E. N. Ogorodnikov, Об одной характеристической задаче для вырождающегося нагруженного гиперболического уравнения в трапецевидной области, *Matem. Mod. Kraev. Zadachi*, 2004, Part 3, 176–179

УДК 517.956

Е.Н. Огородников

ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ НАГРУЖЕННОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ТРАПЕЦЕВИДНОЙ ОБЛАСТИ

Пусть $m > 0$; $a, b \in R$. Рассмотрим уравнение

$$L_m(u) \equiv y^{2n+1}u_{xx} - yu_{yy} + y^m au_x + bu_y + \lambda y^{b+m+1}u\left[P(x,y)\right] = 0 \qquad (1)$$

в области Ω, ограниченной его характеристиками $\xi = 0$, $\xi = 1$, $\eta = 1$ и линией $y = 0$, где $\xi = x + \frac{1}{m+1}y^{m+1}$, $\eta = -x + \frac{1}{m+1}y^{m+1}$; $u = u(x,y)$ - искомая функция, а $u\left[P(x,y)\right]$ ее значения при любых $x, y \in \Omega$ в заданных определенным образом точках P многообразия $x = 0$, принадлежащего области $\overline{\Omega}$.

Пусть известны значения искомой функции $u(x,y)$ на двух произвольных характеристиках из одного и того же семейства $\xi = x + \frac{1}{m+1}y^{m+1} = const$ при $y \geq 0$. Будем считать для определенности, что это характеристики $\xi = 0$ и $\xi = 1$ и

$$u(x,y)\Big|_{\xi=0} = \varphi_0(y), \; u(x,y)\Big|_{\xi=0} = \varphi_1(y)$$

– известные функции. Задать искомое решение на характеристиках можно различными способами. Без ограничения общности можно считать, что в части H_1 области Ω, ограниченной характеристиками $\xi = 0$, $\xi = 1$, $\eta = 0$ и $\eta = 1$, значения $u(x,y)$ на характеристиках $\xi = 0$ и $\xi = 1$ заданы следующим образом:

$$u\left[\theta_0^-(y)\right] = \varphi_0(y), \; u\left[\theta_1^+(y)\right] = \varphi_1(y), \; y \in \left[0, (m+1)^{\frac{1}{m+1}}\right], \qquad (2)$$

где $\theta_0^-(y) = \left(-\frac{1}{2(m+1)}y^{m+1}; 2^{-\frac{1}{m+1}}y\right)$,

$$\theta_1^+(y)=\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m+1}y^{m+1}\right);\left[\frac{m+1}{2}\left(1+\frac{1}{m+1}y^{m+1}\right)\right]^{\frac{1}{m+1}}\right)$$ – африксы точек пересечения характеристик $\xi=0$ и $\xi=1$ с характеристикой $\eta=const$, проходящей через произвольную точку $y\in\left[0,(m+1)^{\frac{1}{m+1}}\right]$ линии $x=0$. Пусть

$$P\left(0;\left[(m+1)\eta\right]^{\frac{1}{m+1}}\right)\equiv P\left(0;\left[(m+1)\left(-x+\frac{1}{m+1}y^{m+1}\right)\right]^{\frac{1}{m+1}}\right).$$

В характеристических координатах, указанных выше, уравнение (1) приводится к виду

$$U_{\xi\eta}+\frac{m-a-b}{2(m+1)(\eta+\xi)}U_\xi+\frac{m+a+b}{2(m+1)(\eta+\xi)}U_\eta=$$
$$=\frac{\lambda}{4}\left[\frac{m+1}{2}(\eta+\xi)\right]^{\frac{b-m}{m+1}}U(\eta,\eta), \tag{3}$$

а условия (2) будут следующими:

$$U(0,\eta)=\varphi_0(\eta),\, U(1,\eta)=\varphi_1(\eta),\quad \eta\in[0,1]. \tag{4}$$

В случае $a+b=m$ удается обосновать существование единственного в H_1 решения уравнения (1) с условиями (2) или, что то же самое, уравнения (3) с условиями (4) при некоторых ограничениях на заданные функции $\varphi_0(y)$ и $\varphi_1(y)$.

Действительно, в указанном частном случае задача Гурса с данными

$$U(0,\eta)=\varphi_0(\eta),\, U(\xi,0)=\psi_0(\xi),\qquad \xi,\eta\in[0,1]$$

редуцируется к нагруженному интегральному уравнению

$$U(\xi,\eta)=\psi_0(\xi)+\int_0^\eta\left(\frac{s}{s+\xi}\right)^\alpha\varphi_0'(s)ds+\frac{\lambda}{4}\left(\frac{2}{m+1}\right)^\alpha\xi\int_0^\eta\frac{U(s,s)ds}{(s+\xi)^\alpha}, \tag{5}$$

где $\alpha=\dfrac{a}{m+1}$.

Переподчиняя $U(\xi,\eta)$ в (5) второму условию в (4), получим равенство

$$\psi_0(1)+\int_0^{\eta}\left(\frac{s}{s+1}\right)^{\alpha}\varphi_0'(s)ds+\frac{\lambda}{4}\left(\frac{2}{m+1}\right)^{\alpha}\int_0^{\eta}\frac{U(s,s)ds}{(s+1)^{\alpha}}=\varphi_1(\eta), \tag{6}$$

из которого, очевидно, не исключается функция $\psi_0(\xi)$. Однако, дифференцируя (6) по η, получим необходимое для разрешимости поставленной задачи условие

$$\frac{\lambda}{4}\left(\frac{2}{m+1}\right)^{\alpha}U(\eta,\eta)=(\eta+1)^{\alpha}\varphi_1'(\eta)-\eta^{\alpha}\varphi_0'(\eta), \tag{7}$$

Уравнение (7) позволяет выразить неизвестную в (5) функцию $U(\eta,\eta)$ через производные заданных функций $\varphi_0(\eta)$ и $\varphi_1(\eta)$. Тогда, положив в равенства (5) $\eta=\xi$ и выражая из полученного равенства неизвестную функцию $\psi_0(\xi)$, после несложных преобразований получим

$$U(\xi,\eta)=U(\xi,\xi)+\int_{\xi}^{\eta}\left(\frac{s}{s+\xi}\right)^{\alpha}\varphi_0'(s)ds+\frac{\lambda}{4}\left(\frac{2}{m+1}\right)^{\alpha}\xi\int_{\xi}^{\eta}\frac{U(s,s)ds}{(s+\xi)^{\alpha}}. \tag{8}$$

Подставляя в равенство (8) выражение для $U(\xi,\xi)$ из (7), окончательно найдем

$$U(\xi,\eta)=\frac{4}{\lambda}\left(\frac{m+1}{2}\right)^{\alpha}\left[(1+\xi)^{\alpha}\varphi_1'(\xi)-\xi^{\alpha}\varphi_0'(\xi)\right]+$$

$$+(1-\xi)\int_{\xi}^{\eta}\left(\frac{s}{\xi+s}\right)^{\alpha}\varphi_0'(s)ds+\xi\int_{\xi}^{\eta}\left(\frac{1+s}{\xi+s}\right)^{\alpha}\varphi_1'(s)ds. \tag{9}$$

Условие (7) накладывает определенные ограничения на произвол функций $\varphi_0(\eta)$ и $\varphi_1(\eta)$, а именно,

$$\frac{4}{\lambda}\left(\frac{2}{m+1}\right)^{\alpha}\varphi_0(0)=\varphi_1'(0), \tag{10}$$

$$\frac{\lambda}{4}\left(\frac{2}{m+1}\right)^{\alpha}\varphi_1(1)=2^{\alpha}\varphi_1'(1)-\varphi_0'(1). \tag{11}$$

Полученный для области H_1 результат сформулируем в теореме.

Теорема. *Если функции* $\varphi_0(y),\varphi_1(y)\in C^1[0,1]\cap C^2(0,1)$ *и выполняются условия (10), (11), то единственное решение*

$u(x,y)\in C(H_1)\cap C^2(H_1)$ уравнения (1) с данными (2) (в частном случае $a+b=m$ и $\alpha=\dfrac{a}{m+1}\in(0,1)$) может быть найдено по формуле (5), где надо заменить ξ и η их выражениями через x и y.

Теорема и все рассуждения по поводу ее доказательства аналогичны соответствующим, приведенным в работе автора [1]. Заметим, что при $\alpha\to 0$ полученное решение переходит в решение соответствующей задачи для нагруженного волнового уравнения [2,3], но ограничения на значения заданных функций $\varphi_0(y)$ и $\varphi_1(y)$ и их производных в точках $y=0$ и $y=(m+1)^{\frac{1}{m+1}}$ следует вновь получить из равенства (7) при $\alpha=0$.

Используя найденное решение (9), вычислим значение исходной функции $U(\xi,\eta)$ на характеристике $\eta=0$

$$U(\xi,0)=\frac{4}{\lambda}\left(\frac{m+1}{2}\right)^{\alpha}\varphi_1'(0)-(1-\xi)\int\limits_0^{\xi}\left(\frac{s}{\xi+s}\right)^{\alpha}\varphi_0'(\xi)\,ds-\xi\int\limits_0^{\xi}\left(\frac{1+s}{\xi+s}\right)^{\alpha}\varphi_1'(\xi)\,ds=$$

$$\varphi_0(0)-(1-\xi)\int\limits_0^{\xi}\left(\frac{s}{\xi+s}\right)^{\alpha}\varphi_0'(s)\,ds-\xi\int\limits_0^{\xi}\left(\frac{1+s}{\xi+s}\right)^{\alpha}\varphi_1'(s)\,ds,$$

где использовано равенство (10). Полученное значение используем как условие $U(\xi,0)=\psi_0(\xi)$ для решения задачи Гурса в области $H_2=\Omega-H_1$. При этом правая часть уравнения (3) для области H_2 уже будет определенной функцией $f(\xi)$. Полученное неоднородное уравнение легко интегрируется. Решение находится в явном виде.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Огородников Е.Н.* Некоторые характеристические задачи для нагруженных дифференциальных уравнений с волновым оператором и сингулярными коэффициентами // Математическое моделирование и краевые задачи. Тр. тринадцатой межвуз.конф. Ч.3. Самара: СамГТУ, 2003. С. 187-192.
2. *Аттаев А.Х.* Краевые задачи с характеристическим носителем для нагруженного гиперболического уравнения с волновым оператором в главной части// Нелокальные задачи и их приложения к автоматизированным системам. Сборник научных трудов. Нальчик: КБГУ. 1989, с. 16–22.
3. *Аттаев А.Х.* Задача с данными на параллельных характеристиках для нагруженного волнового уравнения// Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. Киев: ИМАН УССР, 1990, с. 10–11.