решений задачи (9) при всевозможных $f \in L_2$. Класс D^2 зависит от a_{ij} и не зависит от a_i и a в (9).

Назовем L_2-решением задачи (9) функцию $u \in L_2$, которая для каждой $\Phi \in D^2$ удовлетворяет равенству

$$\int_G (uS^*\Phi + f\Phi)\,dx = 0, \tag{11}$$

где S^* — дифференциальный оператор, сопряженный с S.

Так как $W_2{}^1$-решение всегда является L_2-решением (доказывается интегрированием по частям на основании теоремы 15 из ([6]), стр. 41), то L_2-решение существует по крайней мере при тех же условиях, что $W_2{}^1$-решение (см. ([5]), гл. III, § 4, § 5), т. е., например, при условии, что $f \in L_2$ и что $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи $Su = -\lambda u$, $u|_\Gamma = 0$. Последнее условие выполнено, в частности, если $a(x) \leqslant 0$.

Теорема 1. *Если $\lambda = 0$ не есть собственное значение задачи $Su = -\lambda u$, $u|_\Gamma = 0$, то L_2-решение задачи* (9) *единственно.*

Доказательство. Если u_1 и u_2 — два решения, то $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет равенству (11) при $f \equiv 0$. В силу условий, наложенных на задачу (9), сопряженная задача $S^*v = g$, $v|_\Gamma = 0$ имеет решение $v \in W_2{}^1$ при любом $g \in L_2$; v имеет обобщенные производные 2-го порядка и почти всюду удовлетворяет уравнению $S^*v = g$ (([5]), стр. 186 и 220). Значит, $v \in D^2$. Взяв в (11) $\Phi \equiv v$, получим, что u ортогонально каждой функции $g \in L_2$. Следовательно, $u \equiv 0$.

Следствие. *Если $f \in L_2$, то L_2-решение задачи* (9) *является также $W_2{}^1$-решением.*

4. Рассмотрим 1-ю краевую задачу для гиперболического уравнения в области $Q = G \times [0 \leqslant t \leqslant l]$ (G — произвольная конечная область):

$$u_{tt} + S_1 u + S_2(t)u = f, \quad u|_{x\in\Gamma} = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi, \quad u_t|_{t=0} = \psi; \tag{12}$$

$$S_1 u \equiv -\sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + u,$$

$$S_2(t)\,u \equiv -\sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i} - a(t,x)\,u - u.$$

Пусть a_{ij}, a_i, a удовлетворяют тем же условиям, что в п. 3, S_1 — самосопряженный оператор, отображающий D^2 в $L_2(G)$ (см. п. 3). Тогда операторы S_1 и $S_2(t)$ удовлетворяют условиям теоремы 2 из ([1]), где $H = L_2(G)$, кроме условия с); последнее будет выполнено, если $\partial^k / \partial t^k$ от a, a_i, $\partial a_i / \partial x_i$ ($k = 1, 2$) ограничены. Проверка выполнения этих условий проводится так же, как в ([1]), но теперь нельзя пользоваться оценкой (17) из ([1]), справедливой в случае гладкой Г. Вместо этого заметим, что из определения $W_2{}^1$-решения задачи Дирихле $S_1 v = f_1$ в G, $v|_\Gamma = 0$, и из (10) следует

$$\int_G \left(\alpha \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 + v^2\right)dx \leqslant \int_G \left(\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + v^2\right)dx = \int_G f_1 v\,dx.$$

Отсюда имеем для $v \in D^2$, $S_1 v = f_1$

$$\|S_2(t)v\|^2 \leqslant c\|v\|_1{}^2 \leqslant c_1(S_1 v, v) = c_1\|S_1{}^{1/2}\, v\|^2, \tag{13}$$

где норма $\| \quad \|$ и скалярное произведение $(\ , \ )$ — в пространстве $L_2(G)$, $\| \quad \|_1$ — в $W_2^1(G)$. Из (13) вытекает ограниченность оператора $S_2(t)S_1^{-1/2}$.

Значит, для задачи (12) справедливы утверждения теорем 2 и 2′ из ([1]) и леммы 10 из ([7]). Аналогичные утверждения справедливы для задачи

$$\Phi_{tt} + S_1\Phi + S_2^*(t)\Phi = g, \quad \Phi|_{x\in\Gamma} = 0, \quad \Phi|_{t=l} = 0, \quad \Phi_t|_{t=l} = 0; \quad (14)$$

$$S_2^*(t)\Phi \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i(t, x)\Phi) - a(t, x)\Phi - \Phi.$$

Пусть, как в ([1]), $D(A)$ — множество функций $v \in L_2(Q)$, имеющих v_t, S_1v, S_1v_t, непрерывные по t в метрике $L_2(G)$, и кусочно непрерывные (по t) v_{tt}, $S_1v_{tt} \in L_2(Q)$; для существования S_1v требуется $v \in D^2$ при каждом t.

Как в ([7]), L_2-решением задачи (12) назовем функцию $u \in L_2(Q)$, удовлетворяющую равенству

$$\int_G [u(\Phi_{tt} + S_1\Phi + S_2^*\Phi) - f\Phi]\, dt\, dx = \int_G [\psi\Phi(0, x) - \varphi\Phi_t(0, x)]\, dx \qquad (15)$$

для каждой $\Phi \in D(A)$ с $\Phi(l, x) = \Phi_t(l, x) = 0$.

Теорема 2. *L_2-решение задачи* (12) *единственно*; *оно совпадает с W_2^1-решением, если последнее существует.*

Доказательство. Если u_1 и u_2 — два решения, то $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет (15) при $f \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$, $\psi \equiv 0$. Для всевозможных $\Phi \in D(A)$ с $\Phi(l, x) = \Phi_t(l, x) = 0$ множество значений выражения $\Phi_{tt} + S_1\Phi + {}$ $+ 2S_2^*\Phi$ плотно в $L_2(Q)$ (аналогичное утверждение, но для задачи (12) установлено при доказательстве леммы 10 в ([7])). В силу (15), функция $u \in L_2(Q)$ должна быть ортогональна к каждой функции из этого плотного в $L_2(Q)$ множества, а следовательно, $u \equiv 0$. Единственность доказана. Если W_2^1-решение существует, то оно является L_2-решением; это доказывается с помощью интегрирования по частям.

5. Рассмотрим 1-ю краевую задачу для параболического уравнения

$$u_t + S_1u + S_2(t)u = f, \qquad u|_{x\in\Gamma} = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi \qquad (16)$$

при тех же условиях на S_1 и S_2, кроме требований на производные $\partial^2 / \partial t^2$. Если в определении L_2-решения (([1]), стр. 131) требовать от Φ только $\Phi(l, x) = 0$ и Φ, Φ_t, $S_1\Phi \in L_2(Q)$, то единственность L_2-решения можно доказать, как в теореме 2, пользуясь вместо леммы 10 теоремой 1 из ([1]).

Поступило
2.IV.1968

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ладыженская О. А., О нестационарных операторных уравнениях и их приложениях к линейным задачам математической физики, Матем. сб., 45, № 2 (1958), 123—158.

[2] Ильин В. А., О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений, Успехи матем. наук, 15, № 2 (1960), 97—154.

[3] Золотарев А. Е., О единственности обобщенных из L_2 решений простейших задач математической физики, Доклады Ак. наук СССР, 143, № 6 (1962), 1260—1263.

[4] Филиппов А. Ф., Плоская задача дифракции упругих волн, Диссертация, М., МГУ, 1953.

[5] Ладыженская О. А., Уральцева Н. И., Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, Наука, М., 1964.

[6] Ладыженская О. А., Смешанная задача для гиперболического уравнения, Гостехиздат, М., 1953.

[7] Ладыженская О. А., О решении нестационарных операторных уравнений, Матем. сб., 39, № 4 (1956), 491—521.