Челябинский физико-математический журнал. 2016. Т. 1, вып. 1. С. 52–58.

УДК 517.9

ОБОБЩЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА ГИЛЬБЕРТА НА ПРОСТРАНСТВА l_p

М. Г. Лепчинский

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
myth@csu.ru

В статье рассматривается обобщение известного неравенства Гильберта на случай суммируемых с p-й степенью последовательностей ($p \leq 2$). Полученный результат сформулирован в рамках операторного подхода. Также исследован случай $p > 2$, для которого удалось показать, что неравенство не выполняется.

Ключевые слова: *неравенство Гильберта, линейный ограниченный оператор, неравенство Минковского в интегральной форме, упорядочивание функции, интегральное транснеравенство, неравенство Харди — Литтлвуда.*

Введение

Знаменитое неравенство Гильберта [1], открытое в начале XX века, утверждает: существует такая константа $C > 0$, что для любых двух ненулевых суммируемых с квадратом последовательностей $a = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ и $b = (b_1, b_2, b_3, \dots)$ имеет место неравенство

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{a_n b_m}{n+m} < C \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Изначально это неравенство было доказано с константой $C = 2\pi$, но позже удалось показать, что оно верно и с константой $C = \pi$. В дальнейшем были доказаны различные обобщения неравенства Гильберта для последовательностей из l_2 (например, [2]).

В данной работе предложен подход, который позволяет обобщить указанное неравенство на случай последовательностей из пространства l_p в рамках операторной интерпретации.

1. Основной результат

Рассмотрим линейный оператор на пространстве l_p, заданный формальным степенным рядом

$$\mathcal{H} : l_p \ni (x_1, x_2, x_3, \dots) \to x_1 t + x_2 t^2 + x_3 t^3 + \dots, \quad t \in [0, 1].$$

Вопрос, который мы будем исследовать, заключается в том, в каком из функциональных пространств $L_q(0,1)$ лежит сумма этого ряда.

Предложение 1. *Неравенство Гильберта выполнено тогда и только тогда, когда оператор $\mathcal{H} : l_2 \to L_2(0,1)$ является ограниченным.*

Доказательство. Предположим, что неравенство Гильберта выполняется. Возьмём произвольную последовательность $x \in l_2$. Так как

$$|\mathcal{H}x(t)| = |x_1 t + x_2 t^2 + x_3 t^3 + \dots| \le |x_1|t + |x_2|t^2 + |x_3|t^3 + \dots \equiv \mathcal{H}|x|(t)$$

и $x_i^2 = |x_i|^2$, то без ограничения общности можно считать, что последовательность x состоит из неотрицательных членов. В таком случае заметим, что

$$\int_0^1 (\mathcal{H}x(t))^2\,dt = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{x_n x_m}{n+m+1},$$

если последний двойной ряд сходится. Но он действительно сходится в силу неравенства Гильберта:

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{x_n x_m}{n+m+1} \le \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{x_n x_m}{n+m} \le C\|x\|_2^2.$$

Отсюда мы заключаем, что

$$\|\mathcal{H}x\|^2_{L_2(0,1)} \le C\|x\|_2^2,$$

т. е. оператор $\mathcal{H} : l_2 \to L_2(0,1)$ является ограниченным.

Теперь предположим, что оператор $\mathcal{H} : l_2 \to L_2(0,1)$ является ограниченным. Рассмотрим произвольные последовательности a, $b \in l_2$ и докажем абсолютную сходимость ряда

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{a_n b_m}{n+m}.$$

Для этого будем без ограничения общности полагать $a_i, b_i \ge 0$ для $i = 1, 2, 3, \dots$ Рассмотрим $a^n = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, 0, 0, 0, \dots)$ и $b^n = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, 0, 0, 0, \dots)$. Имеем сходимость $a^n \to a$ и $b^n \to b$ в l_2 при $n \to \infty$. Поэтому $\mathcal{H}a^n \to \mathcal{H}a$ и $\mathcal{H}b^n \to \mathcal{H}b$ в силу непрерывности оператора $\mathcal{H}$. В таком случае при $n \to \infty$

$$(\mathcal{H}a^n, \mathcal{H}b^n) \to (\mathcal{H}a, \mathcal{H}b) \le \|\mathcal{H}\|^2\,\|a\|_2\,\|b\|_2.$$

Но

$$(\mathcal{H}a^n, \mathcal{H}b^n) = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} a_i t^i \sum_{j=1}^{n} b_j t^j\;dt \to \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{a_n b_m}{n+m+1},$$

откуда и следует неравенство Гильберта с константой $C = \dfrac{3}{2}\|\mathcal{H}\|^2$. □

Доказанное предложение, увязывающее выполнение неравенства Гильберта с ограниченностью оператора $\mathcal{H}$, даёт прямой путь к обобщению неравенства Гильберта на случай пространства l_p. А именно, мы установим справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. *Оператор $\mathcal{H} : l_p \to L_q(0,1)$, где $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, является ограниченным при $p \le 2$, и его норма не превосходит $\Gamma(1/q)$.*

Заметим, что указанное значение оценки нормы оператора $\mathcal{H}$ в случае $p = 2$ соответствует точному значению в неравенстве Гильберта.

Для доказательства теоремы 1 мы будем исследовать сопряжённый оператор $\mathcal{H}^* : L_p(0,1) \to l_q$, заданный равенством

$$\mathcal{H}^* f = \left(\int_0^1 f(t) t^n \, dt \right)_{n=1}^{\infty}.$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Тогда верны следующие утверждения:*

а) *Оператор* $\mathcal{H}^* : L_p(0,1) \to l_q$ *является ограниченным при* $p \le 2$, *и его норма не превосходит* $\Gamma(1/q)$.

б) *Если* $q' < q$, *то последовательность* $\mathcal{H}^* x$ *может не лежать в* $l_{q'}$.

в) *Если* $p > 2$, *то оператор* $\mathcal{H}^* : L_p(0,1) \to l_{q'}$ *является ограниченным для* $q' > q$ *и не является таковым при* $q' = q$.

Замечание 1. Из того, что сопряжённый оператор $\mathcal{H}^*$ ограничен, сразу будет следовать, что оператор $\mathcal{H}$ также ограничен и их нормы совпадают. Таким образом, теорема 1 следует из первого утверждения теоремы 2.

Нам понадобится несколько вспомогательных определений и фактов относительно перестановок функций [3].

Определение 1. Предположим, что функция $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ является измеримой. Будем говорить, что функция $f^* : (0,1) \to \mathbb{R}$ является возрастающей (убывающей) перестановкой функции f, если функция f^* возрастает (убывает) на $(0,1)$ и для любого $c \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$\mu\{t \in (0,1) : \ f(t) < c\} = \mu\{t \in (0,1) : \ f^*(t) < c\},$$

где μ — мера Лебега.

Замечание 2. Если f^* — это перестановка f, то эти две функции неразличимы с точки зрения вычисления интеграла Лебега. В частности,

$$\int_0^1 f(t) \, dt = \int_0^1 f^*(t) \, dt.$$

Лемма 1. *Для любой измеримой функции* $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ *существует её перестановка (как в возрастающем порядке, так и в убывающем).*

Доказательство. Рассмотрим функцию $g : (0,1) \to \mathbb{R}$, заданную равенством

$$g(x) = \inf\{c \in \mathbb{R} : \ \mu\{t : \ f(t) < c\} \ge x\}.$$

Легко видеть, что функция g монотонно возрастает на $(0,1)$. Заметим, что

$$g(x) < C \Longleftrightarrow \mu\{t : \ f(t) < C\} \ge x.$$

Отсюда следует равенство $\mu\{x : \ g(x) < C\} = \mu\{t : \ f(t) < C\}$, которое доказывает, что g — это возрастающая перестановка f. Для перестановки в убывающем порядке достаточно рассмотреть функцию $g(1-t)$. □

Приведём без доказательства факт, который понадобится нам при доказательстве основного результата.

Лемма 2 (неравенство Харди — Литтлвуда [3]). *Предположим, $f \in L_1(0,1)$, $h \in C[0,1]$, функции f_1^* и f_2^* — это две перестановки функции f в убывающем и возрастающем порядке соответственно, а функция h является монотонно возрастающей. Тогда выполнено транснеравенство*

$$\int_0^1 f_1^*(t)h(t)\,dt \le \int_0^1 f(t)h(t)\,dt \le \int_0^1 f_2^*(t)h(t)\,dt.$$

2. Доказательство основного результата

Пусть $f \in L_p(0,1)$. Заметим, что в силу оценки по модулю и неравенства Харди — Литтлвуда выполняется следующая цепочка неравенств:

$$\left|\int_0^1 f(t)t^n\,dt\right| \le \int_0^1 |f(t)|t^n\,dt \le \int_0^1 |f(t)|^* t^n\,dt,$$

где $|f|^*$ — это возрастающая перестановка функции $|f|$. Ещё нам известно, что перестановка не меняет интеграла Лебега, поэтому нормы $|f|$ и $|f|^*$ совпадают в пространстве $L_p(0,1)$. Это означает, что без ограничения общности мы можем считать функцию f неотрицательной и возрастающей на $(0,1)$.

Для удобства дальнейших выкладок сделаем замену $t \to 1-t$, а $f(1-t)$ переобозначим за $f(t)$. Таким образом, f будет неотрицательной убывающей функцией на $(0,1)$. Теперь продолжим функцию f на луч $[1,+\infty)$ значением 0 и будем трактовать её как элемент пространства $L_p(0,+\infty)$.

Доказательство. a). Пусть $p \le 2$. Имеем

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1 f(t)(1-t)^n\,dt\right)^q\right)^{1/q} \le \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1 f(t)e^{-nt}\,dt\right)^q\right)^{1/q}.$$

Подынтегральное выражение является монотонно убывающей функцией аргумента n, поэтому возможно оценить сумму через интеграл по этой переменной:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1 f(t)e^{-nt}\,dt\right)^q\right)^{1/q} \le \left(\int_0^{\infty} dn\left(\int_0^1 f(t)e^{-nt}\,dt\right)^q\right)^{1/q}.$$

Сделаем замену переменных $t = \tau/n$ во внутреннем интеграле. Получим

$$\left(\int_0^{\infty} dn\left(\int_0^n \frac{1}{n} f(\tau/n)e^{-\tau}\,d\tau\right)^q\right)^{1/q}.$$

Заменяя во внутреннем интеграле верхний предел n на $+\infty$, получаем такую оценку сверху:

$$\left(\int_0^{\infty} dn\left(\int_0^{\infty} \frac{1}{n} f(\tau/n)e^{-\tau}\,d\tau\right)^q\right)^{1/q}.$$

Применим ко всему выражению неравенство Минковского в интегральной форме:

$$\left(\int_0^{\infty} dn\left(\int_0^{\infty} \frac{1}{n} f(\tau/n)e^{-\tau}\,d\tau\right)^q\right)^{1/q} \le \int_0^{\infty} d\tau\left(\int_0^{\infty} \frac{1}{n^q} f^q(\tau/n)e^{-\tau q}\,dn\right)^{1/q}.$$

Теперь в полученном интеграле делаем замену $n = \tau/s$ и получаем следующее:

$$\int_0^\infty e^{-\tau} d\tau \left(\int_0^\infty s^{q-2} \tau^{1-q} f^q(s) ds \right)^{1/q} = \int_0^\infty e^{-\tau} \tau^{-1/p} d\tau \cdot \left(\int_0^\infty s^{q-2} f^q(s)\, ds \right)^{1/q}.$$

Первый множитель есть не что иное, как $\Gamma\,(1/q)$. Осталось убедиться, что второй множитель не превосходит $\|f\|_{L_p(0,1)}$.

Так как функция f является убывающей, то имеет место оценка

$$\|f\|^p_{L_p(0,1)} = \int_0^1 f^p(t) dt \geq \int_0^s f^p(t)\, dt \geq s \cdot f^p(s).$$

Поэтому в силу неравенства $q \geq 2$

$$\begin{aligned}\left(\int_0^\infty s^{q-2} f^q(s)\, ds \right)^{1/q} &= \left(\int_0^\infty (s \cdot f^p(s))^{q-2} f^{q-p(q-2)}(s)\, ds \right)^{1/q} \\ &\leq \left(\int_0^\infty \|f\|^{p(q-2)} f^p(s)\, ds \right)^{1/q} = \|f\|_{L_p(0,1)}.\end{aligned}$$

Докажем теперь утверждения б) и в). Рассмотрим функцию $f(t)$, равную $t^{-1/p}|\ln t|^{-\alpha}$ (где α чуть больше $1/p$) при $t < 1/2$ и нулю при $t > 1/2$. Функция f лежит в пространстве $L_p(0,1)$. Исследуем, в какую последовательность переводит её оператор $\mathcal{H}^*$. В силу неравенства Бернулли имеем

$$\begin{aligned}(H^* f)_n &= \int_0^{1/2} \frac{(1-t)^n dt}{t^{1/p}|\ln t|^\alpha} \geq \int_0^{1/n} \frac{(1-nt)dt}{t^{1/p}|\ln t|^\alpha} \\ &= \int_0^{1/n} t^{-1/p}|\ln t|^{-\alpha} dt - n \int_0^{1/n} t^{1/q} |\ln t|^{-\alpha} dt = I_n^1 - I_n^2.\end{aligned}$$

После замены переменных $t = e^{-\tau}$ и растяжения получаем

$$\begin{aligned}I_n^1 = \int_0^{1/n} t^{-1/p}|\ln t|^{-\alpha} dt = \int_{\ln n}^\infty e^{-\tau/q} \tau^{-\alpha} d\tau &= q^{1-\alpha} \int_{\frac{1}{q}\ln n}^\infty e^{-s} s^{-\alpha} ds \\ &= q^{1-\alpha} \Gamma\left(1-\alpha, \frac{1}{q}\ln n\right),\end{aligned}$$

где $\Gamma(a,x)$ — верхняя неполная гамма-функция. Аналогично получаем, что

$$\begin{aligned}I_n^2 = n \int_0^{1/n} t^{1/q}|\ln t|^{-\alpha} dt &= n \left(1 + \frac{1}{q}\right)^{\alpha-1} \int_{\left(1+\frac{1}{q}\right)\ln n}^\infty e^{-s} s^{-\alpha} ds \\ &= n \left(1 + \frac{1}{q}\right)^{\alpha-1} \Gamma\left(1-\alpha, \left(1+\frac{1}{q}\right)\ln n\right).\end{aligned}$$

Для верхней неполной гамма-функции $\Gamma(a,x)$ известна асимптотика при $x \to +\infty$ [4]:

$$\Gamma(a,x) \sim x^{a-1} e^{-x}.$$

Поэтому из полученных выражений для I_n^1 и I_n^2 получаем

$$I_n^1 \sim q^{1-\alpha} \left(\frac{1}{q}\ln n\right)^{-\alpha} e^{-\frac{1}{q}\ln n} = \frac{q}{(\ln n)^\alpha n^{1/q}},$$

$$I_n^2 \sim n\left(1+\frac{1}{q}\right)^{\alpha-1}\left(\left(1+\frac{1}{q}\right)\ln n\right)^{-\alpha} e^{-\left(1+\frac{1}{q}\right)\ln n} = \frac{q}{(q+1)(\ln n)^{\alpha} n^{1/q}}.$$

Таким образом, используя ранее полученное неравенство, имеем

$$(\mathcal{H}^* f)_n \geq I_n^1 - I_n^2 \sim \frac{q^2}{(q+1)(\ln n)^{\alpha} n^{1/q}}.$$

Если взять произвольное $q' < q$, то из полученной нижней асимптотической оценки заключаем, что $\mathcal{H}^* f \notin l_{q'}$. Это доказывает пункт б).

В случае $p > 2$ значение q оказывается меньше p, поэтому при $\dfrac{1}{p} < \alpha < \dfrac{1}{q}$ получаем $\mathcal{H}^* f \notin l_q$. Осталось показать, что $\mathcal{H}^* f \in l_{q'}$ при $q' > q$. Действительно, по неравенству Гёльдера

$$(\mathcal{H}^* f)_n = \int_0^1 f(t) t^n \, dt \leq \|f\|_{L_p(0,1)} \cdot \|t^n\|_{L_q(0,1)} = \frac{1}{(qn+1)^{1/q}} \|f\|_{L_p(0,1)},$$

откуда и следует требуемое утверждение. □

Список литературы

1. **Michael Steele, J.** The Cauchy — Schwarz Master Class: an Introduction to the Aart of Mathematical Inequalities / J. Michael Steele. — Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2004. — 318 p.
2. **Montgomery, H. L.** Hilbert's inequality / H. L. Montgomery, R. C. Vaughan // J. London Math. Soc. — 1974. — Vol. 8, no. 2. — P. 73–82.
3. **Lieb, E. H.** Analysis: Graduate Studies in Mathematics / E. H. Lieb, M. Loss. — Vol. 14. — 2nd ed. — Providence : American Mathematical Soc., 2001. — 336 p.
4. Digital Library of Mathematical Functions. Incomplete Gamma Functions. [Электронный ресурс]. — URL: http://dlmf.nist.gov/8.11.i (дата обращения: 14.11.2015).

Поступила в редакцию 14.11.2015
После переработки 04.02.2016

Сведения об авторе

Лепчинский Михаил Германович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: myth@csu.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2016. Vol. 1, iss. 1. P. 52–58.

HILBERT'S INEQUALITY GENERALIZATION TO l_p SPACES

M. G. Leptchinski

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
myth@csu.ru

A generalization to famous Hilbert's inequality is considered for the case of summable with p-th degree sequences ($p \leq 2$). New result is obtained by means of the operator approach. It is shown that the inequality can't be extended to the case $p > 2$.

Keywords: *Hilbert's inequality, linear bounded operator, Minkowski's inequality integral form, function's rearrangements, integral inequality, Hardy — Littlewood inequality.*

References

1. **Michael Steele J.** *The Cauchy — Schwarz Master Class: an Introduction to the Art of Mathematical Inequalities.* Cambridge, Cambridge University Press, 2004. 318 p.
2. **Montgomery H.L., Vaughan R.C.** Hilbert's inequality. *Journal of the London Mathematical Society*, 1974, vol. 8, no. 2, pp. 73–82.
3. **Lieb E.H., Loss M.** *Analysis: Graduate Studies in Mathematics.* Vol. 14, 2nd ed. Providence, American Mathematical Society, 2001. 336 p.
4. *Digital Library of Mathematical Functions. Incomplete Gamma Functions.* Available at: http://dlmf.nist.gov/8.11.i, accepted 14.11.2015.

Article received 14.11.2015
Corrections received 04.02.2016