
 УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОГО УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ САМАРСКОГО

© 2002 г. Л. И. Сербина

Аппроксимация обобщенного нелинейного уравнения Буссинеска линейным уравнением смешанного типа. Пусть $h = h(\xi, t)$ – уровень грунтовых вод в точке $\xi \geq 0$ в момент времени t . Неустановившееся одномерное движение грунтовых вод со слабоизменяющейся свободной поверхностью и водоупором $z = h_0(\xi)$ при определенной его схематизации описывается обобщенным уравнением Буссинеска [1, с. 195]

$$\frac{\partial \sigma h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[k(h - h_0) \frac{\partial h}{\partial \xi} \right] - \frac{k_0}{M_0} (h - H) + w, \quad (1)$$

где σ – водоотдача, k – коэффициент фильтрации, H – напор в нижележащем водоносном пласте, k_0 – коэффициент фильтрации слабопроницаемого водоупора мощности M_0 , $w = w(\xi, t)$ – разность между инфильтрацией и испарением. Предполагается, что скорость w_0 просачивания через водоупор задается формулой

$$w_0 = (k_0/M_0)(H - h). \quad (2)$$

При горизонтальном водоупоре можно положить $h_0 = 0$, $M_0 = \text{const}$. Если σ и k постоянны, то уравнение (1) принимает вид

$$\sigma \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k}{2} \frac{\partial^2 h^2}{\partial \xi^2} + w - w_0. \quad (3)$$

Решение уравнения (3) будем искать в классе функций $h = h(\xi, t)$, имеющих непрерывную смешанную производную $\partial^3 h / \partial \xi^2 \partial t$. Любое решение уравнения (3) является решением следующего уравнения:

$$\sigma \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = k \frac{\partial^2 h h_t}{\partial \xi^2} + w_t - w_{0t}. \quad (4)$$

Предположим, что $h_t = \partial h / \partial t$ в среднем прямо пропорциональна расходу

$$\sigma \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l h(\xi, t) d\xi$$

грунтовой воды на прогнозируемое участие $0 < \xi < l$ с постоянным коэффициентом γ . Другими словами, пусть

$$\frac{\partial h}{\partial t} \approx \gamma \sigma \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l h(\xi, t) d\xi. \quad (5)$$

С учетом (5) уравнение (4) приближенно можно аппроксимировать нагруженным уравнением

$$\partial^2 h / \partial t^2 = k \gamma \delta'(t) \partial^2 h / \partial \xi^2 + (w_t - w_{0t}) / \sigma, \quad (6)$$

где $\delta(t) = \int_0^l h(\xi, t) d\xi$.

Во многих задачах, связанных с гидрогеологическим прогнозированием при естественных и искусственных орошениях больших площадей можно положить, что

$$k\gamma\delta'(t) \approx c|t_* - t|^m \text{sign}(t_* - t), \quad (7)$$

где $m = \text{const} \geq 0$, $c = \text{const} > 0$, t_* – экстремальное время, когда расход грунтовой воды в слое $0 < \xi < l$ достигает максимального значения, а затем падает до значения, не нарушающего экологию, зоны аэрации.

В случае, когда напор H в нижележащем водоносном пласте не зависит от времени, $\partial H/\partial t = 0$ и $\partial w_0/\partial t = -(k_0/M_0)\partial h/\partial t$. Этому варианту в силу (6) и (7) соответствует уравнение

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = c|t_* - t|^m \text{sign}(t_* - t) \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} - \frac{k_0}{M_0} \frac{\partial h}{\partial t} + w_t. \quad (8)$$

Уравнение (8) на евклидовой плоскости точек (ξ, t) является уравнением смешанного типа: оно эллиплично при $t > t_*$, гиперболично при $t < t_*$ и параболическое на критической линии $t = t_*$. Заменой переменных

$$y = t - t_*, \quad x = \xi/\sqrt{c}, \quad u(x, y) = h(x\sqrt{c}, y + t_*) \quad (9)$$

уравнение (8) приведем к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \text{sign } y \cdot |y|^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y), \quad (10)$$

где $b = k_0/M_0$, $f(x, y) = w_y(x\sqrt{c}, y + t_*)$.

На основании (5), (7) имеем

$$k\gamma \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l h(\xi, t) d\xi = c|t_* - t|^m \text{sign}(t_* - t),$$

откуда с учетом (9) вытекает

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^a u(x, y) dx = A|y|^m \text{sign } y; \quad (11)$$

здесь использованы обозначения $a = \sqrt{l/c}$, $A = -\sqrt{c}/(k\gamma)$. Для уравнения (10) условие (11) является условием типа условия Самарского [2, с. 140].

Итак, уравнение смешанного эллиптико-гиперболического типа (10) с нелокальным условием (11) является линейной математической моделью неустановившегося плоскопараллельного движения грунтовых вод со слабоизменяющейся свободной поверхностью и со слабопроницаемым горизонтальным водоупором.

Введением новой независимой переменной

$$v = u \exp(by/2) \quad (12)$$

уравнение (10) и условие (11) приведем к виду

$$\text{sign } y \cdot |y|^m v_{xx} + v_{yy} - (b^2/4)v = f(x, y) \exp(b^2 y/4), \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} e^{-by/2} \int_0^a v(x, y) dx = A|y|^m \text{sign } y. \quad (14)$$

Если горизонтальный водоупор $h_0 = 0$ непроницаем ($k = 0$) или имеет большую мощность $k_0/M_0 \ll 1$, то в (12)–(14) можно положить $b = 0$. Тогда (14) совпадет с (11), а уравнение (13) примет вид

$$\text{sign } y \cdot |y|^m v_{xx} + v_{yy} = f(x, y), \quad 0 < x < a. \quad (15)$$

Поиск граничных условий для уравнения (15). Решением (точным или приближенным) уравнения (15) должно быть любое решение уравнения (3) с $w_0 = 0$, т.е. уравнения $\sigma \partial h / \partial t = (k/2) \partial^2 h^2 / \partial \xi^2 + w$, которое, следуя А.М. Нахушеву [3], аппроксимируем нагруженным дифференциальным уравнением

$$k\delta(t) \partial^2 h / \partial \xi^2 = 2\sigma \delta'(t) - 2lw. \quad (16)$$

Введем в рассмотрение коэффициент уронепроводности, который определим формулой

$$K_u = k\delta(t) / (\sigma l) \iff \delta(t) = \sigma l / (k) K_u. \quad (17)$$

Любое решение $h(\xi, t)$ уравнения (16) представимо в виде

$$k\delta(t)h(\xi, t) = \sigma \delta' \xi^2 - 2l \int_0^\xi (\xi - \xi_1) w(\xi_1, t) d\xi_1 + A_1(t)\xi + B_1(t), \quad (18)$$

где $A_1(t)$ и $B_1(t)$ – произвольные непрерывные функции.

Из (18) после применения к обеим его частям операции интегрального осреднения по $\xi \in [0, l]$ получим

$$k\delta^2(t) = \frac{\sigma \delta'(t) l^3}{3} - 2l \int_0^l d\xi \int_0^\xi (\xi - \xi_1) w(\xi_1, t) d\xi_1 + \frac{A_1(t) l^2}{2} + B_1(t) l. \quad (19)$$

Физически обосновано задание одного из следующих условий [3]:

$$h(l, t) = \varphi(t), \quad 0 \leq t \leq T; \quad \partial h / \partial \xi|_{\xi=l} = \psi(t), \quad 0 < t < T, \quad (20)$$

где T – расчетное время, $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – заданные непрерывные функции временного сегмента $[0, T]$. В частности, $\varphi(t)$ может означать уровень воды в дренажной системе в момент времени t . Второе условие (20) задает закон изменения уклона потока грунтовых вод в точке $\xi = l$.

С учетом первого условия (20) из (18) имеем

$$\sigma \delta'(t) l^2 = k\delta(t) \varphi(t) + 2l \int_0^l (l - \xi_1) w(\xi_1, t) d\xi_1 - A_1(t) l - B_1(t). \quad (21)$$

Подставляя значение $\delta'(t)$ из (21) в (19), получим

$$\frac{k\delta(t)}{l} \left[\delta(t) - \frac{l}{3} \varphi(t) \right] = \frac{2}{3} l \int_0^l (l - \xi_1) w(\xi_1, t) d\xi_1 - 2 \int_0^l d\xi \int_0^\xi (\xi - \xi_1) w(\xi_1, t) d\xi_1 + \frac{1}{6} l A_1(t) + \frac{2}{3} B_1(t). \quad (22)$$

Из (19) и (22) находим

$$l A_1(t) / 2 + B_1(t) = \Phi_{1\delta}(w; t), \quad l A_1(t) / 6 + 2 B_1(t) / 3 = \Phi_{2\delta}(w; t), \quad (23)$$

где $\Phi_{1\delta}(w; t) = (k/l) \delta^2(t) - \sigma (l^2/3) \delta'(t) + 2 \int_0^l d\xi \int_0^\xi (\xi - \xi_1) w(\xi_1, t) d\xi_1$, $\Phi_{2\delta}(w; t) = (k/l) \delta(t) [\delta(t) - (l/3) \varphi(t)] - 2(l/3) \int_0^l (l - \xi_1) w(\xi_1, t) d\xi_1 + 2 \int_0^l d\xi \int_0^\xi (\xi - \xi_1) w(\xi_1, t) d\xi_1$.

Определитель системы (23) отличен от нуля и единственное ее решение определяется так:

$$lA_1(t) = 4\Phi_{1\delta}(w;t) - 6\Phi_{2\delta}(w;t), \quad B_1(t) = 3\Phi_{2\delta}(w;t) - \Phi_{1\delta}(w;t). \quad (24)$$

Легко видеть, что

$$\Phi_{i\delta}(w;t) = \Phi_{i\delta}(0;t) + \Phi_{i0}(w;t), \quad i = 1, 2. \quad (25)$$

Из (18), (24), (25) заключаем, что наряду с первым условием (20) условие Самарского $\int_0^l h(\xi, t) d\xi = \mu(t)$, где $\mu(t)$ – заданная положительная функция из $C^1[0, t]$, является достаточным для однозначного определения $h(\xi, t)$. Это единственное решение задачи (16), (20) задается формулой

$$h(\xi, t) = \frac{1}{k\mu(t)} \left[\sigma\mu'(t)\xi^2 - 2l \int_0^\xi (\xi - \xi_1)w(\xi_1, t)d\xi_1 + \frac{4\Phi_{1\mu}(w;t) - 6\Phi_{2\mu}(w;t)}{l}\xi + 3\Phi_{2\mu}(w;t) - \Phi_{1\mu}(w;t) \right]. \quad (26)$$

В силу (7) можно считать, что $k\gamma[\delta(t) - \delta(t_*)] = c \int_{t_*}^t |t_* - \tau|^{m-1} \text{sign}(t_* - \tau) d\tau = (c/(m+1))|t - t_*|^{m+1} \text{sign}(t_* - t)$. Следовательно, допущение (7) дает основание приближенно записать, что

$$\delta(t) = \delta(t_*) + \frac{c \text{sign}(t_* - t)}{(m+1)k\gamma} |t - t_*|^{m+1}, \quad \delta'(t) = \frac{c \text{sign}(t_* - t)}{k\gamma} |t - t_*|^m. \quad (27)$$

Согласно (17), задание $\delta(t)$ означает, что коэффициент уронепроводности однозначно определяется отношением σ/k .

Из соотношений (27) вытекает, что в качестве граничного условия естественно задавать условие

$$\int_0^l h(\xi, t_*) d\xi = \delta_* = \delta(t_*). \quad (28)$$

Согласно (27), (28), в нелокальном краевом условии в качестве μ можно взять функцию

$$\mu(t) = \delta_* + \frac{c \text{sign}(t_* - t)}{(m+1)\gamma k} |t - t_*|^{m+1}, \quad \delta_* > \frac{c(T - t_*)^{m+1}}{(m+1)\gamma k}, \quad T > t_*. \quad (29)$$

Задача с данными на всей границе прямоугольной области для уравнения Лаврентьева–Бицадзе. Рассмотрим уравнение (10) в случае, когда $m = 0$, $b = 0$, $f(x, y) \equiv 0$ в прямоугольной области $\Omega: 0 < x < a$, $-a < y < \beta$. Уравнение Лаврентьева–Бицадзе

$$\text{sign } y \cdot u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (30)$$

описывает динамику грунтовых вод, когда горизонтальный водоупор является непроницаемым и инфильтрация на единицу площади в единицу времени равна нулю: $w(\xi, t) \equiv 0$ (или близка к нулю).

Гиперболическая часть Ω^- смешанной области Ω совпадает с квадратом $ABCD$. Диагонали $AC: x + y = 0$, $DB: x - y = a$ этого квадрата являются характеристиками уравнения (30). Они делят Ω^- на четыре треугольника: Δ_1 с основанием AB и со сторонами AE, EB ; Δ_2 со сторонами BC, CE, EB ; Δ_3 идентичен треугольнику CED ; Δ_4 – треугольнику ADE . Уравнение (30) эллиплично в области $\Omega^+ = \{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < \beta\}$.

При $m = 0$ условие (11) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^a u(x, y) dx = \mu \equiv A, \quad -a < y < \beta, \quad (31)$$

а первое условие (20) переходит в условие

$$u(a, y) = \Phi_a(y), \quad -a \leq y \leq \beta. \quad (32)$$

К условиям (31) и (32) присоединим условия

$$u(x, -a) = h_1(x), \quad u(x, \beta) = h_2(x), \quad 0 \leq x \leq a. \quad (33)$$

Пусть в точке $x = 0$ во все моменты времени от $y = -a$ до критического $y = 0$ ведется наблюдение (например, в автоматическом режиме) за динамикой грунтовых вод. Тогда с допустимой погрешностью условие (31) можно заменить смешанным (нелокальным при $y > 0$ и локальным при $y < 0$) условием

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^a u(x, y) dx = \mu \quad \forall y \in [0, \beta], \quad u(0, y) = \Phi_0(y), \quad -a \leq y \leq 0, \quad (34)$$

где $\Phi_0(y)$ – динамика грунтовых вод в точке $x = 0$. Итак, мы пришли к следующим задачам.

Задача 1. Найти регулярное в $\Omega^+ \cup \Omega^-$ решение уравнения (30) из класса $C(\bar{\Omega}^+) \cup C^1(\Omega)$, которое удовлетворяет условиям (31)–(33).

Задача 2. Найти регулярное в $\Omega^+ \cup \Omega^-$ решение уравнения (30) из класса $C(\bar{\Omega}^+) \cup C^1(\Omega)$, которое удовлетворяет условиям (32)–(34).

Эти задачи для уравнения Лаврентьева–Бицадзе являются качественно новыми.

Рассмотрим вначале решение задачи 2. Пусть существует решение задачи 2 и $u(x, 0) = \tau(x)$, $u_y(x, 0) = \nu(x)$, $0 < x < a$. Точки $z_0 = (x, 0)$, $z_1 = (a, x - a)$, $z_2 = (a - x, -a)$, $z_3 = (0, -x)$ лежат на вершинах характеристического четырехугольника. Поэтому на основании (32)–(34) и теоремы о среднем значении [2, с. 165] для одномерного волнового уравнения можно записать $\tau(x) + h_1(a - x) = \Phi_a(x - a) + \Phi_0(-x)$, в силу чего функция $u(x, y)$ в области Ω^+ должна определяться как решение следующей нелокальной задачи для гармонических функций.

Задача 3. В области Ω^+ найти регулярное решение $u = u(x, y)$ уравнения Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (35)$$

из класса $C(\bar{\Omega}^+)$, удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad u(x, \beta) = h_2(x), \quad 0 \leq x \leq a, \quad u(a, y) = \Phi_a(y), \quad 0 \leq y \leq \beta, \quad (36)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^a u(x, y) dx = \mu, \quad 0 < y < \beta, \quad (37)$$

где

$$\tau(x) = \Phi_0(-x) + \Phi_a(x - a) - h_1(a - x). \quad (38)$$

Решение задачи 3 будем искать в классе функций, обладающих тем свойством, что u_{xx} суммируется по x на $[0, a]$ для любого $y \in]0, T[$. Тогда из (37) имеем $0 = \int_0^a u_{yy}(x, y) dx = - \int_0^a u_{xx}(x, y) dx = u_x(0, y) - u_x(a, y)$, т.е. любое решение $u(x, y)$ задачи 3 должно удовлетворять условию $u_x(0, y) = u_x(a, y)$.

Как следует из (36), (38), условие $\Phi_0(-a) = h_1(0)$ является необходимым условием разрешимости задачи 3. Последнее условие – следствие равенства $\Phi_a(0) = \tau(a)$.

Для демонстрации метода Фурье решения задачи 3 рассмотрим случай, когда $a = \beta = 1$, $\Phi_a(y) \equiv 0$, $h_2(x) \equiv 0$.

Итак, пусть требуется найти регулярное в области $\Omega^+ = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ решение $u(x, y)$ уравнения (35) из класса $C(\bar{\Omega}^+)$ такое, что $u_x \in C(0 \leq x \leq 1, 0 < y < 1)$ и

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(1, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (39)$$

$$u_x(0, y) - u_x(1, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad u(x, 1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (40)$$

Найдем класс нетривиальных решений задачи (39), (40) для уравнения (35), представимых в виде $u(x, y) = U(x)V(y)$. Подставляя это выражение в (35) и принимая во внимание условия (39), (40), получим

$$U''(x) + \lambda U(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad U(1) = 0, \quad U'(0) = U'(1), \quad (41)$$

$$V''(y) - \lambda V(y) = 0, \quad V(1) = 0. \quad (42)$$

Введя новые переменные

$$X(t) = U(x), \quad x = 1 - t, \quad (43)$$

задачу (41) запишем в виде

$$X''(t) + \lambda X(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad X(0) = 0, \quad X'(0) = X'(1). \quad (44)$$

Известно (см. [4, 5]), что числа $\lambda_k = (2\pi k)^2$, $k = 0, 1, \dots$, и функции $X_0(t) = t$, $X_{2k-1}(t) = t \cos(2\pi kt)$, $X_{2k}(t) = \sin(2\pi kt)$ соответственно являются собственными значениями, собственными и присоединенными функциями задачи (44).

Следовательно, связь (43) позволяет утверждать, что система собственных и присоединенных функций задачи (41) задается следующим образом:

$$U_0(x) = 1 - x, \quad U_{2k-1}(x) = (1 - x) \cos(2\pi kx), \quad U_{2k}(x) = -\sin(2\pi kx). \quad (45)$$

Пусть $Y_0(t) = 2$, $Y_{2k-1}(t) = 4 \cos(2\pi kt)$, $Y_{2k}(t) = 4(1 - t) \sin(2\pi kt)$, $k = 1, 2, \dots$, – система собственных и присоединенных функций задачи $Y''(t) + \lambda Y(t) = 0$, $Y(0) = Y(1)$, $Y'(1) = 0$. Отсюда после замены $t = 1 - x$ получаем систему собственных и присоединенных функций $v_0(x) = 2$, $v_{2k-1}(x) = 4 \cos(2\pi kx)$, $v_{2k}(x) = -4x \sin(2\pi kx)$, $k = 1, 2, \dots$, задачи, сопряженной задаче (41).

По условию $\tau(x) \in C[0, 1]$. Из базисной системы (45) следует, что функцию $\tau(x)$ можно разложить в биортогональный ряд [4, 5]

$$\tau(x) = \tau_0 U_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [\tau_{2k} U_{2k}(x) + \tau_{2k-1} U_{2k-1}(x)], \quad (46)$$

где $\tau_0 = (\tau, v_0)_0$, $\tau_{2k} = (\tau, v_{2k})_0$, $\tau_{2k-1} = (\tau, v_{2k-1})_0$. Здесь $(\cdot, \cdot)_0$ означает скалярное произведение в $L_2[0, 1]$.

При $\lambda > 0$ общее решение уравнения (42) имеет вид $V(y) = C_1 \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}y) + C_2 \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}y)$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Потребовав, чтобы $V(y)$ удовлетворяло условию $V(1) = 0$ и дополнительному условию $V(0) = 1$, получим

$$V(y) = \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}y) - \operatorname{th}(\sqrt{\lambda}) \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}y). \quad (47)$$

Отсюда при $\lambda = \lambda_k = (2\pi k)^2$, $k = 0, 1, \dots$, получаем следующую систему функций, удовлетворяющих задаче (42):

$$V_0(y) = 1 - y, \quad V_k(y) = \operatorname{sh}(2\pi ky) - \operatorname{th}(2\pi k) \operatorname{ch}(2\pi ky), \quad k = 1, 2, \dots \quad (48)$$

Решение задачи (39), (40) для уравнения (35) будем искать в виде ряда

$$u(x, y) = \tau_0 U_0(x) V_0(y) + \sum_{k=1}^{\infty} [\tau_{2k} U_{2k}(x) V_k(y) + \tau_{2k-1} \nu_k(x, y)], \quad (49)$$

где

$$\nu_k(x, y) = U_{2k-1}(x) V_k(y) - 2\sqrt{\lambda_k} U_{2k}(x) z_k(y). \quad (50)$$

Непосредственным вычислением, как и в случае уравнения теплопроводности [4, 5], можно убедиться в том, что функция $u(x, y)$, задаваемая формулой (49), (50), будет решением уравнения (35) и будет удовлетворять условиям (39) тогда и только тогда, когда

$$z_k(0) = 0, \quad z_k(1) = 0, \tag{51}$$

$$z_k''(y) - \lambda_k z_k(y) = -V_k(y). \tag{52}$$

Действительно, пусть $u_k(x, y) = \tau_{2k} U_{2k}(x) V_k(y) + \tau_{2k-1} \nu_k(x, y)$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \Delta u_k &= \tau_{2k} [U_{2k}''(x) V_k(y) + U_{2k}(x) V_k''(y)] + \tau_{2k-1} [U_{2k-1}''(x) V_k(y) - \\ &\quad - 2\sqrt{\lambda_k} U_{2k}''(x) z_k(y) + U_{2k-1}(x) V_k''(y) - 2\sqrt{\lambda_k} U_{2k}(x) z_k''(y)]. \end{aligned}$$

Отсюда в силу свойств систем функций (46) и (48) получаем

$$\Delta u_k(x, y) = \tau_{2k-1} [V_k(U_{2k-1}'' + \lambda_k U_{2k-1}) - 2\sqrt{\lambda_k} U_{2k}(z_k'' - \lambda_k z_k)], \quad U_{2k-1}'' + \lambda_k U_{2k-1} = -2\sqrt{\lambda_k} U_{2k}. \tag{53}$$

Поэтому $\Delta u_k = -2\tau_{2k-1} \sqrt{\lambda_k} U_{2k} [V_k + z_k'' - \lambda_k z_k] = 0$. Из (53) следует (52).

Поскольку функция $\tau(x) \in C[0, 1] \cap C^2]0, 1[$ и представима в виде (46), то легко видеть, что функция (49) удовлетворяет условиям (39), (40). Из (49) имеем $\lim_{y \rightarrow +0} u_y = \nu(x) = -\tau_0 U_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \{V_k'(0) [\tau_{2k} U_{2k}(x) + \tau_{2k-1} U_{2k-1}(x)] - 2\sqrt{\lambda_k} \tau_{2k-1} U_{2k}(x) z_k'(0)\}$.

После того как найдены $\tau(x)$ и $\nu(x)$, решение $u(x, y)$ задачи 2 в области Δ_1 определяется как решение задачи Коши $u(x, 0) = \tau(x)$, $u_y(x, 0) = \nu(x)$ для одномерного волнового уравнения

$$u_{yy} = u_{xx}. \tag{54}$$

Это решение имеет вид $u(x, y) = (\tau(x+y) + \tau(x-y))/2 + (1/2) \int_{x-y}^{x+y} \nu(t) dt$, поэтому в силу (38) легко видеть, что $u(x/2, -x/2) = \Psi_0(x)$, $u((1+x)/2, (x-1)/2) = \Psi_1(x)$, $0 \leq x \leq 1$, где $2\Psi_0(x) = \tau(0) + \tau(x) + \int_0^x \nu(t) dt$, $2\Psi_1(x) = \tau(1) + \tau(x) + \int_x^1 \nu(t) dt$, $\tau(0) = \Phi_0(0) + \Phi_1(-1) - h_1(1)$, $\tau(1) = \Phi_0(-1) + \Phi_1(0) - h_1(0)$.

Решение задачи 2 в областях Δ_2 и Δ_4 соответственно определяется как решение задачи Дарбу

$$\begin{aligned} u((1+x)/2, (x-1)/2) &= \Psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(1, y) = \Phi_1(y), \quad -1 \leq y \leq 0, \\ u(x/2, x/2) &= \Psi_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(0, y) = \Phi_0(y), \quad -1 \leq y \leq 0, \end{aligned}$$

для уравнения (54). В области Δ_3 искомое решение $u(x, y)$ совпадает с решением задачи Гурса с данными на характеристиках ED , EC для уравнения (54).

Предложенный в работе [5] метод позволяет исследовать на разрешимость более общую задачу, когда второе условие (39) и первое условие (40) заменены следующими условиями:

$$a_{i1} u_x(0, y) + a_{i2} u_x(1, y) + b_{i1} u(0, y) + b_{i2} u(1, y) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 00-01-00311).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полубаринова-Кочина П.Я., Пряжгинская В.Г., Эмих В.Н. Математические методы в вопросах орошения. М., 1969.
2. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М., 1995.
3. Нахушев А.М. // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 1. С. 72-81.
4. Ионкин Н.И. // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 2. С. 294-304.
5. Ионкин Н.И., Моисеев Е.И. // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 7. С. 1284-1295.

Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, г. Нальчик

Поступила в редакцию
23.01.2001 г.