А. А. Болотов, А. Шайеб, О метрических алгоритмах классификации, *Докл. АН СССР*, 1987, том 297, номер 3, 527–530

З а м е ч а н и е 3. Схема применима для любых размерностей Ω и других граничных условий на Г. Предпринимаются попытки ее численной реализации на тестовых задачах размерности 1 и 2.

Я глубоко признателен участникам семинара по обратным задачам под руководством А.С. Благовещенского за ценные советы и обсуждения. Приношу благодарность С.А. Авдонину, познакомившему меня с работами [2, 3].

Военно-морская академия им. А.А. Гречко
Ленинград

Поступило
29 IV 1986

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лионс Ж.-Л.* – УМН, 1985, т. 40, вып. 4, с. 55–68. 2. *Russell D.L.* – SIAM J. Control, 1971, vol. 9, № 1, p. 29–42. 3. *Russell D.L.* – SIAM Rev. 1978, vol. 20, № 4, p. 639–739. 4. *Hörmander L.* Linear partial differential operators. B.: Göttingen; Heidelberg: Springer–Verlag, 1963. 284 p. 5. *Березанский Ю.М.* Тр. ММО, 1958, т. 7, с. 3–62.

УДК 519.7 МАТЕМАТИКА

А.А. БОЛОТОВ, А. ШАЙЕБ (Сирия)

О МЕТРИЧЕСКИХ АЛГОРИТМАХ КЛАССИФИКАЦИИ

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 20 I 1986)

В настоящее время накопилось достаточное количество различных практических алгоритмов распознавания, в связи с чем возникает необходимость в теоретическом исследовании их свойств. Такие исследования позволяют лучше понимать возможности распознавания в тех или иных прикладных задачах, проводить предварительную обработку материала обучения и сокращение исходного множества признаков с целью повышения качества процедуры распознавания и т.д. В работе исследуются свойства линейных метрических алгоритмов классификации, образующих важный подкласс метрических алгоритмов, в основу которых положена идея "близости" распознаваемого объекта к своему классу, которая формально уточняется в пространстве признаков в метрических терминах.

Будем рассматривать следующий вариант постановки задачи бинарной классификации с эталонами. Пусть имеются два класса объектов или явлений $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$ и некоторые представители (эталоны) $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ этих классов, которые изучались по ряду числовых признаков. Пусть упорядоченное множество признаков есть множество $\{1, 2, \ldots, n\}$, D обозначает множество $\{-1, 1\}$, а $\mathbf{D}$ есть сегмент числовой оси $[-1, 1]$. Тогда результатом изучения объекта a является его описание – вектор $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, где $a_i \in \mathbf{D}$ определяет меру выраженности признака i у объекта a, $1 \leqslant i \leqslant n$. Таким образом, информация о классах $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$ представлена эталонными множествами M_1 и M_2 – множествами описаний эталонных объектов из $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ соответственно. Предполагается, что в качестве эталонов выбираются только такие, для которых справедливо $M_1 \subseteq D^n$ и $M_2 \subseteq D^n$, где D^n – множество вершин n-мерного куба, т.е. для эталонов наличие (отсутствие) признака кодируется числом 1 (-1). Исходя из имеющейся информации, требуется указать решающее правило (алгоритм), которое по описанию $\mathbf{x} \in \mathbf{D}^n$ произвольного объекта x правильно относило бы этот объект к тому из классов, который его содержит.

Для решения поставленной задачи предлагается и изучается следующая модель алгоритмов. Пусть $\Phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ — вещественнозначная функция, называемая потенциалом "поля", создаваемого вершиной $\mathbf{a}$ в точке $\mathbf{x}$ пространства $\mathbf{D}^n$. Будем предполагать, что потенциал $\Phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ является:

а) центрально-симметричным (относительно точки $\mathbf{a}$), т.е.

$$\Phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = f_\Phi(\rho(\mathbf{a}, \mathbf{x})),$$

где f_Φ — некоторая действительная функция (в качестве функции ρ выступает метрика ρ_H, порожденная нормой $\|\mathbf{x}\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, и полуметрика ρ_E^2, где ρ_E — евклидова метрика гиперкуба $\mathbf{D}^n$);

б) аддитивным, т.е. потенциал $\Phi_M(\mathbf{x})$, создаваемый в точке $\mathbf{x}$ множеством вершин M, вычисляется по формуле $\Phi_M(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{a} \in M} \Phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$;

в) убывающим, т.е. функция f_Φ из а) является убывающей.

Потенциал Φ такого типа будем называть *метрическим*. Каждый такой потенциал определяет метрический алгоритм классификации $\mathfrak{A}_\Phi$ со следующим решающим правилом R: объект x относится к классу $\mathcal{K}_1$ ($\mathcal{K}_2$), если

$$R(\mathbf{x}) = \frac{1}{|M_1|} \Phi_{M_1}(\mathbf{x}) - \frac{1}{|M_2|} \Phi_{M_2}(\mathbf{x}) < 0, \qquad R(\mathbf{x}) > 0;$$

в случае $R(\mathbf{x}) = 0$ решение не принимается.

Отметим, что многие алгоритмы распознавания, известные как на практике (например, алгоритм голосования по всем выборкам длины k [1]), так и в теории распознавания (например, алгоритмы, описываемые в рамках Г-моделей [2]), могут быть описаны как метрические алгоритмы.

В общем случае уравнение $R(\mathbf{x}) = 0$ определяет в гиперкубе $\mathbf{D}^n$ некоторую гиперповерхность, которую будем называть разделяющей. В случае, когда для любых множеств M_1 и M_2 метрический алгоритм классификации $\mathfrak{A}$ определяет в качестве разделяющей гиперповерхности гиперплоскость, будем называть алгоритм $\mathfrak{A}$ *алгоритмом линейного типа*. Метрический алгоритм $\mathfrak{A}_\Phi$ будем называть *линейным метрическим алгоритмом классификации*, если функция f_Φ является линейной функцией.

Покажем, что между двумя введенными понятиями линейности (по форме и по содержанию работы алгоритма) существует непосредственная связь. Справедлива

Теорема 1. *Любой линейный метрический алгоритм является алгоритмом линейного типа.*

В классе метрических алгоритмов $\mathfrak{A}_\Phi$ с дважды дифференцируемой функцией f_Φ теорема 1 допускает следующее обращение.

Теорема 2. *Пусть $n \geqslant 3$ и f_Φ — дважды дифференцируемая функция; тогда метрический алгоритм классификации $\mathfrak{A}_\Phi$ линейного типа является линейным метрическим алгоритмом.*

Замечание. В случае $n = 2$ можно указать такую нелинейную (дважды дифференцируемую) функцию f_Φ, для которой метрический алгоритм $\mathfrak{A}_\Phi$ не будет алгоритмом линейного типа.

В случае линейной функции $f_\Phi(t) = -t$ линейный метрический алгоритм $\mathfrak{A}_\Phi$ будем обозначать буквой H. Как следует из доказательства теоремы 1, любой линейный метрический алгоритм определяет в качестве разделяющей ту же самую гиперповерхность, что и алгоритм H. Таким образом, алгоритм H является стандартным представителем класса линейных метрических алгоритмов. Уравнение разделяющей гиперплоскости для алгоритма H (и, следовательно, для любого линейного метрического алгоритма) может быть явно выписано.

Пусть $\mathbf{p}_i = \frac{1}{|M_i|} \sum_{\mathbf{a} \in M_i} \mathbf{a}, i = 1, 2$ (векторы $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$, очевидно, представляют собой координаты центров тяжести систем материальных точек из эталонных множеств M_1 и M_2 с единичным распределением масс). Вектор $\mathbf{q} = ½ (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$ будем называть характеризационным вектором для множеств M_1 и M_2.

Следствие. *Уравнение разделяющей гиперплоскости имеет вид* $(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = 0$.

Введем понятия сильной и слабой разделимости множеств, которые характеризуют влияние выбора эталонов на качество распознавания. Пусть $M_1, M_2 \subseteq D^n$ и $M_1' \subseteq M_1$, $M_2' \subseteq M_2$ рассматриваются как эталонные множества. При правильной классификации (при помощи алгоритма H) всех элементов из $M_1 \cup M_2$ будем говорить о слабой разделимости множеств M_1 и M_2 посредством (эталонных) множеств M_1' и M_2' (в случае $M_1' = M_1$, $M_2' = M_2$ будем говорить просто о слабой разделимости множеств M_1 и M_2). В случае, когда слабая разделимость M_1 и M_2 возникает посредством любых (непустых) эталонных множеств $M_1' \subseteq M_1$ и $M_2' \subseteq M_2$, скажем, что множества M_1 и M_2 являются сильно разделимыми. Пусть d_i означает диаметр множества M_i, $i = 1, 2$, а R – расстояние между M_1 и M_2 (в метрике ρ_H). Справедлива

Теорема 3. *При выполнении неравенств* $d_i/R < |M_i| / (|M_i| - 1)$, $i = 1, 2$, *множества* M_1 *и* M_2 *слабо разделимы*; *при выполнении неравенств* $d_i/R < 1$, $i = 1, 2$, *множества* M_1 *и* M_2 *сильно разделимы.*

Слабую разделимость множеств можно охарактеризовать и в терминах евклидовой нормы. Обозначим

$$R_i = \max_{\mathbf{a} \in M_i} \|\mathbf{a} - \mathbf{p}_i\|, \quad i = 1, 2.$$

Имеет место

Теорема 4. *При выполнении неравенств*

$$R_i < \|\mathbf{q}\| + (-1)^i \frac{\|\mathbf{p}_2\|^2 - \|\mathbf{p}_1\|^2}{4\|\mathbf{q}\|}, \quad i = 1, 2,$$

множества M_1 *и* M_2 *слабо разделимы.*

Отметим, что оценки, приведенные в теоремах 3 и 4, усилить, вообще говоря, нельзя. Справедлива также

Теорема 5. *Множества* M_1 *и* M_2 *сильно разделимы тогда и только тогда, когда для любых одноэлементных подмножеств* $\{\mathbf{a}\} \subseteq M_1$ *и* $\{\mathbf{b}\} \subseteq M_2$ *они слабо разделимы посредством* $\{\mathbf{a}\}$ *и* $\{\mathbf{b}\}$.

Будем далее предполагать множества $M_1 \subseteq D^n$ и $M_2 \subseteq D^n$ слабо разделимыми. Обозначим через M множество $M_1 \cup \{-\mathbf{b} | \mathbf{b} \in M_2\}$. Рассматриваемые множества из D^n удобно задавать в виде $(-1, 1)$-матриц, которые будем обозначать теми же буквами, что и соответствующие множества. Пусть $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ – характеризационный вектор для M_1 и M_2. Введем обозначения:

$$Q = \max_i |q_i|, \qquad q = \min_{\mathbf{a} \in M} (\mathbf{q}, \mathbf{a}).$$

При задании матриц M_1 и M_2 могут происходить ошибки (замены 1 на -1 и наоборот), при этом матрицы M_1 и M_2 трансформируются в матрицы M_1^* и M_2^* соответственно. Кроме того, такие ошибки возникают и при описании исходных объектов из классов $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$. Представляет интерес изучение влияния ошибок на качество распознавания. Приведем в этом направлении следующий результат. Скажем, что распознавание M_1 и M_2 устойчиво, если M_1^* и M_2^* слабо разделимы посредством M_1 и M_2. Имеет место

Теорема 6. *Если в каждой строке матриц M_1 и M_2 число ошибок меньше, чем $q/(2Q)$, то распознавание множеств M_1 и M_2 устойчиво.*

На этапе предварительной обработки материала обучения большое значение имеет задача сокращения исходного множества признаков. Дадим формальное уточнение постановки этой задачи. Обозначим: $\mathbf{d} = \sum_{\mathbf{a} \in M} \mathbf{a}$ — вектор сумм столбцов матрицы M. Число $b = \min_{\mathbf{a} \in M} (\mathbf{a}, \mathbf{d})$ назовем порогом распознавания для M_1 и M_2. Пусть $\Pi = \{1, \ldots, n\}$ — исходное множество признаков и $\mathcal{M}$ — произвольная матрица с n столбцами. Если $\Pi' \subseteq \Pi$ есть некоторое подмножество признаков, то $\tilde{\mathcal{M}}$ — проекция матрицы $\mathcal{M}$ на множество признаков Π' — есть матрица, состоящая из тех столбцов исходной матрицы $\mathcal{M}$, номера которых есть элементы Π'. Сформулируем задачу сокращения множества признаков как задачу распознавания свойства:

Сокращение поля признаков. Условие. Заданы две эталонные $(-1, 1)$-матрицы M_1 и M_2 размера $m \times n$ с порогом распознавания b, натуральные $k \leqslant n$ и $c \leqslant b$.

Вопрос. Существует ли такое подмножество признаков Π', что $|\Pi'| \leqslant k$ и порог распознавания для матриц $\tilde{M}_1$ и $\tilde{M}_2$ не меньше, чем c?

Теорема 7. *Задача "Сокращение поля признаков" является NP-полной.*

Для решения поставленной задачи предложены приемлемые приближенные алгоритмы, для которых получены оценки погрешности в их работе.

В заключение отметим, что на основе проведенного исследования разработан линейный метрический алгоритм SH, включающий процедуры предварительной обработки эталонных множеств и сокращения множества признаков, которые приводили в решаемых задачах классификации к повышению качества распознавания.

Авторы выражают благодарность проф. В.Б. Кудрявцеву за помощь при выполнении этой работы.

Московский энергетический институт

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Поступило 30 IV 1986

ЛИТЕРАТУРА

1. *Константинов Р.М., Королева З.Е., Кудрявцев В.Б.* В сб.: Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1976, вып. 31, с. 5–33. 2. *Журавлев Ю.И.* В сб.: Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1978, вып. 33, с. 5–70.