Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

С. А. Назаров, Асимптотика на бесконечности решения задачи Неймана с условиями сопряжения в угле,
Изв. вузов. Матем., 1984, номер 1, 18–25

https://www.mathnet.ru/ivm7179

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.85
9 декабря 2025 г., 14:57:25

4. Cordes H. O. Über die erste Randwertaufgabe bei quasilinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in mehr als zwei Variablen.— Math. Ann., 1956, Bd. 131, № 3, S. 278—312.
5. Глушко В. П., Крейн С. Г. Неравенства для норм производных в пространствах с весом.— Сиб. матем. журн., 1960, т. I, № 3, с. 343—382.
6. Кошелев А. И. Неравенство Корна с весом и некоторые итерационные процессы для квазилинейных эллиптических систем.— ДАН СССР, 1983, т. 271, № 5, с. 1056—1059.
7. Каврайская К. В. О весовом неравенстве Корна.— Изв. вузов. Матем., 1984, № 1, с. 3—7.
8. Мосолов П. П., Мясников В. П. Доказательство неравенства Корна.— ДАН СССР, 1971, т. 201, № 1, с. 36—39.
9. Пламеневский Б. А. Об ограниченности сингулярных интегралов в пространствах с весом.— Матем. сб., 1968, 76 (118) : 4, с. 573—592.

г. Ленинград

Поступила
28.03.1983

С. А. Назаров

УДК 517.558

АСИМПТОТИКА НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА С УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ В УГЛЕ

В данной работе изучаются асимптотические представления решений задачи Неймана для уравнения $-\nabla k(x)\nabla u(x)=f(x)$ в объединении угла K раствора 2α и полуполос $\Pi^{\pm}$. На линиях $L^{\pm}=\partial K\cap\partial\Pi^{\pm}$ ставятся условия сопряжения

$$u_1(x)=u_2(x),\ k_1\frac{\partial u_1}{\partial n}(x)=k_2^{\pm}(x)\frac{\partial u_2}{\partial n}(x).$$

Здесь n — нормаль; $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — предельные значения функции u при стремлении аргумента к точке $x\in L^{\pm}$ вдоль внешней и внутренней нормали к ∂K соответственно; $k(x)=k_1=\mathrm{const}$ в K, $k(x)=k_2(|x|)$ при $x\in\Pi^{+}\cup\Pi^{-}$, $k_2(r)\sim r^{\gamma}$ при $r\to\infty$; $\gamma\geqslant 0$.

Подобные задачи возникают, напр., в теории кручения составных стержней, в частности, стержней с тонким покрытием (см. [1]).

Исследованию асимптотики решений эллиптических краевых задач в областях с коническими (угловыми) точками и в цилиндрических областях посвящены статьи [2] — [5] и др. Как и в случае краевой задачи в угле, асимптотика решения рассматриваемой здесь задачи сопряжения содержит слагаемые $r^{m\pi/2\alpha}\Phi_m(\theta)$, где m — целое число, $(r,\ \theta)$ — полярные координаты. Вид угловых частей Φ_m существенно зависит от числа γ в представлении функции k_2 при $r\to\infty$. В случае $\gamma>1$ функции Φ_m такие же, как в задаче Дирихле, а в случае $\gamma<1$ — как в задаче Неймана.

В п. 1° осуществляется постановка задачи. В п. 2° и п. 4° приводится формальное построение асимптотики. Свойства модельных задач в угле и полуполосе перечислены в п. 3°. Обоснованию асимптотического разложения решения задачи сопряжения посвящен последний пятый раздел.

1°. *Постановка задачи.* Пусть Ω_1 — подобласть $\boldsymbol{R}^2$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega_1$, совпадающая вне круга $\mathscr{D}_R=\{x\in\boldsymbol{R}^2: r<R\}$ с углом $K=\{x\in\boldsymbol{R}^2: \theta\in(-\alpha,\ \alpha)\}$. Здесь $(r,\ \theta)$ — полярные координаты; $(0,\ \pi)\ni\alpha$ — полураствор угла; $R>0$. Обозначим еще через Ω область в $\boldsymbol{R}^2$ с кусочно-гладкой границей; $\overline{\Omega}_1\subset\Omega$. Предположим, что вне указанного круга разность $\Omega_2=\Omega\setminus\overline{\Omega}_1$ совпадает с полуполосами $\Pi^{\pm}=\{x=(x_1,x_2)\in\boldsymbol{R}^2: \pm x_2>0,\ x_1\sin\alpha-|x_2|\cos\alpha\in(0,1)\}$ (см. рис.). Фиксируем некоторую дугу ω кривой $\partial\Omega\cap\mathscr{D}_R$ и допустим, не ограничивая общности, что $R>2$ и $\mathscr{D}_2\cap\Omega=\varnothing$.

Рассмотрим в области Ω краевую задачу:

$$-\nabla_x k(x)\nabla_x u(x) = f(x),\ x\in\Omega; \tag{1}$$

$$k_2(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x) = g(x),\ x\in\partial\Omega\setminus\omega; \tag{2}$$

$$u(x) = 0,\ x\in\omega, \tag{3}$$

с условиями сопряжения на $\partial\Omega_1$:

$$[u](x) = h_0(x),\ [k\partial u/\partial\nu](x) = h_1(x),\ x\in\partial\Omega_1. \tag{4}$$

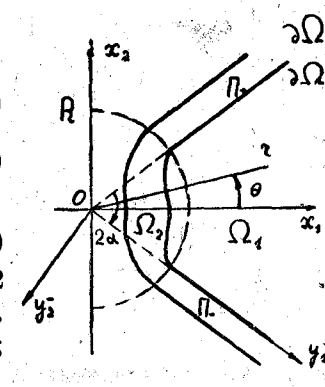

Рис.

Здесь n, ν — внешние нормали соответственно к $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_1$; k — такая функция, что $k(x) = k_1$ при $x\in\Omega_1$, $k(x) = k_2(x)$ при $x\in\overline{\Omega}_2$; $k_1 = \mathrm{const} > 0$, $k_2\in C^\infty(\overline{\Omega}_2)$; $[\Phi](x)$ — скачок функции Φ на $\partial\Omega_1$.

Лемма 1. *Пусть* $k_2(x) \geqslant k_{2,0} > 0$ *в* Ω_2; $r\log r f\in L_2(\Omega)$, $\sqrt{r}\log r h_1\in L_2(\partial\Omega_2)$, $\sqrt{r}\log r g\in L_2(\partial\Omega\setminus\omega)$; h_0 — *след на* $\partial\Omega_1$ *функции* $h\in W_2^1(\Omega_1;\ \varnothing)$ *такой, что* $\sqrt{r}\log r\,\partial h/\partial\nu\in L_2(\partial\Omega_1)$. *Тогда существует и единственно обобщенное решение и задачи* (1) — (4) *такое, что* $U = u - h\in W_2^1(\Omega;\ \omega)$. *Здесь* $W_2^1(\Xi,\ \Gamma)$ — *пространство функции из* $W_{2,\,\mathrm{loc}}^1(\overline{\Xi})$, *обращающихся в нуль на* $\Gamma\subset\partial\Xi$ *и обладающих конечной нормой* $\|z;\ W_2^1(\Xi;\ \Gamma)\| = \|\Delta_x z;\ L_2(\Xi)\| + \|(r\log r)^{-1}z;\ L_2(\Xi)\|$, $\nabla_x = \mathrm{grad}$; *функция* $h\in W_2^1(\Omega_1;\ \varnothing)$ *и функция* h, *продолженная нулем на* Ω_2, *не различаются в обозначениях*.

Доказательство сформулированного утверждения по существу известно (см. [3], [6], [7]).

2°. *Предварительные построения.* Введем в окрестности сторон $K^\pm = \{x\in R^2 : \theta = \pm\alpha;\ r > 0\}$ угла K координаты $y^\pm = (y_1^\pm,\ y_2^\pm) = (x_1\cos\alpha \pm x_2\sin\alpha,\ \mp x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha)$. Предположим, что

$$k_2(x) = k_2^\pm(y_1^\pm)\quad\text{при}\quad x\in\Pi^\pm\setminus\mathscr{D}_R. \tag{5}$$

Определим по u новые неизвестные функции:

$$\begin{aligned} &v(r,\ \theta) = u(x) && \text{при } x\in K_R = K\setminus\overline{\mathscr{D}}_R;\\ &w^\pm(y^\pm) = u(x) - \int_0^1 u(x)\,dy_2^\pm && \text{при } y^\pm\in\Pi_R = (R,\ \infty)\times(0,\ 1), \end{aligned} \tag{6}$$

и найдем соотношения, которым они подчинены в силу (1) — (4). Обозначая интеграл в (6) через $z^\pm(y^\pm)$ и интегрируя (1) по $y_2^\pm$ с учетом равенств (2), (4), имеем

$$\int_0^1 f(x)\,dy_2^\pm = -\int_0^1 \nabla_y k_2(y_1^\pm)\nabla_y u(x)\,dy_2^\pm =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial y_1^\pm}k_2^\pm(y_1^\pm)\frac{\partial}{\partial y_1^\pm}z^\pm(y_1^\pm) - k_2^\pm(y_1^\pm)\frac{\partial u}{\partial y_2^\pm}(x)\Big|_{y_1^\pm=0}^{y_1^\pm=1} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial y_1^\pm}k_2^\pm(y_1^\pm)\frac{\partial}{\partial y_1^\pm}z^\pm(y_1^\pm) - g^\pm(y_1^\pm) + k_1\frac{\partial v}{\partial y_2^\pm}(y_1^\pm,\ \pm\alpha) - h_1^\pm(x). \tag{7}$$

Кроме того, из (4) и определения функций $w^\pm$ получаем

$$z^\pm(y_1^\pm) = v(y_1^\pm,\ \pm\alpha) - w^\pm(y_1^\pm,\ 0) - h_0^\pm(y_1^\pm), \tag{8}$$

$$\int_0^1 w^\pm(y^\pm)\,dy_2^\pm = 0\ \text{при}\ y_1^\pm > R. \tag{9}$$

В (7), (8) $h_j^\pm$, $g^\pm$ заданы соответственно формулами $h_j^\pm(y_1^\pm) = h_j(x)$ при $x \in \partial\Omega_1 \setminus \mathscr{D}_R$, $g^\pm(y_1^\pm) = g(x)$ при $x \in \partial\Omega \setminus \mathscr{D}_R$.

Согласно (1), (7), (8) функция v удовлетворяет уравнениям

$$-k_1 r^{-2}\{(r\partial/\partial r)^2 + \partial^2/\partial\theta^2\} v(r, \theta) = f(x), \quad x \in K_R; \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} k_2^\pm(r) \frac{\partial v}{\partial r}(r, \pm\alpha) - k_1 \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial\theta}(r, \pm\alpha) - \frac{\partial}{\partial r} k_2^\pm(r) \frac{\partial w^\pm}{\partial r}(r, 0) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial r} k_2^\pm(r) \frac{\partial h_0^\pm}{\partial r}(r) - g^\pm(r) - h_1^\pm(r) - \int_0^1 f(x)\, dy_2^\pm \Big|_{y_1^\pm = r}, \quad r \in (R, +\infty). \tag{11}$$

Вычитая из (1) равенство (7) и используя (4), (2), для $w^\pm$ находим соотношения:

$$-\nabla_y k_2^\pm(y_1^\pm) \nabla_y w^\pm(y^\pm) - \frac{k_1}{y_1^\pm} \frac{\partial v}{\partial\theta}(y_1^\pm, \pm\alpha) =$$

$$= f(x) - \int_0^1 f(x)\, dy_2^\pm - g^\pm(y_1^\pm) - h_1^\pm(y_1^\pm) \text{ при } y^\pm \in \Pi_R; \tag{12}$$

$$k_2^\pm(y_1^\pm) \frac{\partial w^\pm}{\partial y_2^\pm}(y_1^\pm, 0) - \frac{k_1}{y_1^\pm} \frac{\partial v}{\partial\theta}(y_1^\pm, \pm\alpha) = -h_1^\pm(y_1^\pm), \tag{13}$$

$$k_2^\pm(y_1^\pm) \frac{\partial w^\pm}{\partial y_2^\pm}(y_1^\pm, 1) = g^\pm(y_1^\pm) \text{ при } y_1^\pm > R. \tag{14}$$

Прежде, чем исследовать асимптотику решений системы уравнений (10) — (17), изучим свойства решений модельных задач (10), (11) (при $w^\pm = 0$) и (12) — (14) (при $v = 0$).

3°. *Модельные задачи.* Предположим, что введенные в (5) функции $k_2^\pm$ допускают асимптотические представления

$$k_2^\pm(y) = y^\gamma \sum_{j=0}^{J-1} y^{-\gamma_j} \varkappa_j^\pm + O(y^{\gamma-\gamma_J}) \text{ при } y \to \infty, \tag{15}$$

которые можно почленно дифференцировать. В (15) γ, $\varkappa_j^\pm$ — некоторые постоянные; J — произвольное натуральное; $\{\gamma_j\}_{j=1}^\infty$ — монотонно возрастающая последовательность положительных чисел без точек сгущения $\gamma \geqslant 0$, $\gamma_0 = 0$, $\varkappa_0^\pm > 0$. Далее для сокращения формулировок и обозначений ограничимся случаем $\gamma \neq 1$ (см. замечание 1).

Рассмотрим первую модельную краевую задачу:

$$-k_1 \Delta V(x) = \mathbf{F}(x), \quad x \in K_R;$$

$$\frac{\partial}{\partial r} k_2^\pm(r) \frac{\partial V}{\partial r}(x) - k_1 \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial\theta}(x) = \mathfrak{H}(r), \quad x \in K_R^\pm = \{x : r > R, \theta = \pm\alpha\}. \tag{16}$$

Будем различать два случая: $\gamma > 1$ и $\gamma < 1$, которым сопоставим индексы $j = 0$ и $j = 1$. Обозначим через $V_{\beta,\delta}^{l,j}(K)$ пространство функций в K, наделенное нормой

$$\|Z;\ V_{\beta,\delta}^{l,j}(K)\| = \|r^{\beta-l} Z;\ L_2(K)\| + \|r^{\beta-j} Z;\ W_2^{l-j}(K)\| + \|r^{\beta-j(1-\delta)} Z;\ W_2^l(K)\|.$$

Здесь l — целое неотрицательное число, $l \geqslant j$, $\beta \in \boldsymbol{R}^1$. Введем еще при $l \geqslant 1$ и $j = 0$ пространство $V_\beta^{l-1/2}(\partial K)$ следов на ∂K функций из $V_{\beta,\delta}^{l,0}(K)$ с естественной нормой

$$\|z;\ V_\beta^{l-1/2}(\partial K)\| = \inf\{\|Z;\ V_{\beta,\delta}^{l,0}(K)\| \mid Z(x) = z(x),\ x \in \partial K\}.$$

При $\gamma > 1$ формулируемое ниже утверждение следует, напр., из [3], [4], а при $\gamma < 1$ доказывается так же, как и в [8].

Лемма 2. i) *Пусть функция* $V \in W^{l+2}_{2,\,\mathrm{loc}}(\overline{K}_R) \cap V^{0,\,0}_{\beta-l-2,\,1}(K_R)$ $(l \geqslant 1)$ *удовлетворяет уравнениям* (16), *в которых* $\mathfrak{H} \in V^{l-1/2}_{\beta+\Gamma}(K^{\pm}_R)$, $\mathbf{F} \in V^{l,\,j}_{\beta,\,\gamma}(K_R)$; $\Gamma = (j-1)\gamma - j$. *Тогда* $V \in V^{l+2,\,j}_{\beta,\,\gamma}(K_R)$ *и справедливо неравенство*

$$\| V;\ V^{l+2,\,j}_{\beta,\,\gamma}(K_{R+1})\| \leqslant \mathrm{const}\,\{\| r^{\beta-l-2} V;\ L_2(K_R)\| + \|\mathbf{F};\ V^{l,\,j}_{\beta,\,\gamma}(K_R)\| + \|\mathfrak{H};\ V^{l-1/2}_{\beta+\Gamma}(K^{\pm}_R)\|\}.$$

ii) *Допустим, что в* (16) $V \in V^{l+2,\,j}_{\beta,\,\gamma}(K_R)$, $\mathbf{F} \in V^{l,\,j}_{\beta+\sigma,\,\gamma}(K_R)$, $\mathfrak{H} \in V^{l-1/2}_{\beta+\Gamma+\sigma}(K^{\pm}_R)$; *число* $\beta - l - 1$ *не кратно* $\pi/2\alpha$ *и* $\beta > l + 1 - |1-\gamma|$, $\sigma > 0$. *Тогда имеет место асимптотическое представление*

$$V(x) = \sum_{p=q}^{Q} \{c_p r^{-\pi p/2\alpha}\Phi_p(\theta) + jC\delta_{0,\,p}\log r\} + r^{1-\gamma}\{C_1\cos(1-\gamma)\theta + C_2\sin(1-\gamma)\theta\} + \widetilde{V}(x), \tag{17}$$

где $q,\ q+1,\ \ldots,\ Q$ — *целые числа из промежутка* $((\beta-l-1)2\alpha/\pi,\ (\beta+\delta-l-1)2\alpha/\pi)$, $\delta < \min\{\sigma,\ |1-\gamma|\}$; $C = \mathrm{const}$; C_1, C_2 — *постоянные, отличные от нуля лишь при* $j = 0$ *и* $\beta - l < \gamma - 1$; c_p — *зависящие от* $\mathbf{F}$, $\mathfrak{H}$ *постоянные*; $\widetilde{V} \in V^{l+2,\,j}_{\beta+\delta,\,\gamma}(K_R)$; $\Phi_0(\theta) = 1$, *а остальные функции* Φ_p *заданы равенствами*:

$$\begin{aligned} &\Phi_{2m}(\theta) = \sin\frac{\pi m}{\alpha}\theta,\ \Phi_{2m+1}(\theta) = \cos\frac{\pi(2m+1)}{2\alpha}\theta \ \textit{при}\ \gamma > 1;\\ &\Phi_{2m}(\theta) = \cos\frac{\pi m}{\alpha}\theta,\ \Phi_{2m+1}(\theta) = \sin\frac{\pi(2m+1)}{2\alpha}\theta \ \textit{при}\ \gamma < 1. \end{aligned} \tag{18}$$

Замечание 1. Как уже указывалось ранее, случай $\gamma = 1$ исключен из рассмотрения. Это вызвано не существом дела, а усложнением формулировок при $\gamma = 1$. Например, слагаемыми в асимптотике (18) функции V являются выражения $r^{\lambda}\{(\varkappa_0^- \lambda\sin\lambda\alpha + k_1\cos\lambda\alpha)\cos\lambda\theta + (\varkappa_0^- \lambda\cos\lambda\alpha - k_1\sin\lambda\alpha)\sin\lambda\theta\}$, где λ — корни уравнения $(\varkappa_0^+\varkappa_0^-\lambda^2 + k_1^2)\sin 2\lambda\alpha + (\varkappa_0^+ - \varkappa_0^-)\lambda k_1\cos 2\lambda\alpha = 0$. В остальном изучение асимптотики решения задачи (1) — (4) в случае $\gamma = 1$ проводится так же, как и для $\gamma > 1$.

Рассмотрим теперь вторую модельную задачу, отвечающую уравнениям (12) — (14) (при этом будем опускать индексы „+“ и „—“):

$$-\nabla_y k_2(y_1)\nabla_y W(y) = \mathfrak{G}(y),\ y \in \Pi_R; \tag{19}$$

$$k_2(y_1)\frac{\partial W}{\partial y_2}(y_1,\ 0) = \mathfrak{G}_0(y_1),\ k_2(y_1)\frac{\partial W}{\partial y_2}(y_1,\ 1) = \mathfrak{G}_1(y_1),\ y_1 > R. \tag{20}$$

Обозначим через $\boldsymbol{V}^{l+h,\,h}_{\mu,\,\delta}(\Pi_R)$ $(h = 0,\ 2;\ \delta = 0,\ 1;\ \mu \in \boldsymbol{R}^1)$ пространство функций в Π_R, наделенное нормой

$$\|z;\ \boldsymbol{V}^{l+h,\,h}_{\mu,\,\delta}(\Pi_R)\| = \sum_{p+q \leqslant l+h} \left\| y_1^{\mu-\delta((l-p)_+ - l)}\frac{\partial^{p+q} z}{\partial y_1^p\,\partial y_2^q};\ L_2(\Pi_R)\right\|,$$

где $(\rho)_+ = (\rho + |\rho|)/2$. Кроме того, пусть $\boldsymbol{V}^{l+1/2,\,h}_{\mu,\,\delta}(R,\ \infty)$ — пространство следов при $y_2 = 0$ (или $y_2 = 1$) функций из $\boldsymbol{V}^{l+1,\,h}_{\mu,\,\delta}(\Pi_R)$; $l \geqslant 0$.

Лемма 3. i) *Пусть* $\mathfrak{G} \in \boldsymbol{V}^{l,\,0}_{\mu,\,0}(\Pi_R)$, $\mathfrak{G}_k \in \boldsymbol{V}^{l+1/2,\,0}_{\mu,\,0}(R,\ \infty)$, $k = 1,\ 2$; $l \geqslant 0$; W — *функция из* $W^1_2(\Pi_R)$, *удовлетворяющая* (*в обобщенном смысле*) *задаче* (19), (20) *и такая, что*

$$\int_0^1 W(y_1,\ y_2)\,dy_2 = 0 \ \textit{при}\ y_1 > R. \tag{21}$$

Тогда $W \in V^{l+2,0}_{\mu+\gamma,0}(\Pi_{R+1})$ *и справедливо неравенство*

$$\| W;\ V^{l+2,0}_{\mu+\gamma,0}(\Pi_{R+1}) \| \leqslant \mathrm{const}\,\{\| W;\ W^1_2(\Pi_R)\| + \|\mathfrak{G};\ V^{l,0}_{\mu,0}(\Pi_R)\| + \\ + \|\mathfrak{G}_0;\ V^{l+1/2,0}_{\mu,0}(R,\infty)\| + \|\mathfrak{G}_1;\ V^{l+1/2,0}_{\mu,0}(R,\infty)\|\}. \tag{22}$$

ii) *Если, кроме того,* $\mathfrak{G} \in V^{l,2}_{\mu,1}(\Pi_R)$, $\mathfrak{G}_k \in V^{l+1/2}_{\mu,1}(R,\infty)$, $l \geqslant 2$, *то* $W \in V^{l+2,2}_{\mu+\gamma,1}(\Pi_{R+1})$ *и имеет место оценка*

$$\| W;\ V^{l+2,2}_{\mu+\gamma,1}(\Pi_{R+1}) \| \leqslant \mathrm{const}\,\{\| W;\ W^1_2(\Pi_R)\| + \|\mathfrak{G};\ V^{l,2}_{\mu,1}(\Pi_R)\| + \\ + \|\mathfrak{G}_0;\ V^{l+1/2,2}_{\mu,1}(R,\infty)\| + \|\mathfrak{G}_1;\ V^{l+1/2,2}_{\mu,1}(R,\infty)\|.$$

Доказательство сформулированных утверждений в существенном известно. Оценка

$$\| y_1^{\mu+\gamma} W;\ W^1_2(\Pi_R)\| \leqslant \mathrm{const}\,\{\| W;\ W^1_2(\Pi_R)\| + \| y_1^{\mu}\mathfrak{G};\ L_2(\Pi_R)\| + \\ + \| y_1^{\mu}\mathfrak{G}_0;\ L_2(R,\infty)\| + \| y_1^{\mu}\mathfrak{G}_1,\ L_2(R,\infty)\|\} \tag{23}$$

вытекает из неравенства Пуанкаре для функций, подчиненных (21):

$$\int\limits_{\Pi_R} y_1^{2(\mu+\gamma)} \left|\frac{\partial W}{\partial y_2}(y)\right|^2 dy \geqslant \mathrm{const} \int\limits_{\Pi_R} y_1^{2(\mu+\gamma)} |W(y)|^2 dy.$$

Локальные коэрцитивные оценки решений задачи Неймана вместе с (23) приводят к (22). Утверждение ii) получается суммированием неравенств (22), примененных к продифференцированным p раз по y_1 уравнениям (19), (20) ($p = 0, 1, \ldots, l$).

4°. *Формальная асимптотика.* Предположим, что правые части краевой задачи (1) — (4) допускают при $r \to \infty$ представления:

$$\begin{gathered} f(x) = \sum_{q=1}^{Q} r^{-\sigma_q-2} f_q(\theta, \log r) + o(r^{-\sigma_Q-2}),\ x \in K_R; \\ f(x) = \sum_{q=1}^{Q} (y_1^{\pm})^{-\sigma_q-2+\gamma} f_q^{\pm}(y_2^{\pm}, \log y_1^{\pm}) + o((y_1^{\pm})^{-\sigma_Q-2+\gamma}),\ y^{\pm} \in \Pi_R; \\ h_p(x) = \sum_{q=1}^{Q} r^{-\sigma_q-p} h^{\pm}_{p,q}(\log r) + o(r^{-\sigma_Q-p}),\ r \geqslant R,\ p = 0, 1; \\ g(x) = \sum_{q=1}^{Q} (y_1^{\pm})^{-\sigma_q-1} g_q^{\pm}(\log y_1^{\pm}) + o((y_1^{\pm})^{-\sigma_Q-1}),\ y_1^{\pm} > R, \end{gathered} \tag{24}$$

которые можно почленно дифференцировать. В (24) Q — любое натуральное число; $\{\sigma_q\}_{j=1}^{\infty}$ — монотонно возрастающая последовательность положительных чисел без точек сгущения; коэффициенты $f_q(\theta, t)$, $f_q^{\pm}(y, t)$, $g_q^{\pm}(t)$, $h^{\pm}_{p,q}(t)$ гладко (класса C^{∞}) зависят от переменных $\theta \in [-\alpha, \alpha]$, $y \in [0, 1]$ и полиномиально от t.

Формальное асимптотическое разложение решения задачи (1) — (4) с правыми частями (24) будем искать в виде

$$U_T(x) = \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \lambda < T}} \begin{cases} r^{-\lambda} v_\lambda(\theta, \log r),\ x \in K_R; \\ (y_1^{\pm})^{-\lambda}\{w_\lambda^{\pm}(y_2^{\pm}, \log y_1^{\pm}) + z_\lambda^{\pm}(\log y_1^{\pm})\},\ y^{\pm} \in \Pi_R. \end{cases} \tag{25}$$

Здесь $v_\lambda(\theta, t)$ и $w_\lambda^{\pm}(y, t)$ — полиномы от t, коффициентами которых служат гладкие функции переменных $\theta \in [-\alpha, \alpha]$ и $y \in [0, 1]$.

Прежде чем найти уравнения, которым удовлетворяют $w_\lambda^\pm$ и v_λ, опишем множество Λ показателей степеней r, $y_1^\pm$ в сумме (25). Оно состоит из положительных чисел, представимых в виде

$$\lambda = \sigma_k + \frac{\pi s_0}{2\alpha} + s_1 |1-\gamma| + s_2(1+\gamma) + \sum_{m=1}^{M} n_m \gamma_m,$$

где k, s_l, M, n_m произвольные целые неотрицательные, $0 < \gamma_m$ — числа из разложений (15) функций $k_2^\pm$. Очевидно, Λ не имеет точек сгущения.

Подставим суммы (24), (25) в эквивалентные (1) — (4) соотношения (8) — (14) и приравняем слева и справа коэффициенты при одинаковых степенях r, $y_1^\pm$. Из (10), (14) получим

$$-\{(r\partial/\partial r)^2 + \partial^2/\partial\theta^2\} r^{-\lambda} v_\lambda(\theta, \log r) = r^{-\lambda-2} f_{h(\lambda)}(\theta, \log r);$$

$$\mathfrak{M}_j^\pm r^{-\lambda} v_\lambda(\pm\alpha, \log r) = -\mathfrak{N}_j^\pm r^{-\chi(\lambda)} v_{\chi(\lambda)}(\pm\alpha, \log r) - r^{-\sigma_{l(\lambda)}-1} \times$$

$$\times (g_{l(\lambda)}^\pm(\log r) + h_{1,l(\lambda)}^\pm(\log r)) - r^{-\sigma_{n(\lambda)}-2+\gamma} \int_0^1 f_{n(\lambda)}^\pm(y_2, \log r)\, dy_2 -$$

$$-\sum_{k=1}^{K(\lambda)} \varkappa_k^\pm \frac{\partial}{\partial r} r^{\gamma-\gamma_k} \frac{\partial}{\partial r} r^{-\mu(\lambda,k)} v_{\mu(\lambda,k)}(\pm\alpha, \log r) + \tag{26}$$

$$+\sum_{k=0}^{K(\lambda)} \varkappa_k^\pm \frac{\partial}{\partial r} r^{\gamma-\gamma_k} \frac{\partial}{\partial r} r^{-\mu(\lambda,k)} w_{\mu(\lambda,k)}^\pm(0, \log r) +$$

$$+\sum_{k=0}^{K(\lambda)} \varkappa_k^\pm \frac{\partial}{\partial r} r^{\gamma-\gamma_k} \frac{\partial}{\partial r} r^{-\sigma_{m(\lambda,k)}} h_{0,m(\lambda,k)}^\pm(\log r).$$

Здесь индекс $j=0$ соответствует случаю $\gamma > 1$, а $j=1$ — случаю $\gamma < 1$;

$$\mathfrak{M}_0^\pm = \mathfrak{N}_1^\pm = \varkappa_0^\pm \frac{\partial}{\partial r} r^\gamma \frac{\partial}{\partial r}, \quad \mathfrak{M}_1^\pm = \mathfrak{N}_0^\pm = k_1 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta};$$

натуральное число $K(\lambda)$ подчинено неравенству $\gamma_{K(\lambda)} \geqslant \lambda$; числа $\chi(\lambda)$, $\mu(\lambda, k)$, $h(\lambda)$, $l(\lambda)$, $m(\lambda, k)$, $n(\lambda)$ таковы, что $\chi(\lambda) = \lambda - |1-\gamma| \in \Lambda$, $\mu(\lambda, k) = \lambda - \gamma_k - (1-\gamma)_+ \in \Lambda$, $\sigma_{h(\lambda)} = \lambda$, $\sigma_{l(\lambda)} = \lambda - (\gamma-1)_+$, $\sigma_{m(\lambda,k)} = \lambda - \gamma_k - (1-\gamma)_+$, $\sigma_{n(\lambda)} = \lambda - (1-\gamma)_+$. Отметим, что если удовлетворяющих указанным равенствам натуральных чисел $h(\lambda)$, $l(\lambda)$, $m(\lambda, k)$, $n(\lambda)$ не существует или $\chi(\lambda)$, $\mu(\lambda, k) \notin \Lambda$, то соответствующие слагаемые в (26) отсутствуют (такой же способ обозначений принят и далее).

Из (8) и (9) находим, что

$$z_\lambda^\pm(t) = v_\lambda(\pm\alpha, t) - w_\lambda^\pm(0, t) - h_{0,h(\lambda)}^\pm(t); \quad \int_0^1 w_\lambda^\pm(y, t)\, dy = 0. \tag{27}$$

Кроме того, в силу (12) — (14) имеем

$$-\varkappa_0^\pm \frac{\partial^2 w_\lambda^\pm}{\partial y_2^2}(y_2, \log y_1) = \frac{\partial^2}{\partial y_2} Z_\lambda^\pm(y_2, \log y_1) - Y_\lambda^{0,\pm}(\log y_1) - Y_\lambda^{1,\pm}(\log y_1) +$$

$$+\sum_{k=0}^{K(\lambda)} \varkappa_k^\pm y_1^{\lambda-\gamma} \frac{\partial}{\partial y_1} y_1^{\gamma-\gamma_k} \frac{\partial}{\partial y_1} y_1^{-\xi(\lambda,k)} w_{\xi(\lambda,k)}^\pm(y_2, \log y_1) +$$

$$+ f_{P(\lambda)}^\pm(y_2, \log y_1) - \int_0^1 f_{P(\lambda)}^\pm(\zeta, \log y_1)\, d\zeta; \tag{28}$$

$$\varkappa_0^{\pm}\frac{\partial w_\lambda^{\pm}}{\partial y_2}(q,\ \log y_1)=Z_\lambda^{\pm}(q,\ \log y_1)-Y_\lambda^{q,\pm}(\log y_1),\ q=0,\ 1;$$

где

$$Z_\lambda^{\pm}(y_2,\ \log y_1)=\sum_{k=1}^{K(\lambda)}\varkappa_k^{\pm}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}w^{\pm}_{\eta(\lambda,k)}(y_2,\ \log y_1),\ Y_\lambda^{0,\pm}(\log y_1)=$$

$$=k_1\frac{\partial v_{\zeta(\lambda)}}{\partial\theta}(\pm\alpha,\ \log y_1)-h^{\pm}_{1,s(\lambda)}(\log y_1),\ Y_\lambda^{1,\pm}(\log y_1)=g^{\pm}_{s(\lambda)}(\log y_1).$$

В (27), (28) $\xi(\lambda,\ k)$, $\eta(\lambda,\ k)$, $\zeta(\lambda)$, $p(\lambda)$, $s(\lambda)$ таковы, что $\xi(\lambda,\ k)=\lambda-\gamma_k-2\in\Lambda$, $\eta(\lambda,\ k)=\lambda-\gamma_k\in\Lambda$, $\zeta(\lambda)=\lambda-1-\gamma\in\Lambda$, $\sigma_{p(\lambda)}=\lambda-2$, $\sigma_{s(\lambda)}=\lambda-1-\gamma$.

Существование решений уравнений (26) проверено, напр., в [3], а разрешимость обыкновенных дифференциальных уравнений (28) не вызывает сомнений. Таким образом, коэффициенты v_λ, $w_\lambda^{\pm}$ и $z_\lambda^{\pm}$ в (25) последовательно определяются из (26) — (28). Эти функции полиномиально зависят от $\log r$ и $\log y_1^{\pm}$.

Замечание 2. В силу второго равенства из (27) решение задачи (28) единственно. Решение задачи (26) при $\lambda=\pi a/2\alpha$ (a целое) определяется с точностью до слагаемого $\mathfrak{S}_a r^{-\pi a/2\alpha}\Phi_a(\theta)$, где $\mathfrak{S}_a$ — произвольная постоянная, функции Φ_a заданы формулами (18). Неизвестные постоянные $\mathfrak{S}_a$ однозначно определяются по правым частям уравнений (1) — (4) при оправдании формальной асимптотики (см. теорему 1).

5°. *Оправдание асимптотики.* Основному результату данной работы — теореме об асимптотике решения задачи (1) — (4) — предпошлем следующее утверждение.

Теорема 1. *Предположим, что в соотношениях* (8) — (14) $v\in V^{l+2,\,j}_{\beta,\,\gamma}(K_R)$, $w^{\pm}\in V^{l+2,\,2}_{\mu+\gamma,\,1}(\Pi_R)$, *где* $\beta>l+1-|1-\gamma|$, $l\geqslant 2$. *Тогда*:

i) *если* $\sigma>0$, $\beta-1/2>\mu+l$ *и* g, $h_1^{\pm}\in V^{l+1/2,\,2}_{\mu+\sigma,\,1}(R,\ \infty)$, $f\in V^{l,2}_{\mu+\sigma,\,1}(\Pi_R)$, *то имеют место включения* $w^{\pm}\in V^{l+2,\,2}_{\mu+\gamma+\delta,\,1}(\Pi_R)$, $\delta=\min\{\sigma,\ \beta-\mu-l-1/2\}$;

ii) *если* $\sigma>0$, $\mu+l>\beta-1-(\gamma-1)_+$, *число* $\beta-l-1$ *не кратно* $\pi/2\alpha$ *и*

$$\frac{\partial}{\partial r}k_2^{\pm}\frac{\partial h_0^{\pm}}{\partial r},\ h_1^{\pm},\ g^{\pm},\ \int_0^1 f\,dy_2^{\pm}\in V^{l-1/2}_{\beta+\sigma-1-(\gamma-1)_+}(K_R^{\pm}),\ f\in V^{l,\,j}_{\beta+\sigma,\,\gamma}(K_R),$$

то найдутся такие постоянные $\mathfrak{S}_q,\ldots,\ \mathfrak{S}_Q$, C, *что*

$$v-\sum_{p=q}^{Q}\{\mathfrak{S}_p r^{-\pi p/2\alpha}\Phi_p(\theta)+jC\delta_{p,\,0}\log r\}\in V^{l+2,\,j}_{\beta+\delta,\,\gamma}(K_R). \tag{29}$$

Здесь $0<\delta<\min\{\sigma,\ |1-\gamma|,\ \mu+l-\beta+1+(\gamma-1)_+\}$; q, Q — *такие же, как и в* (17); Φ_p — *функции* (18).

Доказательство приведенных утверждений следует из лемм 3 и 2, а также из вытекающих из условий теоремы включений:

i) $\dfrac{1}{y_1^{\pm}}\dfrac{\partial v}{\partial\theta}(y_1^{\pm},\ \pm\alpha)\in V^{l+1/2,\,j}_{\beta,\,\gamma}(R,\ \infty)\subset V^{l,\,2}_{\beta-l-1/2,\,1}(\Pi_R)$;

ii) $\dfrac{\partial}{\partial r}k_2^{\pm}(r)\dfrac{\partial}{\partial r}w^{\pm}(r,\ 0)\in V^{l-1/2,\,1}_{\mu,\,1}(R,\ \infty)\subset V^{l-1/2}_{\mu,\,1}(K_R^{\pm})$.

Замечание 3. В формулах (17) и (29) содержится слагаемое $jC_{0,\,p}\log r$. Так как $\log r\notin W_2^1(\Omega;\ \varnothing)$, то в асимптотике решения задачи (1) — (4) этот член отсутствует.

Замечание 4. При любых β и μ выполнено хотя бы одно из требуемых в теореме 1 неравенств: $\beta-1/2>\mu+l$ или $\mu+l>\beta-1-(\gamma-1)_+$.

Замечание 5. Используя описанную в п. 4° процедуру компенсации правых частей равенств (8) — (14), можно добиться выполнения сформулированных в теореме 1 требований на f, $h_m^{\pm}$ и $g^{\pm}$.

Из приведенных в п. 2° и п. 4° построений, замечаний 3—5 и последовательного применения утверждений теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Пусть выполнены асимптотические представления* (15) *и* (24). *Тогда найдутся такие постоянные* $\mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{S}_1$, ... (см. замечание 2), *что для решения и задачи* (1) — (4) *будет справедливо включение*

$$u - U_T \in V^{l+2,1}_{T+l+1-\delta,\gamma}(K_R) \cap V^{l+2,2}_{T+\gamma-1/2-\delta,1}(\Pi^{\pm} \setminus \mathscr{D}_R),$$

где U_T *определена формулой* (25), v_λ, $w_\lambda^{\pm}$, $z_\lambda^{\pm}$ — *функции, подчиненные соотношениям* (26) — (28); δ, T — *произвольные положительные числа,* $l = 0, 1, \ldots$

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел.— М., 1963.— 686 с.
2. Agmon S., Nirenberg L. Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach spaces.— Communs Pure Appl. Math., 1963, v. 16, № 1, p. 121—239.
3. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками.— Тр. Моск. матем. о-ва, 1967, т. 16, с. 209—292.
4. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. Оценки в L_p и в классах Гёльдера и принцип Миранда—Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе.— Math. Nachr., 1978, Bd. 81, S. 25—82.
5. Пламеневский Б. А. Об асимптотическом поведении решений квазиэллиптических уравнений с операторными коэффициентами.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1973, т. 37, № 6, с. 1332—1375.
6. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики.— М., 1973.—407 с.
7. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения.— М., 1971.— 371 с.
8. Арутюнян Н. Х., Назаров С. А. Об особенностях функции напряжений в угловых точках поперечного сечения скручиваемого стержня с тонким усиливающим покрытием.— ПММ, 1982, т. 47, вып. 1, с. 122—132.

г. Ленинград

Поступила 10.03.1983

Б. А. Пламеневский, В. Н. Сеничкин

УДК 517.98

О C^*-АЛГЕБРАХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА СЛОЖНОМ КОНТУРЕ, I

Обозначим C^*-алгебру, порожденную одномерными сингулярными интегральными операторами с разрывными коэффициентами на кусочно-гладком контуре Γ, через $\mathscr{A}$ (точные определения см. в § 1), а через $\mathscr{K}$ — идеал компактных операторов. В этой статье перечисляются все классы эквивалентных неприводимых представлений алгебр $\mathscr{A}$ и $\mathscr{A}/\mathscr{K}$; иными словами, речь идет об описании спектров $\hat{\mathscr{A}}$ и $(\mathscr{A}/\mathscr{K})^{\wedge}$ указанных алгебр. Известно, что если коэффициенты и контур гладкие, то (в скалярном случае) алгебра $\mathscr{A}/\mathscr{K}$ коммутативна, ее неприводимые представления одномерны и пространство максимальных идеалов можно отождествить с дизъюнктным объединением двух экземпляров контура Γ. Если же в коэффициентах или на контуре появляются особенности, то алгебра $\mathscr{A}/\mathscr{K}$ перестает быть коммутативной и описание спектра усложняется.