

Ю. Г. Лумисте

ОДНОРОДНЫЕ РАССЛОЕНИЯ  
СО СВЯЗНОСТЬЮ И ИХ ПОГРУЖЕНИЯ

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|   |     |
|---|-----|
| Введение . . . . .                                    | 191 |
| Глава I. Связности в однородных расслоениях . . . . . | 195 |
| § 1. Однородные и главные расслоения . . . . .        | 195 |
| § 2. Общее понятие связности . . . . .                | 204 |
| § 3. Линейные связности . . . . .                     | 210 |
| Глава II. Погруженные однородные расслоения . . . . . | 218 |
| § 4. Пара однородных пространств . . . . .            | 218 |
| § 5. Погруженные однородные расслоения . . . . .      | 225 |
| § 6. Индуцированные связности . . . . .               | 230 |
| Цитированная литература . . . . .                     | 236 |

## ВВЕДЕНИЕ

Известно, какие изменения в теории связностей вызваны переходом в ней к современной глобальной точке зрения и заменой линейных групп преобразований общей группой Ли. Само понятие связности, возникшее у Леви-Чивита как параллельное перенесение касательных векторов многообразия, превратилось в работах Э. Картана, Ш. Эресмана, В. В. Вагнера и др. в нечто более общее, относящееся ко всем многообразиям, обладающим особой расслоенной структурой. В настоящее время имеется хорошо разработанная теория связностей в главных расслоениях (см., напр., [11], [22], [42], [43]). Связность в ней вводится как дифференцируемое распределение с некоторыми специальными свойствами.

Теория связностей в более общих однородных расслоениях (или, вообще, в расслоениях со структурными группами Ли) разработана в гораздо меньшей степени, хотя именно эти связности встречаются чаще всего в приложениях. Правда, многие

связанные с ними вопросы могут быть решены путем перехода к соответствующим связностям в присоединенных главных расслоениях. Однако наряду с ними имеются задачи, которые требуют самостоятельного подхода.

Первой из таких задач является задача определения самого понятия связности в однородном расслоении. Уже в случае векторных расслоений можно эту задачу решить многими эквивалентными способами (см. например [41], [45]). Аналогично обстоит дело в случае общего однородного расслоения. Связность в нем можно ввести как дифференцируемое распределение, удовлетворяющее некоторым дополнительным условиям. Так ее определил Номидзу в [22] (где, однако, сами эти условия остались еще не сформулированными). Другие возможности указываются в более ранних работах В. В. Вагнера [2] и Г. Ф. Лаптева [9]. В. В. Вагнер рассматривает не только однородные расслоения, но также расслоения, типовыми слоями которых являются общие пространства Веблена—Уайтхеда, и вводит в них связности (как линейные, так и нелинейные) с помощью систем дифференциальных уравнений определенного вида в локальных координатах. Инвариантным является определение Г. Ф. Лаптева. Он ограничивается линейными связностями, определяя их как множества отображений бесконечно близких слоев расслоения, соответствующих касательным векторам базисного многообразия, удовлетворяющие определенным условиям. Нелинейные связности аппаратом, разработанным Г. Ф. Лаптевым, рассматривал Л. Е. Евтушик [6].

Настоящая работа состоит из двух глав. Первая глава содержит качественное изложение основных фактов теории связностей в однородных расслоениях, проведенное в духе современной глобальной дифференциальной геометрии. Его можно рассматривать как развитие изложения Г. Ф. Лаптева [9]. В топологических вопросах, связанных с понятием однородного расслоения, оно опирается на известную монографию Н. Стирода [28]. Связность (вообще говоря, нелинейная) в однородном расслоении  $E$  вводится как отображение множества путей в базе в множество диффеоморфизмов слоя на слой, удовлетворяющее определенным условиям. Доказывается, что она определяет некоторые связности, называемые ассоциированными с ней, также во всех однородных расслоениях, ассоциированных (в смысле Эресмана; см. [36], [28]) с данным расслоением. Если связность линейна, то линейны также все ассоциированные с ней связности. Линейную связность в  $E$  можно определить проще как дифференцируемое распределение на  $E$  — так называемое горизонтальное распределение — удовлетворяющее сформулированным в работе дополнительным условиям. В случае главного расслоения  $P$  устанавливает-

ся, таким образом, связь с широко известным пониманием связности как некоторого распределения на  $P$ , инвариантного относительно действия структурной группы Ли  $G$  на  $P$ .

Класс ассоциированных связностей содержит одну и только одну связность в главном расслоении. Доказывается, что если  $E$  с типовым слоем  $G/H$  рассматривать как факторрасслоение  $P/H$  присоединенного главного расслоения  $\tilde{P}$ , то горизонтальное распределение линейной связности в  $E$ , ассоциированной с заданной линейной связностью в  $P$ , является проекцией горизонтального распределения последней при дифференциале канонической проекции  $P$  на  $E$ .

Материал, излагаемый в первой главе, создает основу для дальнейших исследований связностей в однородных расслоениях, включающих изучение групп голономии и их действия в слоях. При этом приходится применить аппарат внешних форм, позволяющий использовать структурные уравнения расслоения и учитывать более глубокие свойства однородного типового слоя. Результаты этих исследований уже излагались нами в [17] (см. также [13]); поэтому они не включены в настоящую статью.

Во второй главе данной работы излагаются некоторые понятия и результаты, которые лежат в основе применений теории связностей в тех разделах классической дифференциальной геометрии, в которых она использовалась еще очень мало — именно, при исследовании многообразий, погруженных в различные однородные пространства с классическими (или близкими к ним) группами движений: в грассмановы пространства, в пространства сфер, квадрики и т. д.

Рассматривается пара однородных пространств  $\mathcal{G}/G$  и  $\mathcal{G}/\mathcal{H}$  с общей связной группой движений  $\mathcal{G}$  и связными стационарными подгруппами  $G$  и  $\mathcal{H}$ , и вводится понятие  $j$ -инцидентности их точек. Доказывается, что связная компонента многообразия пар взаимно  $j$ -инцидентных точек является орбитой относительно группы  $\mathcal{G}$ , действующей в  $\mathcal{G}/G \times \mathcal{G}/\mathcal{H}$ , и обладает двумя структурами однородного расслоения, для одной из которых базой является  $\mathcal{G}/G$ , а для другой —  $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ . Если в одном из этих пространств, например, в  $\mathcal{G}/G$  дано некоторое подмногообразие  $B$ , то ограничение указанного расслоения на  $B$  называется погруженным однородным расслоением с базовым пространством  $\mathcal{G}/G$  и слоевым пространством  $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ , определяется его отображение на многообразии точек в  $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ , принадлежащих всем слоям, и вводится общее понятие фокуса как критической точки этого отображения.

Примером погруженного расслоения являются так называемые грассмановы расслоения — погруженные однородные расслоения, базовыми пространствами которых являются грасс-

мановы пространства  $m$ -мерных плоскостей, а слоевыми пространствами — соответствующие точечные пространства (проективные, неевклидовы и т. д.). Слои грассманова расслоения являются парами из  $m$ -плоскостей, принадлежащих  $B$ , и многообразий принадлежащих им точек слоевого пространства. Понятие фокуса в евклидову теорию грассмановых расслоений было введено В. В. Вагнером [48], основы локальной дифференциальной геометрии фокальных образов в случае евклидовых и неевклидовых слоевых пространств были заложены им же, Б. А. Розенфельдом, Р. М. Гейдельманом и др. (см. список литературы в [4]; см. также [18], [7], [14], [15]).

Другие примеры погруженных расслоений получаются, если грассманово пространство как базовое заменить однородным пространством сфер конформного пространства или квадратик проективного пространства. Соответствующие расслоения были с локальной точки зрения исследованы в конформном случае Б. А. Розенфельдом и Р. М. Гейдельманом (см. лит. в [1]), а в проективном случае В. С. Малаховским [19].

В указанных работах объектом исследования считалось, преимущественно, не само погруженное однородное расслоение, а его база — многообразие (или семейство) в базовом пространстве, хотя фактически использовались и точки слоевого пространства. Рассмотрение определяемых в настоящей статье однородных расслоений, связанных с этими многообразиями, позволяет ввести в их теорию новое понятие индуцируемой связности. Наиболее просто ее определить, если базовое пространство является редуکتивным (в частности, симметрическим) однородным пространством. В работе доказывается, что тогда в произвольном погруженном расслоении индуцируется некоторая линейная связность.

Например, если базой является многообразие  $B$  в симметрическом однородном пространстве  $m$ -пар проективного пространства  $P_n$  (т. е. пар  $m$ -мерной и  $(n-m-1)$ -мерной плоскости в  $P_n$ ; см. [27]), а слоевым пространством само проективное пространство  $P_n$ , то в обоих погруженных однородных расслоениях, определяемых многообразиями  $m$ -плоскостей или  $(n-m-1)$ -плоскостей пар заданного многообразия  $B$ , индуцируется некоторая обобщенная проективная связность. (Связности такого типа рассматривались в [33]). Открывается возможность классифицировать многообразия  $m$ -пар по свойствам этих связностей. Наиболее простыми являются, например, многообразия, для которых хотя бы одна из этих связностей (или обе) имеет нулевую кривизну. Их естественно называть расслояемыми (или двусторонне расслояемыми) многообразиями  $m$ -пар, так как они являются наиболее естественными обобщениями расслояемых пар прямолинейных конгруэнций в  $P_3$  (см.,

например, [29], [5]). В весьма простом случае, когда  $m=1$  и  $n=2$  или 3, этот классификационный принцип уже использовался в [47]. Некоторые относящиеся сюда результаты в случае, когда в  $P_n$  введена евклидова структура и каждая  $m$ -пара состоит из  $m$ -плоскости и несобственной  $(n-m-1)$ -плоскости во вполне ортогональном к ней  $(n-m)$ -направлении, содержатся в статье автора, которая публикуется в 1966 г. в Уч. зап. Тартуского ун-та.

Если базовое пространство погруженного однородного расслоения не является редуцированным, то в некоторых случаях все же можно в  $E$  ввести индуцируемую связность путем так называемого оснащения. В работе дается одна общая схема такого оснащения, которая является более непосредственным обобщением оснащений Э. Картана [34], О. Гальвани [38] и А. П. Нордена [23], чем схемы, предложенные в [40] и [3]. В случае грассмановых расслоений, слоевым пространством которых является проективное или аффинное пространство, эта схема и некоторые ее обобщения были рассмотрены нами в [17].

## Глава I

### СВЯЗНОСТИ В ОДНОРОДНЫХ РАССЛОЕНИЯХ

#### § 1. ОДНОРОДНЫЕ И ГЛАВНЫЕ РАССЛОЕНИЯ

**1.1. Группы Ли преобразований.** Пусть даны группа Ли  $G$  и дифференцируемое многообразие  $F$ . Гомоморфизм (антигомоморфизм)  $\gamma$  группы  $G$  в группу диффеоморфизмов  $F$  на себя называется право(лево)-сторонним действием группы Ли  $G$  на  $F$ , если отображение  $f: F \times G$  на  $F$ , определяемое формулой

$$f(\xi, g) = (\gamma g)\xi, \quad \xi \in F, g \in G,$$

является дифференцируемым. Диффеоморфизм  $\gamma g: F$  на  $F$  обозначается часто также через  $R_g$  (через  $L_g$ ). Таким образом, при правостороннем действии  $R_{gg'} = R_{g'}R_g$ , т. е.

$$f(\xi, gg') = f(f(\xi, g), g'),$$

при левостороннем действии  $L_{gg'} = L_gL_{g'}$ , т. е.

$$f(\xi, gg') = f(f(\xi, g'), g).$$

Ядро  $K$  гомоморфизма  $\gamma$  называется ядром неэффективности действия  $G$  на  $F$ . Если  $K = \{e\}$ , где  $e \in G$  — единица группы  $G$ , то действие называется эффективным. В этом случае  $(\gamma g)\xi \in F$  обозначается в дальнейшем, для простоты, при левостороннем действии через  $g\xi$ , а при правостороннем действии через  $\xi g$ , т. е.  $g'(g\xi) = (g'g)\xi$ ,  $(\xi g)g' = \xi(gg')$ .

Неэффективное действие  $G$  на  $F$  можно всегда заменить эффективным действием  $G/K$  на  $F$ .

Точки  $\xi, \xi' \in F$  называются эквивалентными, если существует  $g \in G$ , так что  $(\gamma g)\xi = \xi'$ . Классы эквивалентности называются орбитами. Все многообразие  $F$  разбивается на непересекающиеся орбиты. Множество последних называется фактормножеством  $F/G$ . Отображение  $F$  на  $F/G$ , которое каждой точке  $\xi \in F$  ставит в соответствие содержащую ее орбиту, называется канонической проекцией.

Действие  $G$  на  $F$  называется транзитивным, если в  $F$  существует только одна орбита, совпадающая с  $F$ . Тогда элементы  $g \in G$ , удовлетворяющие для заданной точки  $\xi \in F$  условию  $(\gamma g)\xi = \xi$ , образуют замкнутую подгруппу  $H_\xi$ , называемую стационарной подгруппой точки  $\xi$ . Стационарная подгруппа точки  $g\xi$ , очевидно, сопряжена с  $H_\xi$ :  $H_{g\xi} = gH_\xi g^{-1}$ .

Подгруппа  $H_\xi$ , действуя на  $G$  правыми сдвигами, определяет аналитическое фактормногообразие  $G/H_\xi$  и каноническую проекцию  $\chi: G$  на  $G/H_\xi$ . При этом орбитами являются левые смежные классы  $gH_\xi$ . Формулой  $(\gamma'g')(gH_\xi) = gg'H_\xi$  определяется левостороннее действие  $G$  на  $G/H_\xi$ , а формулой  $\alpha(gH_\xi) = (\gamma g)\xi$  — диффеоморфизм  $\alpha: G/H_\xi$  на  $F$ , так что  $(\gamma g)\alpha = \alpha(\gamma'g)$  ([24], стр. 154; [30] стр. 132). В этом смысле многообразие  $F$  с транзитивно действующей на нем группой Ли  $G$  и стационарной подгруппой  $H$  можно отождествить с  $G/H$ . При этом, очевидно,  $\dim F = \dim G - \dim H$ .

Если  $G$  действует на  $F$  эффективно и транзитивно, то  $F$  называется однородным пространством с группой движений  $G$ . Это равносильно тому, что  $H$  не содержит нетривиальных нормальных делителей группы Ли  $G$ .

Если действие группы Ли  $G$  на  $F$  транзитивно и  $H_\xi = \{e\}$ , где  $\xi \in F$ , то говорят, что  $G$  действует на  $F$  просто-транзитивно. В этом случае  $F$  можно отождествить с многообразием самой группы  $G$ . Это единственный случай, когда на  $F$  вместе с левосторонним действием группы Ли  $G$  определено также ее правостороннее действие (правыми сдвигами в  $G$ ) и обратно.

Если  $G$  действует на  $F$  нетранзитивно, то каждая орбита является однородным пространством с группой движений  $G/K$ , где  $K$  — ядро неэффективности. Если  $G$  на каждой орбите действует просто-транзитивно, то действие  $G$  на  $F$  называется простым.

Пусть группа Ли  $G$  действует эффективно на дифференцируемом многообразии  $F$ . Тогда возникает естественный изоморфизм алгебры Ли  $\bar{G} = T_e(G)$  группы Ли  $G$  в алгебру Ли  $\mathfrak{X}(F)$  векторных полей на  $F$  (см. [24], стр. 431; [22], стр. 31), который элементу  $A \in \bar{G}$  сопоставляет векторное поле на  $F$ ,

которое состоит из касательных векторов кривых  $(\exp tA)\xi$  в точках  $\xi \in F$ . Эти векторные поля на  $F$  называются фундаментальными векторными полями, индуцированными однопараметрическими подгруппами  $\exp tA$ . Если  $F$  является однородным пространством с группой движений  $G$  и оно в вышеуказанном смысле отождествляется с  $G/H$ , то фундаментальные векторные поля на  $F$  являются образами инвариантных векторных полей на  $G$  при дифференциале  $d\chi$  канонической проекции  $\chi: G$  на  $G/H$ .

**1.2. Класс ассоциированных однородных расслоений.** Говорят, что дифференцируемое многообразие  $E$  допускает структуру однородного расслоения (см. [28], стр. 12), если существуют:

а) дифференцируемое всюду регулярное отображение (проекция)

$$p: E \text{ на } B,$$

где  $B$  — дифференцируемое многообразие (база),

б) однородное пространство  $F$  (типовой слой) с левосторонне действующей группой движений  $G$  (структурной группой),

в) семейство  $\{U_\alpha\}$  открытых подмножеств, покрывающих  $B$  (открытое покрытие), и семейство  $\{\varphi_\alpha\}$  диффеоморфизмов

$$\varphi_\alpha: U_\alpha \times F \text{ на } p^{-1}(U_\alpha)$$

(диффеоморфизмов локальной тривиальности),

г) дифференцируемые отображения

$$f_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \text{ в } G$$

(переходные функции), так что

$$E1. p\varphi_\alpha(x, \xi) = x, \text{ при каждом } x \in U_\alpha, \xi \in F,$$

$$E2. \varphi_\beta(x, \xi) = \varphi_\alpha(x, (f_{\alpha\beta}x)\xi) \text{ при каждом } x \in U_\alpha \cap U_\beta \text{ и } \xi \in F.$$

Пусть дифференцируемое многообразие  $E$  допускает структуру однородного расслоения. Прообраз  $p^{-1}(x)$  заданной точки  $x \in B$  называется слоем над  $x$ . Слой, проходящий через точку  $z \in E$ , обозначается также  $F_z$ . Если  $x \in U_\alpha \subset B$ , то формулой

$$\varphi_\alpha^x \xi = \varphi_\alpha(x, \xi) \quad (1)$$

определяется диффеоморфизм  $\varphi_\alpha^x$  типового слоя  $F$  на слой  $p^{-1}(x)$ . Эти диффеоморфизмы позволяют E2 писать в виде

$$(\varphi_\alpha^x)^{-1} \varphi_\beta^x \xi = (f_{\alpha\beta}x)\xi, \quad (2)$$

откуда следует, что

$$(f_{\alpha\beta}x)(f_{\beta\gamma}x) = f_{\alpha\gamma}x \quad (3)$$

при каждом  $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ .

Диффеоморфизм  $\varphi_\alpha^{-1}: p^{-1}(U_\alpha)$  на  $U_\alpha \times F$ , обратный к  $\varphi_\alpha$ , определяет, кроме проекции  $p: p^{-1}(U_\alpha)$  на  $U_\alpha$ , дифференцируемое отображение

$$\psi_\alpha: p^{-1}(U_\alpha) \text{ на } F,$$

так что

$$\psi_\alpha \varphi_\alpha^* \xi = \xi, \quad \varphi_\alpha^{p*} \psi_\alpha z = z. \quad (4)$$

Условие E2 можно теперь писать также в виде:

$$\psi_\alpha z = (f_{\alpha\beta} p z) \psi_\beta z \quad (5)$$

при каждом  $z \in p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ .

Если заданы дифференцируемое многообразие  $B$ , однородное пространство  $F$  с группой движений  $G$  и для некоторого открытого покрытия  $\{U_\alpha\}$  многообразия  $B$  дифференцируемые отображения

$$f_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \text{ в } G,$$

так что удовлетворяется (3), то существует одно и, с точностью до диффеоморфизма, только одно дифференцируемое многообразие  $E$ , допускающее структуру однородного расслоения с заданными  $B, F, G$  и  $f_{\alpha\beta}$  (см. [28], стр. 20). Для его построения нужно составить множества  $X_\alpha = U_\alpha \times F$  и в их объединении  $X = \bigcup_\alpha X_\alpha$  ввести отношение эквивалентности  $\rho$  следующим образом:  $(x, \xi) \in U_\alpha \times F$  эквивалентно  $(x, \xi') \in U_\beta \times F$  тогда и только тогда, когда

$$\xi' = (f_{\beta\alpha} x) \xi.$$

Фактормножество  $E = X/\rho$  классов эквивалентности является дифференцируемым многообразием с нужными свойствами (см. [28], стр. 20—22; [22], стр. 34—35).

Две структуры однородного расслоения в дифференцируемом многообразии  $E$  называются эквивалентными (см. [28], стр. 13), если у них совпадают  $B, p, F$  и  $G$ , а семейства  $\{U_\alpha\}, \{\varphi_\alpha\}$  и  $\{U'_\alpha\}, \{\varphi'_\alpha\}$  таковы, что для каждого  $U'_\alpha \cap U_\alpha$  существует дифференцируемое отображение  $\bar{f}_{\alpha\alpha}: U'_\alpha \cap U_\alpha$  в  $G$ , так что

$$(\varphi'_\alpha)^{-1} \varphi_\alpha^* \xi = (\bar{f}_{\alpha\alpha} x) \xi$$

при каждом  $x \in U'_\alpha \cap U_\alpha$  и  $\xi \in F$ . Аксиомы эквивалентности, очевидно, удовлетворены.

Пусть дифференцируемое многообразие  $E$  допускает структуру однородного расслоения. Пара, которая состоит из  $E$  и класса эквивалентных структур однородного расслоения в  $E$ , называется в дальнейшем просто однородным расслоением  $E$ .

Диффеоморфизм  $\mu$  базы  $B$  однородного расслоения  $E$  в само многообразии  $E$ , при котором  $p\mu x = x$  для любого  $x \in B$ , называется сечением в однородном расслоении.

Пусть в базе  $B$  однородного расслоения  $E$  задано дифференцируемое подмногообразие  $\tilde{B}$ . Тогда  $\tilde{E} = p^{-1}(\tilde{B})$  допускает индуцируемую структуру однородного расслоения с базой  $\tilde{B}$ , так что ее типовой слой и структурная группа являются общими с  $E$ , ее проекцией  $\tilde{p}$  является ограничение  $p$  на  $\tilde{E}$ , семейства  $\{\tilde{U}_\alpha\}$  и  $\{\tilde{\varphi}_\alpha\}$  для нее состоят из  $U_\alpha \cap \tilde{B}$  и ограничений  $\varphi_\alpha$  на  $\tilde{U}_\alpha \times F$ , а  $\tilde{f}_{\alpha\beta}$  являются ограничениями  $f_{\alpha\beta}$  на  $\tilde{U}_\alpha \cap \tilde{U}_\beta$  (см. [28], стр. 14). При этом эквивалентные структуры главного расслоения в  $E$  индуцируют в  $\tilde{E}$  также эквивалентные структуры. Определяется некоторое однородное расслоение  $\tilde{E}$ , которое называется ограничением  $E$  на  $\tilde{B}$ .

Два однородных расслоения  $E$  и  $E'$  называются ассоциированными (см. [28], стр. 54; понятие введено Эресманом [36]), если у них для некоторых структур однородного расслоения, допускаемых ими, совпадают  $B$ ,  $p$ ,  $G$  и  $f_{\alpha\beta}$ . Тогда для любых других структур однородных расслоений, допускаемых ими и эквивалентных с указанными, также совпадают  $B$ ,  $p$ ,  $G$  и  $f_{\alpha\beta}$ , так что определение является корректным.

Нетрудно проверить, что отношение ассоциированности удовлетворяет аксиомам эквивалентности. Все однородные расслоения распределяются между классами ассоциированных однородных расслоений. Однородные расслоения в каждом классе находятся, очевидно, во взаимно однозначном соответствии с несопряженными между собой замкнутыми подгруппами в структурной группе Ли  $G$  (общей для всех однородных расслоений заданного класса), не содержащими нетривиальных нормальных делителей группы  $G$ .

Особое значение в каждом классе имеет однородное расслоение, которое соответствует тривиальной подгруппе  $\{e\} \subset G$  и называется главным.

**1.3. Главные расслоения.** Однородное расслоение называется главным, если его структурная группа Ли  $G$  действует на типовом слое  $F$  просто-транзитивно. Тогда  $F$  можно заменить многообразием  $G$ .

Известно (см. [28], стр. 50), что на главном расслоении определяется инвариантное простое действие его структурной группы Ли  $G$ . Именно, справедлива следующая

**Л е м м а.** Пусть дифференцируемое многообразие  $P$  допускает структуру главного расслоения, так что структурная группа Ли  $G$  левосторонне действует на типовом слое  $F$ . Тогда мож-

но определить простое правостороннее действие структурной группы  $G$  на всем многообразии  $P$ , так что орбитами являются слои расслоения.

Доказательство. С помощью диффеоморфизма локальной тривиальности  $\varphi_\alpha: U_\alpha \times G$  на  $p^{-1}(U_\alpha)$  можно определить правостороннее действие  $G$  на каждом  $p^{-1}(U_\alpha)$ , положив для  $z = \varphi_\alpha(x, g)$  и  $\tilde{g} \in G$

$$(z\tilde{g})_\alpha = \varphi_\alpha(x, g\tilde{g}). \quad (1)$$

При этом оказывается, что на  $p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$  эти действия совпадают. В самом деле, если

$$z = \varphi_\beta(x, g'),$$

то, в силу E2 и просто-транзитивности действия  $G$  на  $F$ ,

$$g' = (f_{\beta\alpha}x)g$$

и в  $p^{-1}(U_\beta)$  имеем

$$(z\tilde{g})_\beta = \varphi_\beta(x, g'\tilde{g}) = \varphi_\beta(x, (f_{\beta\alpha}x)g\tilde{g}).$$

Равенство

$$(z\tilde{g})_\alpha = (z\tilde{g})_\beta$$

является теперь прямым следствием из E2. Лемма доказана.

Из определения однородного расслоения следует, что при этом правостороннем действии  $G$  на  $P$  удовлетворяются следующие условия.

P1. Фактормножество  $P/G = B$  является дифференцируемым многообразием и каноническая проекция  $p: P$  на  $B$  является всюду регулярным дифференцируемым отображением.

P2. Каждая точка  $x \in B$  обладает окрестностью  $U \subset B$ , так что существует диффеоморфизм (локальное сечение)

$$\mu: U \rightarrow p^{-1}(U)$$

со свойством:

$$p\mu x' = x' \quad (2)$$

для любого  $x' \in U$ .

Действительно, P1 является прямым следствием из "а), а в P2 можно при  $x \in U_\alpha$  взять  $U \subset U_\alpha$ , а  $\mu$  определить формулой

$$\mu x = \varphi_\alpha(x, e),$$

где  $e$  — единица в  $G$ .

В обратном направлении справедлива следующая

Теорема. Если на дифференцируемом многообразии  $P$  определено простое (правостороннее) действие группы Ли  $G$ , так что удовлетворяются P1 и P2, то  $P$  является главным расслоением.

Доказательство. Понятия, предусмотренные в а), вводятся условием P1. В качестве  $F$  принимается многообразие самой группы Ли  $G$ , на котором  $G$  действует левыми сдвигами. Покрытие  $\{U_\alpha\}$  многообразия  $B$  составляется из окрестностей  $U$ , существование которых постулируется в P2. При этом  $\varphi_\alpha$  для  $U_\alpha = U$  определяются формулой

$$\varphi_\alpha(x, g) = (\mu x)g, \quad x \in U, \quad g \in G. \quad (3)$$

Переходные функции  $f_{\beta\alpha}$  задаются следующим образом. Пусть  $x \in U_\alpha \cap U_\beta$  и пусть

$$\varphi_\alpha(x, g_0) = \varphi_\beta(x, g'_0),$$

где  $g_0$  и  $g'_0$  — некоторые фиксированные элементы в  $G$ . Тогда  $f_{\beta\alpha}$  определяется формулой

$$f_{\beta\alpha}x = g'_0 g_0^{-1}.$$

Остается проверить, что удовлетворяются условия E1 и E2. Равенство E1 следует из (2), (3) и из того, что  $p$  является канонической проекцией. Условие E2 проверяется следующим образом: из (3) следует, что для произвольного  $g' \in G$  имеет место

$$\varphi_\alpha(x, \tilde{g}) = \varphi_\alpha(x, g_0)(g_0^{-1}\tilde{g}) = \varphi_\beta(x, g'_0)(g_0^{-1}\tilde{g}) = \varphi_\beta(x, (f_{\beta\alpha}x)\tilde{g}).$$

Теорема доказана.

Теорему можно рассматривать как новое определение понятия главного расслоения, которое часто и принимается за основное определение (см., напр., [22], стр. 33; [43], стр. 50). В случае компактной группы Ли  $G$  это определение можно еще упростить: каждое дифференцируемое многообразие  $P$ , на котором определено простое действие компактной группы Ли  $G$ , является главным расслоением [39].

Слоями главного расслоения  $P$  являются орбиты в  $P$  относительно  $G$ . Для каждой точки  $\omega \in P$  формулой  $\gamma_\omega g = \omega g$  определяется диффеоморфизм  $\gamma_\omega$  структурной группы Ли  $G$  на слой, проходящий через  $\omega$ , который называется фундаментальным диффеоморфизмом в точке  $\omega \in P$ .

Если в главном расслоении  $P$  с базой  $B$  и структурной группой Ли  $G$  существует сечение  $\mu$ , то оно тривиально, т. е. диффеоморфно с  $B \times G$ . Действительно, диффеоморфизм  $\varphi: B \times G$  на  $P$  устанавливается тогда формулой  $\varphi(x, g) = (\mu x)g$ .

Это обстоятельство отличает главные расслоения от остальных однородных расслоений, которые могут иметь сечение, но тем не менее быть нетривиальными, т. е. не диффеоморфными с  $B \times F$ .

**1.4. Факторизация главного расслоения.** Пусть дано однородное расслоение  $E$ . В классе ассоциированных с ним однородных расслоений существует одно и только одно (с точностью до изоморфизма) главное расслоение  $P$  (см. 1.2), которое, следуя Эресману [36], называется присоединенным к  $E$  главным расслоением. Можно указать одну общую конструкцию для получения однородного расслоения  $E$  из присоединенного к нему главного расслоения  $P$  (см. [12]; ср. [43], стр. 57).

**Т е о р е м а.** Пусть в структурной группе Ли  $G$  главного расслоения  $P$  выделена замкнутая подгруппа  $H$ . Тогда действие  $H$  на  $P$ , индуцируемое простым (правосторонним) действием  $G$  на  $P$ , определяет в  $P$  новую структуру главного расслоения со структурной группой  $H$ . Базой этой структуры является однородное расслоение  $E$ , база которого совпадает с базой  $B$  расслоения  $P$ , типовым слоем которого является фактормногообразии  $G/H$  и структурной группой — факторгруппа  $G/K$ , где  $K$  — максимальный нормальный делитель группы  $G$ , содержащийся в подгруппе  $H$ .

**Доказательство.** Известно, что правостороннее действие подгруппы  $H$  на  $G$  определяет в  $G$  структуру главного расслоения, базой которой является аналитическое многообразие  $G/H$  левых смежных классов в  $G$  по  $H$  ([32], стр. 163, [28], стр. 42). Определяется каноническая проекция

$$\chi: G \text{ на } G/H.$$

В многообразии  $P$  определяется каноническая проекция

$$\pi: P \text{ на } P/H,$$

где  $P/H = E$  является многообразием орбит в  $P$  по  $H$ . Очевидно,

$$\pi\omega = \pi(\omega h), \quad \omega \in P, \quad h \in H.$$

Оказывается, что  $E$  обладает структурой однородного расслоения. Прежде всего нужно доказать, что  $E$  является дифференцируемым многообразием.

Через  $p: P/H$  на  $B$  обозначается отображение, которое орбите  $z \in P/H$  ставит в соответствие ту точку  $x \in B$ , слой  $\tilde{p}^{-1}(x) \subset P$  над которой содержит  $z$ , так что

$$\tilde{p}\omega = p\pi\omega.$$

Оказывается, что диффеоморфизм локальной тривиальности  $\tilde{\varphi}_\alpha: U_\alpha \times G$  на  $\tilde{p}^{-1}(U_\alpha)$  определяет также диффеоморфизм

$$\varphi_\alpha: U_\alpha \times G/H \text{ на } p^{-1}(U_\alpha). \quad (1)$$

Это следует из того, что в силу (3) из 1.3

$$\tilde{\varphi}_\alpha(x, g)H = \tilde{\varphi}_\alpha(x, gH) \quad (2)$$

и поэтому созокупность пар  $(x, gH) \subset U_\alpha \times G$  отображается при  $\tilde{\varphi}_\alpha$  в орбиту  $\varphi_\alpha(x, g)H$  в  $P$  по  $H$ . Это отображение и определяет диффеоморфизм (1) (ср. [32], стр. 48, 49). При этом, в силу (2),

$$\varphi_\alpha(x, \chi g) = \pi \tilde{\varphi}_\alpha(x, g). \quad (3)$$

Если на аналитическом многообразии  $G/H$  ввести координатный атлас  $\{W_\rho\}$ , то для множества  $P/H$  определено открытое покрытие областями типа  $\varphi_\alpha(U_\alpha, W_\rho)$ . Нетрудно убедиться, что переход от координат в области  $\varphi_\alpha(U_\alpha, W_\rho)$  к координатам в области  $\varphi_\beta(U_\beta, W_\sigma)$  (в случае непустого пересечения областей) совершается обратимой системой дифференцируемых функций. Тем самым доказано, что  $E = P/H$  является дифференцируемым многообразием.

Вместе с тем указаны понятия, предусмотренные в пунктах а) — в) определения однородного расслоения (нужно взять  $F = G/H$ ,  $G$  заменить на  $G/K$ ). В качестве переходных функций для  $E$  нужно взять

$$f_{\alpha\beta} = x \tilde{f}_{\alpha\beta}, \quad (4)$$

где  $x: G$  на  $G/K$  является каноническим отображением группы  $G$  на факторгруппу  $G/K$ , а  $\tilde{f}_{\alpha\beta}$  — переходные функции для  $P$ .

Условия E1 и E2 в определении однородного расслоения при этом удовлетворены. Действительно,

$$E1: p\varphi_\alpha(x, \chi g) = p\pi \tilde{\varphi}_\alpha(x, g) = \tilde{p}\varphi_\alpha(x, g) = x.$$

$$E2: \varphi_\beta(x, \chi g) = \pi \tilde{\varphi}_\beta(x, g) = \pi \tilde{\varphi}_\alpha(x, (\tilde{f}_{\alpha\beta}x)g) = \\ = \varphi_\alpha(x, \chi (\tilde{f}_{\alpha\beta}x)g) = \varphi_\alpha(x, (f_{\alpha\beta}x)(\chi g)).$$

Здесь использован тот факт, что при  $g, g' \in G$

$$\chi(g'g) = g'(\chi g) = (xg')(\chi g),$$

потому что  $K$  является ядром неэффективности действия  $G$  на  $G/H$ .

Тем самым проверены вторая часть теоремы и условие P1 для новой структуры главного расслоения в  $P$ . Нетрудно проверить и условие P2, используя то обстоятельство, что действие  $H$  на  $G$  определяет в  $G$  структуру главного расслоения, т. е. каждая точка  $\xi \in G/H$  имеет окрестность, над которой существует локальное сечение. Теорема доказана.

Однородное расслоение  $E = P/H$  называется факторрасслоением главного расслоения  $P$  по замкнутой подгруппе Ли  $H$  его структурной группы Ли  $G$ .

Следствие 1. Факторрасслоение  $P/K$ , где  $K$  является замкнутым нормальным делителем Ли структурной группы Ли

$G$  главного расслоения  $P$ , является главным расслоением  $P^*$  со структурной группой  $G/K$ .

Это следует непосредственно из теоремы и определения главного расслоения.

Следствие 2. Если замкнутая подгруппа  $H$  в  $G$  не содержит нетривиальных нормальных делителей группы  $G$ , то  $P$  и  $E = P/H$  ассоциированы друг к другу, т. е.  $P$  является присоединенным к  $E$  главным расслоением.

Это следует из (4) в силу того, что  $\ast:G$  на  $G/K$  в этом случае является тождеством.

(В общем случае расслоения  $P$  и  $P/H$ , рассматриваемые в теореме, находятся в отношении слабой ассоциированности; см. [28], стр. 55.)

Нетрудно видеть, что, наоборот, каждое однородное расслоение  $E$  может быть получено (с точностью до изоморфизма) как факторрасслоение  $P/H$  присоединенного к нему главного расслоения  $P$  по стационарной подгруппе  $H$  своего типового слоя  $G/H$ .

## § 2. ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ СВЯЗНОСТИ

**2.1. Понятие пути.** Одним из основных понятий, связанных с однородными расслоениями, является понятие связности. Для определения и изучения связности в однородном расслоении необходимо понятие пути (см., напр., [24], [11]). Путь  $\lambda(x_0, x_1)$  с началом  $x_0$  и концом  $x_1$  в дифференцируемом многообразии  $B$  — это кусочно непрерывно дифференцируемое отображение  $\varphi: I$  в  $B$  единичного отрезка  $I = [0, 1]$  в многообразии  $B$ . Произвольная точка пути обозначается  $x_t = \varphi t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

Пути  $\varphi_t: I$  в  $B$ ,  $\varphi_t^*: I$  в  $B$ , определяемые формулами

$$\varphi_t \tau = \varphi(t\tau), \quad \varphi_t^* \tau = \varphi(t + (1-t)\tau),$$

называются, соответственно, частью  $\lambda_t$  и дополнительной частью  $\lambda_t^*$  пути  $\lambda$ . Очевидно, что  $\lambda_t, \lambda_t^* \subset \lambda$ . Если ограничение  $\varphi$  над частью  $[t_0, t_1]$  отрезка  $I$  является диффеоморфизмом, то  $\lambda_{t_0, t_1}^*$  называется дифференцируемым куском пути  $\lambda$ .

Пути  $\lambda \subset B$  и  $\lambda' \subset B$  называются эквивалентными и обозначаются  $\lambda \sim \lambda'$ , если для соответствующих отображений  $\varphi$  и  $\varphi'$  существует кусочно непрерывно дифференцируемый гомеоморфизм  $\psi: I$  на  $I$ , такой что  $\psi(0) = 0$ ,  $\varphi' = \varphi\psi$ . Аксиомы эквивалентности, очевидно, выполнены. Классы эквивалентных путей называются направленными линиями.

Путь называется единичным, если  $\varphi t = x_0$  для всех  $t \in I$ . Путь  $\lambda^{-1}$ , обратный к данному пути  $\lambda$ , определяется отображением  $\psi$ ,  $\psi t = \varphi(1-t)$ , отрезка  $I$  в  $B$ . Пусть заданы два

пути  $\lambda(x_0, x_1)$  и  $\lambda'(x'_0, x'_1)$ , определяемые отображениями  $\varphi: I$  в  $B$  и  $\varphi': I$  в  $B$ , так что  $x'_0 = x_1$ . Тогда их произведением  $\lambda\lambda'$  называется путь  $\lambda''$  в  $B$ , определяемый формулой

$$\varphi''t = \begin{cases} \varphi(2t) & \text{для } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \varphi'(2t-1) & \text{для } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что при  $\lambda \sim \lambda_1$ ,  $\lambda' \sim \lambda'_1$  имеют место  $\lambda^{-1} \sim \lambda_1^{-1}$ ,  $\lambda\lambda' \sim \lambda_1\lambda'_1$ , так что указанные операции определяются также на множестве направленных линий. Умножение путей не является ассоциативным, но умножение направленных линий уже ассоциативно.

Касательный вектор  $X$  пути  $\lambda(x_0, x_1)$  определяется формулой (см. [32], стр. 116)

$$Xf = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f x_t - f x_0}{t}.$$

Эквивалентные пути имеют, очевидно, касательные векторы, отличающиеся только вещественным множителем.

Путь  $\lambda(x, x)$ , начало и конец которого совпадают с точкой  $x \in B$ , называется замкнутым в  $x$ . В частности, каждый единичный путь является замкнутым. Класс эквивалентных замкнутых путей (замкнутая направленная линия) называется петлей. Множество петель в данной точке образует топологическую полугруппу с инволютивным антиавтоморфизмом  $\lambda \rightarrow \lambda^{-1}$ . Петли, гомотопные нулю, образуют в ней подполугруппу. Следует отметить, что класс единичного пути не является единицей этих полугрупп.

**2.2 Понятие связности.** Связностью в однородном расслоении  $E$  называется отображение  $\sigma$  множества всех путей  $\{\lambda\}$  в базу  $B$  в множество всех диффеоморфизмов слоя на слой, удовлетворяющее следующим условиям:

а1. если задан путь  $\lambda(x_0, x_1)$  в базе  $B$ , то  $\sigma\lambda = \sigma^\lambda$  является диффеоморфизмом слоя  $p^{-1}(x_1)$  на слой  $p^{-1}(x_0)$ , причем

б)  $\sigma\lambda\lambda' = \sigma^\lambda\sigma^{\lambda'}$

в)  $\sigma\lambda^{-1} = (\sigma^\lambda)^{-1}$ ;

а2. если  $\lambda(x_0, x_1) \subset U_\alpha \subset B$ , то  $(\varphi_\alpha^{x_0})^{-1}\sigma^\lambda\varphi_\alpha^{x_1}: F$  на  $F$  является действием на  $F$  некоторого элемента  $g_\alpha^\lambda \in G$  (единственного в силу эффективности действия), т. е. если

$$(\varphi_\alpha^{x_0})^{-1}\sigma^\lambda\varphi_\alpha^{x_1}\xi = g_\alpha^\lambda\xi \quad (1)$$

для любого  $\xi \in F$ ;

с3. отображение  $\Phi_\alpha^\lambda: \lambda$  в  $G$ , которое каждой точке  $x_t$  пути  $\lambda \subset U_\alpha$  ставит в соответствие элемент  $\Phi_\alpha^\lambda x_t = g_\alpha^{\lambda t} \in G$ , является кусочно непрерывно дифференцируемым и определяет, тем самым некоторый путь в  $G$ , обозначаемый  $\Phi_\alpha^\lambda$ ;

с4. для каждого пути  $\lambda \subset U_\alpha$  путь  $\Phi_\alpha^\lambda \subset G$  имеет начало в единице  $e \in G$ ; если пути  $\lambda, \lambda' \subset U_\alpha$  с общим началом  $x$  имеют общий касательный вектор  $X$ , то пути  $\Phi_\alpha^\lambda, \Phi_\alpha^{\lambda'}$  также имеют одинаковый касательный вектор  $\omega_\alpha(x, X)$ , зависящий дифференцируемым образом как от  $x$ , так и от  $X$ .

Нетрудно проверить, что условия с2, с3 и с4 инвариантны на непустых пересечениях  $U_\alpha \cap U_\beta$  относительно перехода от  $U_\alpha$  к  $U_\beta$ . Действительно, если  $\lambda \subset U_\alpha \cap U_\beta$ , то в силу Е2

$$\varphi_\beta^x = \varphi_\alpha^x (f_{\alpha\beta} x). \quad (2)$$

Подстановка в условие (1), написанное для  $\lambda_t$ , покажет, что с2 удовлетворяется и для  $U_\beta$ , причем

$$g_\beta^{\lambda t} = (f_{\alpha\beta} x_0)^{-1} g_\alpha^{\lambda t} (f_{\alpha\beta} x_t). \quad (3)$$

Эта формула определяет отображение  $\Phi_\beta^\lambda$  по заданному  $\Phi_\alpha^\lambda$ . Если  $\Phi_\alpha^\lambda$  кусочно непрерывно дифференцируемо, то таковым является и  $\Phi_\beta^\lambda$ . Так как  $g_\alpha^{\lambda_0} = e$ , то и  $g_\beta^{\lambda_0} = e$ . Для касательного вектора к пути  $\Phi_\beta^\lambda$  в его начале получается из равенства (3), которое можно переписать в виде

$$g_\beta^{\lambda t} = [(f_{\alpha\beta} x_0)^{-1} g_\alpha^{\lambda t} (f_{\alpha\beta} x_0)] [(f_{\alpha\beta} x_0)^{-1} (f_{\alpha\beta} x_t)], \quad (4)$$

следующая формула:

$$\omega_\beta(x, X) = \text{ad} (f_{\alpha\beta} x)^{-1} \omega_\alpha(x, X) + (f_{\alpha\beta}^* \theta)(x, X). \quad (5)$$

Здесь при переходе от (4) к (5) используется известный факт, что умножению соответствующих элементов двух путей в группе Ли  $G$  с началом в единице  $e \in G$  — образам одной и той же точки отрезка  $[0, 1]$  — соответствует сложение их касательных векторов в алгебре Ли  $\underline{G} = T_e(G)$  (см. [24], стр. 376; [30], стр. 113). Под  $\theta$  понимается 1-форма на  $G$  со значениями в  $\underline{G}$ , которая вектору  $Y \in T_g(G)$  ставит в соответствие вектор  $\theta(\underline{g}, Y) \in \underline{G} = T_e(G)$  определяемого им лево-инвариантного поля на  $G$ , а под  $f_{\alpha\beta}^* \theta$  — 1-форма на  $U_\alpha \cap U_\beta$  со значениями в  $\underline{G}$ , являющаяся взаимным образом 1-формы  $\theta$  при  $f_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$  (см. [30], стр. 37). Поэтому из (5) следует, что инвариантно и условие с4.

Если в некотором однородном расслоении  $E$  с базой  $B$  дана связность  $\sigma$ , то вместе с тем дана некоторая связность  $\tilde{\sigma}$  также в любом его ограничении  $\tilde{E}$  на подмногообразии  $\tilde{B} \subset B$ . Это следует непосредственно из самого определения связности.

Диффеоморфизм  $\sigma^\lambda$  слоя  $p^{-1}(x_1)$  на слой  $p^{-1}(x_0)$ , соответствующий пути  $\lambda(x_0, x_1) \subset B$ , называется параллельным перенесением вдоль пути  $\lambda$  в этой связности  $\sigma$ .

**2.3. Группа голономии.** Пусть в однородном расслоении  $E$  дана связность  $\sigma$ . Если в базе  $B$  расслоения  $E$  задан замкнутый путь  $\lambda(x, x)$ , то  $\sigma^\lambda$  является, в силу условия  $\sigma 1$ , диффеоморфизмом слоя  $p^{-1}(x)$  на себя, который, в силу (1), переносится диффеоморфизмом  $(\varphi_\alpha^x)^{-1}$  в действие некоторого элемента  $g_\alpha^\lambda \in G$  на  $F$ .

Из условия  $\sigma 1$  б) следует, что умножению двух замкнутых путей  $\lambda$  и  $\lambda'$  в точке  $x \in B$  соответствует умножение соответствующих элементов в группе  $G$ :

$$g_\alpha^{\lambda\lambda'} = g_\alpha^\lambda g_\alpha^{\lambda'},$$

а из  $\sigma 1$  а) следует, что  $g_\alpha^\lambda$  фактически связывается с целым классом эквивалентных замкнутых путей в точке  $x$ , т. е. с петлей. Следовательно, возникает гомоморфизм топологической полугруппы петель в точке  $x \in B$  в структурную группу  $G$ . Инволютивному антиавтоморфизму  $\lambda \rightarrow \lambda^{-1}$  в полугруппе петель соответствует при этом, в силу условия  $\sigma 1$ , переход к обратному элементу в группе  $G$ . Единичной петле соответствует, в силу условия  $\sigma 4$ , единица  $e$  группы  $G$ .

Образ полугруппы петель в группе  $G$  при этом гомоморфизме является, очевидно, группой и называется группой голономии  $\Psi_x$  в точке  $x$  для данной связности  $\sigma$ . Она определяется с точностью до внутреннего автоморфизма в группе  $G$ , потому что из (3), в котором при  $t = 1$  в данном случае имеют место равенства  $x_0 = x_1 = x$ , следует, что  $g_\beta^\lambda = (f_{\alpha\beta} x)^{-1} g_\alpha^\lambda (f_{\alpha\beta} x)$ . Более того, оказывается, что при переходе от точки  $x \in B$  к точке  $x' \in B$  группа голономии  $\Psi_x$  подвергается также лишь некоторому внутреннему автоморфизму в  $G$  (см. [11], стр. 56). Поэтому с точностью до внутренних автоморфизмов можно говорить просто о группе голономии  $\Psi$  связности  $\sigma$  в расслоенном пространстве  $E$ .

Образ подполугруппы петель, гомотопных нулю, называется ограниченной группой голономии  $\Psi^0$ . Она также определяется с точностью до внутренних автоморфизмов в группе  $G$ .

Известно, что  $\Psi^0$  есть связная подгруппа Ли структурной группы  $G$  и является нормальным делителем в группе голономии  $\Psi$  (см. [11], стр. 57). Возникает естественный гомоморфизм фундаментальной группы  $\pi_1(B)$  базы  $B$  на группу  $\Psi/\Psi^0$ . Если  $B$  удовлетворяет второй аксиоме счетности, то группа  $\pi_1(B)$ , вместе с группой  $\Psi/\Psi^0$ , является счетной. Поэтому  $\Psi$  можно рассматривать как дифференцируемое многообразие, в котором  $\Psi^0$  является открытым подмножеством, т. е.  $\Psi$  можно рассматривать как группу Ли (см. [44], стр. 9). При этом ее нормальный делитель  $\Psi^0$  совпадает с ее линейно связной компонентой единицы:

**2.4. Ассоциированные связности.** Отображение  $\Phi_\alpha$  множества путей из  $U_\alpha \subset B$  в множество путей в  $G$ , исходящих из  $e \in G$ , определяемое в условиях  $\sigma 3$  и  $\sigma 4$ , удовлетворяет, в силу  $\sigma 1$ , следующим условиям:

$\sigma 1'$ . а) из  $\lambda \sim \lambda'$  следует, что  $\Phi_\alpha \lambda \sim \Phi_\alpha \lambda'$ ,

б) если  $\lambda(x_0, x_1) \subset U_\alpha$ ,  $\lambda'(x'_0, x'_1) \subset U_\alpha$  и  $x'_0 = x_1$ , то

$$\Phi_\alpha \lambda \lambda' = [\Phi_\alpha \lambda][(\Phi_\alpha^\lambda x_1) \Phi_\alpha \lambda'],$$

в)  $\Phi_\alpha \lambda^{-1} = (\Phi_\alpha^\lambda x_1)^{-1} (\Phi_\alpha \lambda)^{-1}$ .

(Здесь в правой части равенства б) путь  $\Phi_\alpha \lambda$  умножается на путь, который получается из  $\Phi_\alpha \lambda'$  левым сдвигом в группе  $G$ , определяемом элементом  $\Phi_\alpha^\lambda x_1$ ; в равенстве в) символ  $(\dots)^{-1}$  обозначает для элемента из  $G$  его обратный элемент, а для пути в  $G$  — его обратный путь).

Из (3) в 2.2 следует, что на множестве путей, содержащихся в  $U_\alpha \cap U_\beta$ , отображения  $\Phi_\alpha$  и  $\Phi_\beta$  связаны формулой

$$\Phi_\beta^\lambda x_t = (f_{\alpha\beta} x_0)^{-1} (\Phi_\alpha^\lambda x_t) (f_{\alpha\beta} x_t). \quad (1)$$

Следующая теорема показывает, что семейство  $\{\Phi_\alpha\}$  полностью определяет связность  $\sigma$  в  $E$ .

**Теорема.** Если для некоторого открытого покрытия  $\{U_\alpha\}$  базы  $B$  однородного расслоения  $E$  задано семейство  $\{\Phi_\alpha\}$  отображений множеств путей из каждого  $U_\alpha$  в множество путей в  $G$ , так что удовлетворяются условия  $\sigma 4$ ,  $\sigma 1'$  и (1), то в  $E$  существует одна и только одна связность с заданным множеством отображений  $\{\Phi_\alpha\}$ .

**Доказательство.** Диффеоморфизм  $\sigma^\lambda: p^{-1}(x_1)$  на  $p^{-1}(x_0)$  для каждого пути  $\lambda(x_0, x_1) \subset U_\alpha$  определяется формулой

$$\sigma^\lambda z = \varphi_\alpha^{x_0} (\Phi_\alpha^\lambda x_1) (\varphi_\alpha^{x_1})^{-1} z, \quad (2)$$

где  $z \in p^{-1}(x_1)$ . При этом условие  $\sigma 1$  для путей из  $U_\alpha$  удовлетворяется в силу  $\sigma 1'$ . Соблюдаются, очевидно, также  $\sigma 3$  и  $\sigma 4$ . Из (1) в 2.2 и из (2) следует  $\sigma 2$ .

Совпадение диффеоморфизмов  $\sigma^\lambda$  для  $\lambda \subset U_\alpha \cap U_\beta$ , определяемых с помощью  $\varphi_\alpha, \Phi_\alpha$  и  $\varphi_\beta, \Phi_\beta$ , вытекает из (2) в 2.2 и (1). Теперь можно  $\sigma$  распространить на произвольные пути в  $B$ , выбирая для каждого  $\lambda \subset B$  некоторое его покрытие, как подмножество в  $\{U_\alpha\}$ , и определяя  $\sigma^\lambda$ , как произведение образов при  $\sigma$  частей пути, каждая из которых содержится в одном из  $U_\alpha$ . При этом условие  $\sigma 1$ , очевидно, удовлетворено. Теорема доказана.

**Следствие.** Связность  $\sigma$  в однородном расслоении  $E$  определяет некоторые связности и во всех ассоциированных с ним однородных расслоениях.

Действительно, вместе с  $\sigma$  в  $E$  определено множество отображений  $\{\Phi_\alpha\}$ , удовлетворяющих условиям  $\sigma 4, \sigma 1'$  и (1). В эти условия входят только сами отображения из  $\{\Phi_\alpha\}$  и переходные функции из  $\{f_{\alpha\beta}\}$ , но последние являются общими для всех ассоциированных между собой однородных расслоений.

Связности в ассоциированных однородных расслоениях, у которых для каждого  $U_\alpha$  из некоторого покрытия  $\{U_\alpha\}$  базы  $B$  совпадают отображения  $\Phi_\alpha$ , называются ассоциированными связностями.

**2.5. Горизонтальные пути.** Пусть в однородном расслоении  $E$  заданы связность  $\sigma$  и путь  $\Lambda(z_0, z_1)$ , состоящий из точек  $z_t, 0 \leq t \leq 1$ . Тогда в слое  $F_{z_0}$  определяется путь  $\sigma\Lambda$ , который состоит из точек  $\sigma^{p\Delta_t} z_t, 0 \leq t \leq 1$ , и называется разверткой пути  $\Lambda$  в слое  $F_{z_0}$ .

Путь  $\Lambda(z_0, z_1) \subset E$  называется горизонтальным путем в связности  $\sigma$ , если его разверткой в слое  $F_{z_0}$  является единичный путь, т. е. если

$$\sigma^{p\Delta_t} z_t = z_0, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (1)$$

Для заданных  $\lambda(x_0, x_1) \subset B$  и  $z_0 \in p^{-1}(x_0)$  всегда существует единственный горизонтальный путь  $\Lambda(z_0, z_1)$  над  $\lambda$ . Действительно, этот горизонтальный путь состоит из точек  $(\sigma^{\lambda t})^{-1} z_0$ .

Если пути  $\Lambda$  и  $\Lambda'$  в  $E$  горизонтальны для данной связности  $\sigma$  в  $E$ , то горизонтальны также пути  $\Lambda^{-1}, \Lambda_t, \Lambda_t^*$  и  $\Delta\Lambda'$  (если последний существует). Эти утверждения следуют непосредственно из определения горизонтального пути и из условия  $\sigma 1$ .

**Лемма.** Если путь  $\Lambda(z_0, z_1)$  для некоторого открытого покрытия  $\{U_\alpha\}$  базы  $B$  содержится в  $p^{-1}(U_\alpha)$ , то он является горизонтальным тогда и только тогда, когда

$$(\Phi_\alpha^{p\Lambda} pz_t) \psi_\alpha z_t = \psi_\alpha z_0, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (2)$$

Доказательство. Равенство (2) можно в силу  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  переписать в виде

$$(\varphi_\alpha^{pz_0})^{-1} \sigma^{p\Lambda t} \varphi_\alpha^{pz_t} \psi_\alpha z_t = \psi_\alpha z_0,$$

а последнее равенство, в силу (1) и (4) из 1.2, действительно, равносильно с (1).

Из леммы вытекает следующее важное обстоятельство для связностей  $\sigma$ , заданных в главных расслоениях.

**Теорема.** Если в главном расслоении  $P$  задана связность  $\sigma$ , то структурная группа  $G$ , действующая (правосторонне) на  $P$ , сохраняет свойство горизонтальности путей в  $P$ , т. е. преобразует горизонтальные пути в горизонтальные же пути.

**Доказательство.** В случае главного расслоения  $P$  за типовой слой можно принимать многообразие группы  $G$ , на котором группа  $G$  действует левыми сдвигами. Тогда условие (2) является равенством между элементами группы  $G$ . Так как это равенство выдерживает умножение справа на произвольный элемент  $g \in G$ , то горизонтальные пути при действии  $G$  на  $P$ , в силу леммы 1.3, переходят в горизонтальные же пути. Теорема доказана.

Пусть в однородном расслоении  $E$  задана связность  $\sigma$ . Касательные векторы всех горизонтальных путей в  $E$  с началом в заданной точке  $z \in E$  образуют в касательном векторном пространстве  $T_z(E)$  некоторое многообразие 1-мерных подпространств, которое при  $(dp)_z$  проектируется на  $T_{pz}(B)$ , причем, в силу  $\sigma_4$ , взаимно однозначно. Это многообразие в  $T_z(E)$  называется горизонтальным конусом заданной в  $E$  связности  $\sigma$  в точке  $z \in E$ .

Из доказанной выше теоремы следует, что поле горизонтальных конусов связности  $\sigma$  в главном расслоении  $P$  инвариантно относительно действия  $G$  на  $T(P)$ , определяемого правосторонним действием  $G$  на  $P$ .

### § 3. ЛИНЕЙНЫЕ СВЯЗНОСТИ

**3.1. Понятие линейной связности.** Связность  $\sigma$  в однородном расслоении  $E$  называется линейной, если ее горизонтальный конус в произвольной точке  $z \in E$  является линейным подпространством  $\Gamma_z$  в  $T_z(E)$ .

Из этого определения непосредственно следует, что если в  $E$  дана линейная связность, то связность, определяемая в любом ограничении  $\tilde{E}$  расслоения  $E$ , также линейна.

Семейство отображений  $\Phi_\alpha$  множества путей из  $U_\alpha$  в множество путей в  $G$ , удовлетворяющее условиям  $\sigma_4$ ,  $\sigma_1'$  и (1)

из 2.4, называется инфинитезимально линейным, если в каждой точке  $x \in U_\alpha$  отображение  $\omega_x: T_x(B)$  на  $\underline{G}$ , которое касательному вектору  $X \in T_x(B)$  пути  $\lambda \subset U_\alpha$  с началом в  $x$  ставит в соответствие касательный вектор  $\omega(x, X)$  пути  $\Phi_\alpha \lambda \subset T_e(G) = \underline{G}$ , является линейным, т. е. если представляет собой 1-форму на  $U_\alpha$  со значениями в  $\underline{G}$ . Из формулы (5) в 2.2 следует, что это условие на непустых пересечениях  $U_\alpha \cap U_\beta$  инвариантно относительно перехода от  $U_\alpha$  к  $U_\beta$ .

**Теорема.** Связность  $\sigma$  в однородном расслоении  $E$  является линейной тогда и только тогда, когда для открытого покрытия  $\{U_\alpha\}$  базы  $B$  семейство отображений  $\{\Phi_\alpha\}$ , определяемое связностью  $\sigma$ , является инфинитезимально линейным.

**Доказательство. Необходимость.** Пусть связность  $\sigma$  в  $E$  является линейной. Тогда в касательном векторном пространстве  $T_z(E)$  к  $E$  в произвольной точке  $z \in E$  существует горизонтальное векторное подпространство  $\Gamma_z$ , так что

$$\Gamma_z + T_z(F_z) = T_z(E), \quad \Gamma_z \cap T_z(F_z) = \{0\}. \quad (1)$$

Дифференциал  $(dp)_z$  проекции  $p: E$  на  $B$  в точке  $z$  устанавливает изоморфизм векторных пространств

$$(dp)_z: \Gamma_z \text{ на } T_{pz}(B).$$

С другой стороны, если  $pz \subset U_\alpha \subset B$ , то дифференциал  $(d\psi_\alpha)_z$  дифференцируемого отображения

$$\psi_\alpha: p^{-1}(U_\alpha) \text{ на } F$$

в точке  $z \in p^{-1}(U_\alpha)$  отображает  $\Gamma_z$  линейно в  $T_\xi(F)$ , где  $\xi = \psi_\alpha z$ . Суперпозиция линейных отображений  $(dp_\Gamma)_z^{-1}$  и  $(d\psi_\alpha)_z$  является линейным отображением

$$(\vartheta_\alpha)_z: T_x(B) \text{ на } T_\xi(F),$$

где  $x = pz$ . Если  $X \in T_x(B)$  является касательным вектором пути  $\lambda(x_0, x_1) \subset U_\alpha$ , то  $(\vartheta_\alpha)_z X$  является касательным вектором проекции  $\psi_\alpha \Delta$  горизонтального пути  $\Delta(z, z_1)$  над  $\lambda$  в связности  $\sigma$ . Если  $z$  пробегает слой  $p^{-1}(x)$ , то такие проекции определяются во всех точках  $\xi \in F$ , причем они в силу  $\sigma 2$  и  $\sigma 3$  являются путями  $(\Phi_\alpha \lambda) \xi$ , возникающими при действии на  $F$  элементов пути  $\Phi_\alpha \lambda \subset G$ . Следовательно, вектору  $X \in T_x(B)$  сопоставляется векторное поле  $\vartheta_\alpha X$  на  $F$ . Определяемое при этом отображение векторного пространства  $T_x(B)$  в модуль  $\mathfrak{X}(F)$  векторных полей на  $F$  является линейным отображением. Кроме того, каждое поле  $\vartheta_\alpha X$  индуцируется однопараметрической подгруппой  $\exp t \omega_\alpha(x, X)$ , определяемой касательным элементом  $\omega_\alpha(x, X) \in T_e(G) = \underline{G}$  пути  $\Phi_\alpha \lambda \subset G$ .

Пусть  $\nu: \underline{G}$  в  $\mathfrak{X}(F)$  обозначает линейный изоморфизм, который каждому элементу  $A \in \underline{G}$  ставит в соответствие векторное поле на  $F$ , индуцируемое однопараметрической подгруппой  $\exp tA$  (см. 1.1).

Интересующее нас отображение  $\omega_x: T_x(B)$  на  $G$ , которое вектору  $X \in T_x(B)$  сопоставляет элемент  $\omega(x, X) \in \underline{G}$ , является суперпозицией линейного отображения  $\Phi_\alpha: T_x(B)$  в  $\mathfrak{X}(F)$  и ограничения линейного изоморфизма  $\nu^{-1}: \nu \underline{G} \subset \mathfrak{X}(F)$  на  $\underline{G}$  над  $\Phi_\alpha T_x(B) \subset \nu \underline{G}$ , и поэтому линейно. Следовательно, семейство  $\{\Phi_\alpha\}$  инфинитезимально линейно. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть отображение

$$\omega_\alpha: T_x(B) \text{ в } \underline{G}, \quad x \in U_\alpha,$$

определяемое в условии  $\sigma_4$  на семейство отображений  $\{\Phi_\alpha\}$ , является линейным, т. е. определяет 1-форму  $\omega_\alpha$  на  $U_\alpha$  со значениями в  $\underline{G}$ . Пусть в  $p^{-1}(U_\alpha) \subset E$  задан некоторый путь  $\Lambda(z_0, z_1)$ . Он является горизонтальным в определяемой семейством  $\{\Phi_\alpha\}$  связности  $\sigma$  тогда и только тогда, когда, в силу (2) из 2.4 и (1) из 2.5,

$$\varphi_\alpha^{x_0} (\Phi_\alpha^{\lambda_t} x_t) (\varphi_\alpha^{x_t})^{-1} z_t = z_0,$$

где  $\lambda_t(x_0, x_t) = p\Lambda_t(z_0, z_t)$ . Это условие можно ввиду (4) из 1.2 писать в виде

$$\psi_\alpha z_t = (\Phi_\alpha^{\lambda_t} x_t)^{-1} \psi_\alpha z_0 \quad (2)$$

(см. (2) из 2.5).

Пусть  $Z \in T_{z_0}(E)$  является касательным вектором пути  $\Lambda$ . Тогда вектор

$$X = (dp)_{z_0} Z$$

является касательным к пути  $\lambda = p\Lambda$ , а вектор  $\omega_\alpha(x_0, X) \in \mathfrak{X}(G) = \underline{G}$  — касательным к пути  $\Phi_\alpha \lambda \subset \underline{G}$ , составленному из  $\Phi_\alpha^{\lambda_t} x_t$ . Путь, описываемый элементом  $(\Phi_\alpha^{\lambda_t} x_t)^{-1} \in \underline{G}$ , имеет касательный вектор —  $\omega_\alpha(x_0, X)$ .

Если в равенстве (2) перейти к касательным векторам, то получается соотношение

$$(d\psi_\alpha)_{z_0} Z = -\nu \omega_\alpha(x_0, X),$$

где в правой части стоит вектор в точке  $\xi_0 = \psi_\alpha z_0 \in F$ , принадлежащий образу элемента —  $\omega_\alpha(x_0, X) \in \underline{G}$  при линейном отображении  $\nu: \underline{G}$  в  $\mathfrak{X}(F)$ . Отсюда и из (3) следует, что  $(d\varphi_\alpha^{-1})_{z_0} Z$  как вектор касательного к  $U_\alpha \times F$  пространства в точке

$\varphi_\alpha^{-1}z_0 = (x_0, \xi_0)$  проектируется на  $T_{x_0}(B)$  и  $T_{\xi_0}(F)$ , соответственно, в векторы  $X$  и  $-\nu\omega_\alpha(x_0, X)$ . Поэтому  $Z$  является образом при  $(d\varphi_\alpha)_{(x_0, \xi_0)}$  вектора

$$X - \nu\omega_\alpha(x_0, X) \in T_{(x_0, \xi_0)}(U_\alpha \times F).$$

Если  $X$  пробегает все  $T_{x_0}(B)$ , то этот образ описывает некоторое линейное подпространство  $\Gamma_{z_0}$  в  $T_{z_0}(E)$ , состоящее из касательных векторов ко всем горизонтальным путям с началом  $z_0$  в связности  $\sigma$ , определяемой семейством  $\{\Phi_\alpha\}$ , т. е. эта связность  $\sigma$  линейна. Теорема доказана.

**Следствие.** Если связность  $\sigma$  в однородном расслоении  $E$  линейна, то линейными являются также все ассоциированные с ней связности в ассоциированных с  $E$  однородных расслоениях. При этом на каждом  $U_\alpha$  покрытия  $\{U_\alpha\}$  общей базы  $B$  этих расслоений 1-формы  $\omega_\alpha$  со значениями в  $\underline{G}$ , определяемые этими связностями, совпадают.

Действительно, условие того, что связность линейна, можно в силу теоремы 1 выразить только в терминах семейства отображений  $\{\Phi_\alpha\}$ , а такие семейства для ассоциированных связностей совпадают, приводя в совпадение также 1-формы  $\omega_\alpha$ .

**3.2. Горизонтальное распределение.** Из доказательства теоремы 3.1 вытекает, что подпространства  $\Gamma_z \in T_z(E)$  во всех точках  $z \in E$  образуют дифференцируемое распределение  $\Gamma$  на  $E$ . Оно называется горизонтальным распределением связности  $\sigma$  в  $E$ . Оказывается, что распределение  $\Gamma$  полностью определяет линейную связность  $\sigma$  в  $E$ .

**Теорема.** Пусть на однородном расслоении  $E$  задано дифференцируемое распределение  $\Gamma$ , так что в каждой точке  $z \in E$  удовлетворяются условия (1) из 3.1. Тогда каждому пути  $\lambda(x_0, x_1) \subset B$  сопоставляется диффеоморфизм  $\sigma^\lambda: p^{-1}(x_1)$  на  $p^{-1}(x_0)$ , так что удовлетворяются условия  $\sigma^1$  а) — в). Если, кроме того, удовлетворяется также условие  $\sigma^2$ , то в  $E$  определяется линейная связность  $\sigma$ , для которой  $\Gamma$  является горизонтальным распределением.

**Доказательство.** Открытое покрытие  $\{U_\alpha\}$  базы  $B$  можно выбрать так, что каждое  $U_\alpha$  диффеоморфно отображаемо в  $R^n$ , где  $n = \dim B$ . Аналогично можно найти такое покрытие  $\{W_\rho\}$  для  $F$ , что каждое  $W_\rho$  диффеоморфно отображаемо в  $R^m$ , где  $m = \dim F$ .

Диффеоморфизм  $\varphi_\alpha: U_\alpha \times F$  на  $p^{-1}(U_\alpha)$  устанавливает некоторый диффеоморфизм между  $U_\alpha \times W_\rho$  и  $\varphi_\alpha(U_\alpha, W_\rho)$ . Образ ограничения распределения  $\Gamma$  на  $\varphi_\alpha(U_\alpha, W_\rho)$  при дифференциале обратного диффеоморфизма, как распределение  $\bar{\Gamma}$  на  $U_\alpha \times W_\rho$ , задается в координатах системой пфаффовых урав-

нений, разрешимой относительно дифференциалов  $d\xi^a$  координат  $\xi^a$  точки  $\xi \in W_p$ .

Если в  $B$  задан путь  $\lambda(x_0, x_1)$ , то его можно разбить на дифференцируемые куски, каждый из которых  $\tilde{\lambda}$  как образ отрезка  $[t_0, t_1]$  принадлежит одному из  $U_\alpha$  и может быть представлен уравнениями  $x^i = x^i(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Подстановка этих уравнений в пфаффову систему, определяющую образ  $\Gamma$  на  $U_\alpha \times W_p$ , приводит к системе

$$\frac{d\xi^a}{dt} = f^a(t, \xi^1, \dots, \xi^m), \quad a = 1, \dots, m$$

или к системе

$$\frac{d\xi^a}{dt} = f^a(\xi^0, \xi^1, \dots, \xi^m), \quad \frac{d\xi^0}{dt} = 1, \quad (1)$$

где  $f^a$  — дифференцируемые функции.

Из теоремы Р. Э. Винограда ([21], стр. 28; [10], стр. 46) следует, что для каждой точки  $z \in p^{-1}(U_\alpha)$  существует одна и только одна интегральная линия распределения  $\tilde{\Gamma}$  над  $\tilde{\lambda}$ , упирающаяся одним концом в точку  $\varphi_\alpha^{-1}z \in U_\alpha \times F$ . Другими словами, из каждой точки  $\xi = \psi_\alpha z$  исходит линия  $\chi \subset F$ , каждая точка которой имеет окрестность, принадлежащую одному из  $W_p \subset F$  и определяемую уравнениями  $\xi^a = \xi^a(t)$ , правые части которых удовлетворяют системе (1). Если заданный путь  $\lambda \subset B$  покрыть областями из  $\{U_\alpha\}$  и применить полученный результат к каждому дифференцируемому куску пути  $\lambda$ , принадлежащему одной из областей  $U_\alpha$ , то в итоге можно утверждать, что в каждую точку слоя  $p^{-1}(x_0)$ , равно как в каждую точку слоя  $p^{-1}(x_1)$ , упирается одна и только одна линия, проектирующаяся в линию, определяемую в базе  $B$  заданным путем  $\lambda(x_0, x_1)$ , и являющуюся интегральной для распределения  $\Gamma$  на  $E$ .

Оказывается, что соответствие между слоями  $p^{-1}(x_1)$  и  $p^{-1}(x_0)$ , в котором соответствующими считаются точки, соединяемые этими интегральными линиями распределения  $\Gamma$ , является диффеоморфизмом

$$\sigma^\lambda: p^{-1}(x_1) \text{ на } p^{-1}(x_0).$$

Действительно, это соответствие является взаимно однозначным, т. е. некоторым отображением, и может быть получено как суперпозиция отображений, определяемых аналогичным образом дифференцируемыми кусками пути  $\lambda$ , принадлежащими одной из  $U_\alpha$ . Каждое из последних, например  $\sigma^{\tilde{\lambda}}$ , определяемое дифференцируемым куском  $\tilde{\lambda}(x_{t_0}, x_{t_1})$ , является суперпо-

зицей отображений  $\varphi_a^{x_t}: p^{-1}(x_t)$  на  $F$ ,  $\hat{\chi}: F$  на  $F$  и  $(\varphi_a^{x_{t_0}})^{-1}: F$  на  $p^{-1}(x_{t_0})$ , где  $\hat{\chi}$  устанавливается линиями  $\tilde{\chi}$  в  $F$ . Из этих отображений первое и третье являются диффеоморфизмами в силу определения однородного расслоения  $E$ , а  $\hat{\chi}$  является диффеоморфизмом в силу теоремы Т. Гронуолла ([10], стр. 51).

Таким образом, распределение  $\Gamma$  на  $E$ , удовлетворяющее условиям (1), определяет отображение  $\sigma$  множества путей в базе  $B$  в множество диффеоморфизмов слоя на слой в  $E$ . При этом, очевидно, удовлетворяются условия  $\sigma 1$ .

Пусть, кроме того, удовлетворяется условие  $\sigma 2$ . Тогда каждый путь  $\lambda \subset U_a \subset B$  определяет отображение отрезка  $I = [0, 1]$  в группу  $G$ , которое каждому  $t \in I$  сопоставляет элемент  $g_a^{\lambda t} \in G$ . Это отображение  $I$  в  $G$  оказывается кусочно дифференцируемым. Действительно, каждый дифференцируемый кусок  $\tilde{\lambda}(x_{t_0}, x_{t_1})$  пути  $\lambda$  определяет указанным выше образом для каждой точки  $\xi \in F$  дифференцируемый образ  $\tilde{\chi} \subset F$  отрезка  $[t_0, t_1]$ , так что  $t_0$  отображается в точку  $\xi$ . Из  $\sigma 2$  следует, что этот образ состоит из точек  $(g_a^{\lambda t})^{-1} g_a^{\lambda t_0} \xi$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ . В силу того, что группа Ли  $G$  действует на  $F$  эффективно и отображение  $F \times G$  на  $F$ , определяемое этим действием, дифференцируемо, можно утверждать, что элемент  $(g_a^{\lambda t})^{-1} g_a^{\lambda t_0}$  при изменении  $t$  на отрезке  $[t_0, t_1]$  описывает множество, являющееся дифференцируемым образом этого отрезка. Остается заметить, что правый сдвиг и переход к обратному элементу в  $G$  являются диффеоморфизмами  $G$  на  $G$ .

Таким образом, удовлетворяется условие  $\sigma 3$ . При этом очевидно, значению  $t = 0$  соответствует, в силу эффективности действия, элемент  $g_a^{\lambda 0} = e \in G$ . Если два пути  $\lambda, \lambda' \subset U_a \subset B$  с общим началом имеют общий касательный вектор  $X$ , то соответствующие им интегральные линии распределения  $\Gamma$  в некоторых окрестностях их общего начала  $z \in p^{-1}(x)$  могут быть представлены путями, имеющими общий касательный вектор  $(dp_r)_z^{-1} X$ . Последний отображается при  $\psi_a: p^{-1}(U_a)$  на  $F$  в единственный вектор  $(\vartheta_a)_z X$  в  $T_\xi(B)$ , где  $\xi = \psi_a z$ . Так же как в доказательстве теоремы 3.1, возникает векторное поле  $\vartheta_a X$  на  $F$ , которое порождается одним и только одним элементом  $\omega(x, X) \in G$ . Таким образом, удовлетворяется также условие  $\sigma 4$ . Теорема доказана.

**3.3. Линейная связность в главном расслоении.** Горизонтальное распределение  $\Delta$  линейной связности в главном расслоении  $P$ , как следует из теоремы 2.5, инвариантно при действии группы  $G$  на касательном к  $P$  векторном расслоении

$T(P)$ , определяемом правосторонним действием  $G$  на  $P$ . Оказывается, что это свойство, вместе с условиями (1) из 3.1, достаточно для горизонтальности распределения  $\Delta$  на  $P$ , и поэтому может заменить условие  $\sigma_2$  в теореме 3.2.

**Теорема.** Пусть на главном расслоении  $P$  задано дифференцируемое распределение  $\Delta$ , так что для каждой точки  $z \in P$  и элемента  $g \in G$

$$\begin{aligned} 1^\circ \Delta_z + T_z(G_z) &= T_z(P), \quad \Delta_z \cap T_z(G_z) = \{0\}, \\ 2^\circ \Delta_{zg} &= (dR_g)_z \Delta_z, \end{aligned}$$

где диффеоморфизм  $R_g: P$  на  $P$  задается формулой  $R_g z = zg$ . Тогда в  $P$  определяется линейная связность, для которой  $\Delta$  является горизонтальным распределением.

**Доказательство.** В силу теоремы 3.2 достаточно показать, что из условия  $2^\circ$  вытекает условие  $\sigma_2$  в определении связности. Из  $2^\circ$  следует, что для каждого пути  $\lambda(x_0, x_1) \subset B$  и для каждой точки  $z \in p^{-1}(x_1)$  диффеоморфизм  $\sigma^\lambda: p^{-1}(x_1)$  на  $p^{-1}(x_0)$ , определяемый в доказательстве теоремы 3.2, удовлетворяет условию

$$\sigma^\lambda(zg) = (\sigma^\lambda z)g.$$

Пусть  $\lambda \subset U_\alpha \subset B$ . Из 1.3 следует, что

$$\varphi_\alpha^x g = (\mu_\alpha x)g,$$

где  $\mu_\alpha$  является сечением в  $P$  над  $U_\alpha$ . Так как  $G$  действует на слое  $p^{-1}(x_0)$  просто-транзитивно, то существует один и только один элемент  $g_\alpha^\lambda \in G$ , такой что

$$\sigma^\lambda(\mu_\alpha x_1) = (\mu_\alpha x)g_\alpha^\lambda.$$

Теперь

$$(\varphi_\alpha^{x_0})^{-1} \sigma^\lambda \varphi_\alpha^{x_1} g = (\varphi_\alpha^{x_0})^{-1} [(\mu_\alpha x_0) g_\alpha^\lambda g] = g_\alpha^\lambda g,$$

т. е. удовлетворяется условие  $\sigma_2$ . Теорема доказана.

Из этой теоремы следует наиболее простая возможность определения линейной связности в главном расслоении: связностью в  $P$  называется распределение  $\Delta$  на  $P$ , удовлетворяющее условиям  $1^\circ$  и  $2^\circ$  (см., например, [11], [22], [43]).

**3.4 Линейная связность в факторрасслоении.** Пусть задано однородное расслоение  $E$  и пусть  $P$  является присоединенным к нему главным расслоением. Тогда  $E$  можно рассматривать как факторрасслоение  $P/H$  (см. 1.4). Если в  $E$  дана линейная связность горизонтальным распределением  $\Gamma$ , удовлетворяющим условиям теоремы 3.2, то ассоциированная с ней связность в  $P$  является, в силу теоремы 3.1, также

линейной и определяется, следовательно, некоторым горизонтальным распределением  $\Delta$ . Пусть  $\pi: P$  на  $P/H = E$  является канонической проекцией, определяемой правосторонним действием на  $P$  стационарной подгруппы  $H$  типового слоя  $G/H$  расслоения  $E$  (см. теорема 1.4).

**Теорема.** Горизонтальные распределения  $\Gamma$  и  $\Delta$  ассоциированных линейных связностей, соответственно, в однородном расслоении  $E$  и присоединенном к нему главном расслоении  $P$  связаны соотношением

$$\Gamma = d\pi\Delta,$$

где  $d\pi$  — дифференциал канонической проекции  $\pi: P$  на  $P/H = E$ .

**Доказательство.** Из доказательства достаточности условия теоремы 3.1 следует, что линейное подпространство  $\Gamma_{z_0}$  распределения  $\Gamma$  в точке  $z_0 \in E$  описывается образом вектора

$$X - \nu\omega_\alpha(x_0, X) \quad (1)$$

при дифференциале  $d\varphi_\alpha$  диффеоморфизма  $\varphi_\alpha: U_\alpha \times F$  на  $p^{-1}(U_\alpha) \subset E$  в точке  $\varphi_\alpha^{-1}z_0 = (x_0, \xi_0)$ , если  $X$  пробегает все  $T_{x_0}(B)$ . Здесь  $\nu$  является линейным изоморфизмом  $\underline{G}$  в  $\mathfrak{X}(F)$ , которое каждому элементу  $A \in \underline{G}$  ставит в соответствие векторное поле на  $F$ , индуцируемое однопараметрической подгруппой  $\exp tA$ . Если алгебру Ли  $\underline{G}$  рассматривать как алгебру левоинвариантных векторных полей на  $G$ , то  $\nu$  представляет собой дифференциал  $d\chi$  канонической проекции  $\chi: G$  на  $G/H = F$ , определяемой действием  $H$  на  $G$  путем правых сдвигов:

$$\nu = d\chi. \quad (2)$$

В случае главного расслоения  $P$  отображение  $\nu$  сводится к тождественному отображению  $\underline{G}$  на  $\underline{G}$ . Так как у ассоциированных связностей на каждом  $U_\alpha$  покрытия  $\{U_\alpha\}$  базы  $B$  совпадают 1-формы  $\omega_\alpha$  со значениями в  $\underline{G}$  (см. следствие из теоремы 3.1), то подпространство горизонтального распределения  $\Delta$  на  $P$  описывается образами векторов

$$X - \omega_\alpha(x_0, X) \quad (3)$$

при дифференциале  $d\tilde{\varphi}_\alpha$  диффеоморфизма  $\tilde{\varphi}_\alpha: U_\alpha \times G$  на  $\tilde{p}^{-1}(U_\alpha) \subset P$  в точке  $\tilde{\varphi}_\alpha^{-1}w_0 = (x_0, g_0)$ .

Каноническое отображение  $\chi: G$  на  $G/H = F$  позволяет формулой  $\hat{\chi}(x, g) = (x, \chi g)$  определить дифференцируемое отображение

$$\hat{\chi}: U_\alpha \times G \text{ на } U_\alpha \times F.$$

Из (2) следует теперь, что если  $\chi g_0 = \xi_0$ , то каждый вектор (1) является образом при  $(d\hat{\chi})_{(x_0, g_0)}$  некоторого вектора (3). Отсюда и из результатов, полученных при доказательстве теоремы 1.4, и вытекает утверждение доказываемой теоремы.

Линейную связность в однородном расслоении  $E$  можно теперь определить следующим образом.

Линейной связностью в  $E$  называется каждое распределение  $\Gamma$  на  $E$ , являющееся образом  $\Gamma = d\pi\Delta$  некоторого распределения  $\Delta$  на присоединенном к  $E$  главному расслоении  $P$ , удовлетворяющего условиям 1° и 2° теоремы 3.3, при дифференциале  $d\pi$  канонической проекции  $\pi: P$  на  $P/H = E$ .

Это определение более инвариантно, но менее содержательно, чем предыдущие определения линейной связности в однородном расслоении. В дальнейших исследованиях этих связностей целесообразно исходить именно из этого определения. Это позволяет лучше всего использовать результаты хорошо развитой теории линейных связностей в главных расслоениях. Что касается самих этих исследований, то они требуют более тонких аналитических методов и поэтому выходят за рамки настоящей статьи. Они изложены в [17].

## Глава II.

### ПОГРУЖЕННЫЕ ОДНОРОДНЫЕ РАССЛОЕНИЯ

#### § 4. ПАРА ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ

**4.1. Присоединенные грассмановы представления.** Объектом исследования в настоящей главе являются структуры однородного расслоения, связанные с парой однородных пространств  $\mathbb{G}/G$  и  $\mathbb{G}/\mathfrak{H}$ , имеющих одну и ту же группу движений  $\mathbb{G}$ . Другими словами, изучаются некоторые взаимные свойства двух замкнутых подгрупп  $G$  и  $\mathfrak{H}$  в группе Ли  $\mathbb{G}$ . При этом в течение всей главы предполагается, что подгруппы  $G$  и  $\mathfrak{H}$  являются связными. (В случае несвязных  $G$  и  $\mathfrak{H}$  придется ограничиться их связными компонентами.)

Основным понятием в дальнейшем является понятие инцидентности точек пространств  $\mathbb{G}/G$  и  $\mathbb{G}/\mathfrak{H}$ . Заметим сразу, что это понятие обобщает понятие инцидентности  $p$ -мерной и  $q$ -мерной плоскости в  $n$ -мерном проективном пространстве  $P^n$  (см. [31], т. I, стр. 201) и совпадает с ним, если  $\mathbb{G}/G$  и  $\mathbb{G}/\mathfrak{H}$  совпа-

дают с грассмановыми многообразиями  $\text{Gr}(n, p)$  и  $\text{Gr}(n, q)$ , соответственно,  $p$ -мерных и  $q$ -мерных плоскостей в  $P_n$  с общей проективной группой движений.

Определяемое ниже общее понятие инцидентности связано с некоторыми естественными представлениями — так называемыми присоединенными грассмановыми представлениями однородных пространств.

Пусть  $f$  обозначает отображение однородного пространства  $\mathbb{G}/\mathfrak{H}$  в грассманово многообразие линейных подпространств в алгебре Ли  $\mathbb{G}$  группы движений  $\mathbb{G}$ , которое каждой точке  $x \in \mathbb{G}/\mathfrak{H}$  ставит в соответствие подалгебру Ли  $\mathfrak{H}_x$  стационарной подгруппы  $\mathfrak{H}_x$  этой точки.

Теорема. Отображение  $f$  является аналитическим всюду регулярным отображением однородного пространства  $\mathbb{G}/\mathfrak{H}$  в грассманово многообразие  $\text{Gr}(q, r)$  (где  $q = \dim \mathbb{G}$ ,  $r = \dim \mathfrak{H}$ )  $r$ -мерных линейных подпространств алгебры Ли  $\mathbb{G}$ ; при этом

$$f(gx) = (\text{ad } g)fx, \quad x \in \mathbb{G}/\mathfrak{H}. \quad (1)$$

Оно взаимно однозначно тогда и только тогда, когда  $\mathfrak{H}$  совпадает со своим нормализатором  $\mathfrak{N}(\mathfrak{H})$  в  $\mathbb{G}$ .

Доказательство. Пусть  $\psi: \mathbb{G}$  на  $\mathbb{G}/\mathfrak{H}$  является канонической проекцией, определяемой действием  $\mathfrak{H}_x$  на  $\mathbb{G}$  путем правых сдвигов. Известно, что это действие вводит в  $\mathbb{G}$  структуру главного расслоения ([32], стр. 163; [28], стр. 42). В частности, в  $\mathbb{G}/\mathfrak{H}$  существует окрестность  $U$  точки  $x$ , которая допускает диффеоморфизм  $\mu$  в  $\psi^{-1}U \subset \mathbb{G}$ , так что  $\mu e = e$  и  $\mu \mu x' = x'$  при каждом  $x' \in U$ .

В группе Ли  $\mathbb{G}$  в некоторой окрестности  $W$  единицы  $e$ ,  $\psi W \subset U$ , можно ввести координаты  $x^a, x^a$  ( $a = 1, \dots, r$ ;  $a = r + 1, \dots, q$ ), так что  $g\mathfrak{H}_x \cap W$  определяется уравнениями  $x^a = \text{const}$ , в частности  $\mathfrak{H}_x \cap W$  уравнениями  $x^a = 0$ , а  $\mu U \cap W$  задается уравнениями  $x^a = 0$  (см. [32], стр. 162). Тогда  $\mathfrak{H}_x \subset \mathbb{G} = T_e(\mathbb{G})$  натянута на первые  $r$  векторов  $e_a = \frac{\partial}{\partial x^a}$  натурального базиса в  $T_e(\mathbb{G})$ , определяемого этой координатной системой.

Пусть  $\hat{x}$  является произвольной точкой в  $\psi W \subset \mathbb{G}/\mathfrak{H}$ . Тогда соответствующий ей элемент  $\mu \hat{x} = \hat{g} \in W$  задается координатами  $\hat{x}^a = 0, \hat{x}^a$ . Внутренний автоморфизм в  $\mathbb{G}$ , порождаемый элементом  $\hat{g}$ , определяется для элементов в  $W$ , достаточно близких к  $e$ , формулами

$$\begin{aligned} \tilde{x}^a &= f^a(x^a, x^a; \hat{x}^a), \\ \tilde{x}^a &= f^a(x^a, x^a; \hat{x}^a), \end{aligned}$$

где  $(\tilde{x}^\alpha, \tilde{x}^\alpha)$  — образ элемента  $(x^\alpha, x^\alpha)$  при внутреннем автоморфизме, а  $f^\alpha, f^\alpha$  — аналитические функции своих аргументов. Стационарная подгруппа  $\hat{\mathfrak{H}}_{\hat{\xi}}$  точки  $\hat{\xi} = \hat{g}_\xi$  как образ подгруппы  $\mathfrak{H}_\xi$  при этом автоморфизме определяется в пределах  $\mathbb{W}$  параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} \hat{x}^\alpha &= f^\alpha(t^\alpha, 0; \hat{x}^\alpha), \\ \hat{x}^\alpha &= f^\alpha(t^\alpha, 0; \hat{x}^\alpha), \end{aligned}$$

где  $t^\alpha$  — некоторые параметры. Следовательно, линейное подпространство  $\hat{\mathfrak{H}}_{\hat{\xi}} \subset T_e(\mathfrak{G})$  натянуто на векторы

$$\hat{e}_\alpha = e_\beta \left( \frac{\partial f^\beta}{\partial t^\alpha} \right)_0 + e_\alpha \left( \frac{\partial f^\alpha}{\partial t^\alpha} \right)_0$$

(где частные производные вычисляются при  $t^\alpha = 0$ ). Его грассмановы координаты как определители максимального порядка матрицы

$$\left\| \left( \frac{\partial f^\beta}{\partial t^\alpha} \right)_0, \left( \frac{\partial f^\alpha}{\partial t^\alpha} \right)_0 \right\|$$

являются аналитическими функциями от  $\hat{x}^\alpha$ , представляющих собой локальные координаты точки  $\hat{\xi}$  в  $\mathbb{W} \subset \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ . Таким образом,  $\hat{\xi}$  является аналитическим. То, что оно всюду регулярно, следует из однородности пространства  $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ .

Формула (1) следует непосредственно из того, что линейное преобразование  $\text{ad } g$  в  $T_e(\mathfrak{G})$  по определению ([30], стр. 136) совпадает с дифференциалом в  $e \in \mathfrak{G}$  внутреннего автоморфизма, порождаемого элементом  $g$ .

Если  $f$  взаимно однозначно, то из совпадения подгруппы  $\mathfrak{H}_{g\xi} = g\mathfrak{H}_\xi g^{-1}$  и  $\mathfrak{H}_\xi$  следует совпадение точек  $g\xi$  и  $\xi$ , т. е.  $\mathfrak{H}_\xi g = g\mathfrak{H}_\xi$  влечет за собой  $g \in \mathfrak{H}_\xi$ . В этом случае, действительно,  $\mathfrak{H}_\xi$  совпадает со своим нормализатором в  $\mathfrak{G}$ .

Это условие, очевидно, и достаточно. Теорема доказана.

Аналитическое отображение  $f$  называется присоединенным грассмановым представлением однородного пространства  $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ . Действие группы Ли  $\mathfrak{G}$  на  $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$  индуцирует, согласно формуле (1), действие присоединенной линейной группы на  $f(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})$ .

Следствие. В случае эффективного примитивного действия  $\mathfrak{G}$  на  $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$  отображение  $f$  взаимно однозначно. Действительно, в этом случае подгруппа  $\mathfrak{H}$ , в силу примитивности действия, максимальна в  $\mathfrak{G}$ , т. е. не содержится в подгруппе, отличной от  $\mathfrak{H}$  и  $\mathfrak{G}$ . Так как  $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{N}(\mathfrak{H})$  и  $\mathfrak{N}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{G}$  исключает

ся условием, чтобы действие  $\mathfrak{G}$  на  $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$  было эффективно, то  $\mathfrak{N}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}$ .

**4.2. Контактные подмножества и орбиты.** Пусть даны два однородных пространства  $\mathfrak{G}/G$  и  $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$  с общей группой движений и со связными стационарными подгруппами  $G$  и  $\mathfrak{H}$ . Пусть в  $\mathfrak{G}/G$  дана некоторая фиксированная точка  $x$  со стационарной подгруппой  $G_x$ . Соответствующая ей подалгебра в алгебре Ли  $\mathfrak{G}$  обозначается через  $\underline{G}_x$ .

В грассмановом многообразии линейных подпространств размерности  $r = \dim \mathfrak{H}$  в алгебре Ли  $\mathfrak{G}$  выделяются шубертовы подмногообразия  $S_i^x$  подпространств, имеющих с  $\underline{G}_x$  пересечение размерности, не меньшей чем  $i$ ,  $0 \leq i \leq p = \min(r, s)$ ,  $s = \dim G$  (см. [31], т. II, стр. 351). Очевидно

$$S_{-1}^x \supset S_0^x \supset \dots \supset S_p^x, \quad (1)$$

где  $S_{-1}^x$  обозначает само это грассманово многообразие. Присоединенное грассманово представление  $\mathfrak{s}$  отображает  $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$  на некоторое подмногообразие  $\mathfrak{f}(\mathfrak{G}/\mathfrak{H}) \subset S_{-1}^x$ .

Пусть  $S_k^x$  является последним подмногообразием в последовательности (1), которое содержит все подмногообразие  $\mathfrak{f}(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})$ . Тогда прообраз в  $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$  пересечения  $\mathfrak{f}(\mathfrak{G}/\mathfrak{H}) \cap S_{k+j}^x$  обозначается через  $K_j^x$ ,  $0 \leq j \leq p - k$ . Очевидно, что  $K_0^x = \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$  и  $K_j^x \supset K_{j'}$ , при  $j < j'$ . Непустые подмножества среди  $k_j^x = K_j^x \setminus K_{j+1}^x$  называются контактными подмножествами ранга  $j$  в  $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$  для точки  $x \in \mathfrak{G}/G$ . Очевидно, что  $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$  является объединением всех контактных подмножеств для  $x \in \mathfrak{G}/G$ .

**Теорема.** Каждое контактное подмножество  $k_j^x \subset \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$  ранга  $j$  для точки  $x \in \mathfrak{G}/G$  является объединением орбит в  $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$  относительно  $G_x$ , размерности которых отличаются на  $j$  от максимальной размерности орбит в  $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$  относительно  $G_x$ .

**Доказательство.** Имеет место следующая формула

$$\dim(G_{g_x} \cap \mathfrak{H}_{g_x}) = \dim(G_x \cap \mathfrak{H}_x), \quad (2)$$

которая следует из того, что  $G_{g_x}$  и  $\mathfrak{H}_{g_x}$  являются образами стационарных подгрупп  $G_x$  и  $\mathfrak{H}_x$  точек  $x \in \mathfrak{G}/G$  и  $x \in \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$  при внутреннем автоморфизме в  $\mathfrak{G}$ , определяемом элементом  $g \in \mathfrak{G}$  и представляющим собой аналитический диффеоморфизм  $\mathfrak{G}$  на себя.

Точка  $\xi \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$  принадлежит контактному подмножеству  $k_j^x$  тогда и только тогда, когда

$$\dim(G_x \cap \mathcal{H}_\xi) = k + j. \quad (3)$$

Если в формуле (2) считать, что  $g \in G_x$ , то из нее и из (3) следует, что

$$\dim(G_x \cap \mathcal{H}_{g\xi}) = k + j$$

при каждом  $g \in G_x$ . Следовательно, вся орбита точки  $\xi \in k_j^x$  в  $\mathcal{G}/\mathcal{H}$  относительно  $G_x$  принадлежит подмножеству  $k_j^x$ . Ее размерность определяется как разность размерности  $s = \dim G_x$  действующей на ней группы Ли  $G_x$  и размерности стационарной подгруппы  $G_x \cap \mathcal{H}_\xi$  ее точки  $\xi$ , и поэтому равна  $s - k - j$ . Максимальная размерность орбит в  $\mathcal{G}/\mathcal{H}$  относительно  $G_x$  соответствует значению  $j = 0$  и поэтому равна  $s - k$ . Следовательно,  $k_j^x$  состоит из орбит, удовлетворяющих условию теоремы.

С другой стороны, ясно, что каждая орбита должна принадлежать подмножеству  $k_j^x$ . Теорема доказана.

Орбиты в  $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ , принадлежащие контактному подмножеству  $k_j^x$  (т. е. размерность которых отличается от максимального значения на  $j$ ), называются контактными орбитами ранга  $j$  для точки  $\xi \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$ . Каждая из них при любом значении  $j$ ,  $0 \leq j \leq p - k$ , является  $(s - k - j)$ -мерным аналитическим многообразием (см. [30], стр. 134, 147), на котором транзитивно (но, может быть, неэффективно) действует подгруппа  $G_x \subset \mathcal{G}$ , и которое, следовательно, аналитически диффеоморфно с  $G_x / (G_x \cap \mathcal{H}_\xi)$ , где  $\xi$  — некоторая его точка.

Примеры. 1) Пусть  $\mathcal{G}$  — псевдоортогональная группа  $O_{n+1}$  индекса 1,  $\mathcal{G}/\mathcal{H}$  — многообразие точек вещественного проективного пространства  $P_n$  с абсолютом  $-x^0{}^2 + x^1{}^2 + \dots + x^{n-1}{}^2 = 0$ ,  $\mathcal{G}/G$  — многообразие  $m$ -мерных плоскостей,  $0 < m < n - 1$ , имеющих с абсолютом вещественные невырожденные пересечения. Контактными подмножествами различных рангов в  $\mathcal{G}/\mathcal{H}$  для  $x \in \mathcal{G}/G$  являются:  $k_{n-m}^x$  — множество точек пересечения  $m$ -мерной плоскости с абсолютом ( $(m - 1)$ -мерная квадрака, являющаяся орбитой),  $k_{n-m-1}^x$  — множество остальных точек  $m$ -мерной плоскости (состоит из двух  $m$ -мерных орбит, внутренней и внешней относительно квадраки  $k_{n-m}^x$ ),  $k_m^x$  — множество точек, принадлежащих полярной  $(n - m - 1)$ -мерной плоскости (состоит из одной орбиты) и

$k_0^x$  — множество остальных точек в  $P_n$  (состоит из  $(n-1)$ -мерных орбит 1-параметрического семейства — из эквидистантных поверхностей, включая абсолют и его касательный конус с вершиной в  $k_m^x$ , оба без  $k_{n-m}^x$ ).

2) Пусть  $\mathcal{G}/\mathcal{H}$  и  $\mathcal{G}/G$  — многообразия точек и пар несовпадающих плоскостей в трехмерном проективном пространстве  $P_3$  (подгруппа  $G$  предполагается связной), а  $\mathcal{G}$  — группа проективных преобразований в  $P_3$ . Контактными подмножествами в  $\mathcal{G}/\mathcal{H} = P_3$  для  $\mathfrak{g} \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$  являются:  $k_2^x$  — множество точек в  $P_3$ , принадлежащих прямой пересечения плоскостей пары  $\mathfrak{g}$ ,  $k_1^x$  — множество точек в  $P_3$ , принадлежащих оставшимся аффинным плоскостям пары  $\mathfrak{g}$ ,  $k_0^x$  — множество остальных точек в  $P_3$ . Здесь  $k_2^x$  состоит из одной орбиты,  $k_1^x$  и  $k_0^x$  — из двух орбит.

3) Пусть  $\mathcal{G}$  — ортогональная группа  $O_6$ ,  $\mathcal{G}/\mathcal{H}$  и  $\mathcal{G}/G$  — многообразия точек и флагов  $S_1 \subset S_3$  в эллиптическом пространстве  $S_5$ . (Флагом  $S_1 \subset S_3$  в  $S_5$  называется образ, который состоит из 3-мерной плоскости  $S_3$  в  $S_5$  и лежащей в ней прямой  $S_1$ ). Контактными подмножествами в  $\mathcal{G}/\mathcal{H} = S_5$  для  $\mathfrak{g} \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$  являются:  $k_2^x$  — множество точек, принадлежащих прямой  $S_1$ ; полярной к ней прямой в  $S_3$  и полярной к  $S_3$  прямой в  $S_5$  (состоит из трех 1-мерных орбит),  $k_1^x$  — множество остальных точек в 3-мерных плоскостях, полярных к указанным прямым (состоит из 2-мерных орбит 1-параметрического семейства — эквидистантных поверхностей прямых в этих плоскостях),  $k_0^x$  — множество остальных точек в  $S_5$  (состоит из 3-мерных орбит 2-параметрического семейства — из эквидистантных поверхностей трех указанных прямых в  $S_5$ ).

4) Пусть  $\mathcal{G}$  — группа евклидовых движений в  $R_4$ ,  $\mathcal{H}$  — подгруппа вращений (т. е.  $\mathcal{G}/\mathcal{H}$  — евклидово пространство  $R_4$ ), стационарная подгруппа пучка параллельных прямых в некоторой двумерной плоскости  $R_2 \subset R_4$ . Контактными подмножествами в  $\mathcal{G}/\mathcal{H} = R_4$  для  $x \in \mathcal{G}/G$  являются:  $k_1^x$  — множество точек в  $R_4$ , принадлежащих плоскости  $R_2$  (состоит из 1-мерных орбит однопараметрического семейства — из прямых пучка),  $k_0^x$  — множество остальных точек в  $R_4$  (состоит из 2-мерных орбит двухпараметрического семейства — из эквидистантных поверхностей (цилиндров вращения) прямых пучка).

**4.3. Понятие инцидентности.** Контактная орбита ранга  $j$  в  $\mathcal{G}/\mathcal{H}$  для точки  $x \in \mathcal{G}/G$  называется орбитой инцидентности ранга  $j$  для  $x$ , если некоторая окрестность  $U_x$  ее точки  $\mathfrak{g}$  в  $\mathcal{G}/\mathcal{H}$  не содержит точек других орбит, размерности которых не превосходят размерности самой этой орбиты. Другими слова-

ми, орбита инцидентности для  $x \in \mathcal{G}/G$  является орбитой в  $\mathcal{G}/\mathfrak{h}$  относительно  $G_x$  локально строго минимальной размерности.

Точка  $x \in \mathcal{G}/\mathfrak{h}$  называется  $j$ -инцидентной с точкой  $x \in \mathcal{G}/G$ , если она принадлежит орбите инцидентности ранга  $j$  в  $\mathcal{G}/\mathfrak{h}$  для точки  $x$ . Независимо от понятия орбиты инцидентности можно это определение сформулировать следующим образом.

Точка  $x \in \mathcal{G}/\mathfrak{h}$  называется  $j$ -инцидентной с точкой  $x \in \mathcal{G}/G$ , если существует окрестность  $U_x \in \mathcal{G}/\mathfrak{h}$  точки  $x$ , такая что для любой точки  $x' = gx \in U_x$ , где  $g \in G_x$ ,  $g \in \mathfrak{h}_x$ , справедливо

$$\dim(G_x \cap \mathfrak{h}_{x'}) < \dim(G_x \cap \mathfrak{h}_x) = k + j. \quad (1)$$

**Лемма.** Подмножество точек в  $\mathcal{G}/\mathfrak{h}$ ,  $j$ -инцидентных с  $x \in \mathcal{G}/G$  при заданном  $j$ ,  $0 < j \leq p - k$ , состоит из орбит инцидентности ранга  $j$  для точки  $x$ , являющихся его связными компонентами (если связна подгруппа  $G$ ).

**Доказательство.** Справедливость первого утверждения очевидна. Связность орбиты инцидентности для  $x$ , как и всякой орбиты в  $\mathcal{G}/\mathfrak{h}$  относительно  $G_x$ , следует из связности подгруппы  $G$ . То, что она является связной компонентой рассматриваемого подмножества, вытекает из того, что любая ее точка  $gx$ ,  $g \in G_x$  обладает, в силу самого определения орбиты инцидентности ранга  $j$ , окрестностью  $gU_x$  в  $\mathcal{G}/\mathfrak{h}$ , которая не содержит других точек из  $\mathcal{G}/\mathfrak{h}$ ,  $j$ -инцидентных с  $x$ . Лемма доказана.

Дополнительно можно заметить, что эти связные компоненты подмножества точек в  $\mathcal{G}/\mathfrak{h}$ ,  $j$ -инцидентных с  $x \in \mathcal{G}/G$  как орбиты относительно  $G_x$  являются погруженными в  $\mathcal{G}/\mathfrak{h}$  однородными пространствами  $G^*/H^* = G_x/(G_x \cap \mathfrak{h}_x)$ . Здесь  $x$  — некоторая точка этой компоненты, а

$$G^* = G_x/K, \quad H^* = (G_x \cap \mathfrak{h}_x)/K$$

— факторгруппы по ядру неэффективности  $K$  действия  $G_x$  на этой компоненте.

Очевидно, что обычная инцидентность  $p$ -мерной и  $q$ -мерной плоскости в  $n$ -мерном проективном пространстве  $P_n$  является частным случаем  $j$ -инцидентности при максимальном  $j$ , когда  $\mathcal{G}$  — группа проективных преобразований в  $P_n$ , а  $\mathcal{G}/G$  и  $\mathcal{G}/\mathfrak{h}$  — соответствующие грассмановы многообразия.

В примерах 1) — 4) орбитами инцидентности (некоторого ранга) являются следующие. В примере 1) — орбиты в  $k_{n-m}^x$ ,  $k_{n-m-1}^x$  и  $k_m^x$ ; в примере 2) — все орбиты; в примере 3) — орбиты в  $k_2^x$ ; в примере 4) нет орбит инцидентности.

Теорема. Отношение  $j$ -инцидентности точек  $x \in \mathfrak{G}/G$  и  $x' \in \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$  (а) симметрично: если  $x$   $j$ -инцидентна с  $x'$ , то  $x'$   $j$ -инцидентна с  $x$ , и (б) инвариантно относительно одновременного действия любого элемента  $g \in \mathfrak{G}$  на  $\mathfrak{G}/G$  и  $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ : если  $x$   $j$ -инцидентна с  $x'$ , то  $gx$   $j$ -инцидентна с  $gx'$ .

Доказательство. Пусть  $x' \in \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$   $j$ -инцидентна с  $x \in \mathfrak{G}/G$ , т. е. существует ее окрестность  $U_{x'} \subset \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ , такая что для любой точки  $x'' = gx' \in U_{x'}$ , где  $g \in G_x$ ,  $g \in \mathfrak{H}_{x'}$ , справедливо (1). Множество элементов в  $\mathfrak{G}$ , действие которых на  $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$  не выводит точку  $x'$  из окрестности  $U_{x'}$ , содержит некоторую окрестность  $W_e$  единицы  $e$ . Множество  $W_e^{-1}x \subset \mathfrak{G}/G$  содержит некоторую окрестность  $\mathcal{U} \subset \mathfrak{G}/G$  точки  $x$ . Произвольную точку  $x' \in \mathcal{U}$  можно представить в виде  $x' = g^{-1}x$ ,  $g \in W_e$ . При этом в силу (2) из 4.2,

$$\dim(G_{x'} \cap \mathfrak{H}_{x'}) = \dim(G_{gx'} \cap \mathfrak{H}_{gx'}) = \dim(G_x \cap \mathfrak{H}_{x'}).$$

Если  $g^{-1} \notin G_x$ ,  $g^{-1} \notin \mathfrak{H}_{x'}$ , то  $g \notin G_x$ ,  $g \notin \mathfrak{H}_{x'}$  и отсюда в силу (1)

$$\dim(G_{x'} \cap \mathfrak{H}_{x'}) < \dim(G_x \cap \mathfrak{H}_{x'}) = k + j,$$

т. е.  $x$   $j$ -инцидентна с  $x'$ . Утверждение (а) доказано.

Утверждение (б) является непосредственным следствием из (2) в 4.2 и из (1). Теорема доказана.

Если из двух точек  $x \in \mathfrak{G}/G$  и  $x' \in \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$  одна  $j$ -инцидентна с другой, то они, учитывая утверждение (а) теоремы, называются взаимно  $j$ -инцидентными.

## § 5. ПОГРУЖЕННЫЕ ОДНОРОДНЫЕ РАССЛОЕНИЯ

**5.1. Однородные расслоения, определяемые  $j$ -инцидентностью.** Пусть даны два однородных пространства  $\mathfrak{G}/G$  и  $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$  с общей группой движений  $\mathfrak{G}$  и со связными стационарными подгруппами  $G$  и  $\mathfrak{H}$ . Группа Ли  $\mathfrak{G}$ , действуя транзитивно на  $\mathfrak{G}/G$  и  $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ , действует также на топологическом произведении  $\mathfrak{G}/G \times \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$  согласно формуле

$$g(x, x') = (gx, gx'), \quad x \in \mathfrak{G}/G, \quad x' \in \mathfrak{G}/\mathfrak{H}. \quad (1)$$

Это действие может оказаться нетранзитивным. Если точки  $x$  и  $x'$  взаимно  $j$ -инцидентны, то орбита пары  $(x, x')$  в  $\mathfrak{G}/G \times \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$  относительно  $\mathfrak{G}$  состоит, в силу утверждения (б) теоремы 4.3, из взаимно  $j$ -инцидентных пар точек и в общем случае не совпадает со всем  $\mathfrak{G}/G \times \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ . Однако эта орбита оказывается одной из связных компонент подмножества в  $\mathfrak{G}/G \times \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$  всех пар  $(x', x')$  взаимно  $j$ -инцидентных точек, причем она обладает весьма специальной структурой.

**Теорема.** Если группа движений  $\mathfrak{G}$  и стационарные подгруппы  $G$  и  $\mathfrak{H}$  однородных пространств  $\mathfrak{G}/G$  и  $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$  являются связными, то каждая связная компонента подмножества всех пар взаимно  $j$ -инцидентных точек из  $\mathfrak{G}/G$  и  $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$  является при каждом  $j$ ,  $0 \leq j \leq p - k$ , орбитой в  $\mathfrak{G}/G \times \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$  относительно  $\mathfrak{G}$ . Эта орбита обладает двумя различными структурами однородного расслоения. Одна из этих структур имеет базу  $\mathfrak{G}/G$  и типовой слой

$$G^*/H^* = G_x/(G_x \cap \mathfrak{H}_x),$$

где  $(x, \mathfrak{r})$  — одна пара этой орбиты, а  $G^* = G_x/K$  и  $H^* = (G_x \cap \mathfrak{H}_x)/K$  — факторгруппы по ядру неэффективности  $K$  действия  $G_x$  на  $G_x/(G_x \cap \mathfrak{H}_x)$ , вторая получается из нее, если заменить роли  $G$  и  $\mathfrak{H}$ .

**Доказательство.** Если  $(x, \mathfrak{r}) \in \mathfrak{G}/G \times \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$  состоит из взаимно  $j$ -инцидентных точек и  $(x', \mathfrak{r}')$  принадлежит ее орбите относительно  $\mathfrak{G}$ , то  $(x', \mathfrak{r}')$ , в силу утверждения (b) теоремы 4.3 и формулы (1), также состоит из  $j$ -инцидентных точек. Поэтому такая орбита является связным подмножеством пар взаимно  $j$ -инцидентных точек.

То, что она является связной компонентой этого подмножества, доказывается следующим образом. Точка  $\mathfrak{r} \in \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$  обладает, в силу леммы 4.3, окрестностью  $U_{\mathfrak{r}}$  в  $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ , которая не содержит точек  $\mathfrak{r}'$ ,  $j$ -инцидентных с  $x \in \mathfrak{G}/G$  и не принадлежащих орбите  $G_x x$ . В группе  $\mathfrak{G}$  можно выбрать настолько малую окрестность  $W_e$  единицы  $e$ , а в  $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$  настолько малую окрестность  $U'_{\mathfrak{r}} \subset U_{\mathfrak{r}}$ , что  $W_e \mathfrak{r}' \subset U_{\mathfrak{r}}$  для каждой точки  $\mathfrak{r}' \in U'_{\mathfrak{r}}$ . Тогда окрестность  $\mathfrak{M}'_x \times U'_{\mathfrak{r}}$  пары  $(x, \mathfrak{r}) \in \mathfrak{G}/G \times \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ , где  $\mathfrak{M}'_x = W_e^{-1}x$ , не содержит пары  $(x', \mathfrak{r}')$  взаимно  $j$ -инцидентных точек, не принадлежащих орбите пары  $(x, \mathfrak{r})$  в  $\mathfrak{G}/G \times \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$  относительно  $\mathfrak{G}$ .

Действительно, пусть точки  $x' \in U'_x$  и  $\mathfrak{r}' \in U'_{\mathfrak{r}}$  взаимно  $j$ -инцидентны. Существует  $g \in W_e$ , так что  $x' = g^{-1}x$ . Тогда  $gx' = x$  и  $g\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}'' \in U_{\mathfrak{r}}$ . В силу утверждения (b) теоремы 4.3 точки  $x$  и  $\mathfrak{r}''$  также взаимно  $j$ -инцидентны; поэтому, в силу выбора окрестности  $U_{\mathfrak{r}}$ , точка  $\mathfrak{r}''$  принадлежит орбите  $G_x x$ , т. е. существует  $g' \in G_x$ , так что  $\mathfrak{r} = g'\mathfrak{r}''$ . Теперь действие элемента  $g'g \in \mathfrak{G}$  на  $\mathfrak{G}/G \times \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$  отображает пару  $(x', \mathfrak{r}')$  в пару  $(x, \mathfrak{r})$ . Таким образом, все пары  $(x', \mathfrak{r}')$  взаимно  $j$ -инцидентных точек из окрестности  $\mathfrak{M}'_x \times U'_{\mathfrak{r}}$  принадлежат орбите пары  $(x, \mathfrak{r})$ , относительно  $\mathfrak{G}$ . Эта орбита, следовательно, является связной

компонентой подмножества всех пар взаимно  $j$ -инцидентных точек в  $\mathfrak{G}/G \times \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ .

Утверждение о ее структуре доказывается следующим образом. Она, как орбита, обладает структурой однородного пространства  $\mathfrak{G}/(G_x \cap \mathfrak{H}_x)$  с эффективно действующей группой движений  $\mathfrak{G}$ , где  $x \in \mathfrak{G}/G$  и  $x \in \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$  — взаимно  $j$ -инцидентные точки. Замкнутая подгруппа  $G_x$ , действуя правыми сдвигами на группе Ли  $\mathfrak{G}$ , определяет в  $\mathfrak{G}$  структуру главного расслоения с базой  $\mathfrak{G}/G$  и структурной группой  $G = G_x$ . Индуцируемое действие замкнутой подгруппы  $H = G_x \cap \mathfrak{H}_x$  этой структурной группы  $G$  на  $\mathfrak{G}$  определяет, в силу теоремы 1.4, в  $\mathfrak{G}$  новую структуру главного расслоения с базой  $\mathfrak{G}/H = \mathfrak{G}/(G_x \cap \mathfrak{H}_x)$ . Эта база, как видно, совпадает с рассматриваемой орбитой. Из той же самой теоремы 1.4 следует, что она обладает структурой однородного расслоения, база которого совпадает с базой  $\mathfrak{G}/G$  исходного расслоения в  $\mathfrak{G}$ , типовым слоем которого является  $G_x/(G_x \cap \mathfrak{H}_x) = G^*/H^*$  и структурной группой — фактор группа  $G^* = G_x/K$ . Теорема доказана.

Каждая связная компонента подмножества пар взаимно  $j$ -инцидентных точек в  $\mathfrak{G}/G \times \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$  с одной из указанных в теореме особых структур, называется однородным расслоением, определяемым  $j$ -инцидентностью. В зависимости от того, как выбрана его база, определяется проекция этой компоненты на одно из однородных пространств  $\mathfrak{G}/G$  и  $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ . Пусть  $\tilde{p}$  и  $\tilde{p}$  являются проекциями, соответственно, на  $\mathfrak{G}/G$  и  $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ , т. е. если  $x \in \mathfrak{G}/G$  и  $x \in \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$  взаимно  $j$ -инцидентны, то

$$\tilde{p}(x, \xi) = x, \quad \tilde{p}(x, \xi) = \xi.$$

Проекции  $\tilde{p}$  и  $\tilde{p}$  являются, очевидно, аналитическими невырожденными отображениями.

**5.2. Погруженное однородное расслоение.** Пусть даны однородные пространства  $\mathfrak{G}/G$  и  $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$  со связными  $\mathfrak{G}$ ,  $G$  и  $\mathfrak{H}$ , и однородное расслоение с базой  $\mathfrak{G}/G$ , определяемое  $j$ -инцидентностью. Пусть в его базе  $\mathfrak{G}/G$  дано некоторое подмножество  $B$ . Тогда определяется его ограничение на  $B$ , которое является однородным расслоением  $E$  с базой  $B \subset \mathfrak{G}/G$ , типовым слоем  $G^*/H^* = G_x/(G_x \cap \mathfrak{H}_x)$  и структурной группой  $G^* = G_x/K$  (см. 1.2 и теорема 5.1). Оно называется погруженным однородным расслоением  $E$ , определяемым  $j$ -инцидентностью, с базовым пространством  $\mathfrak{G}/G$  и слоевым пространством  $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ . Его частным случаем при  $B = \mathfrak{G}/G$  является само однородное расслоение, определяемое  $j$ -инцидентностью.

Слоем этого расслоения  $E$  над точкой  $x \in B$  является одна из связных компонент множества пар  $(x, \xi)$ , где  $\xi$  — произ-

вольная точка слоевого пространства  $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ ,  $j$ -инцидентная с  $x$ . Проекция  $p$  — ограничение проекции  $\tilde{p}$  на  $E$  — отображает каждую такую пару  $(x, \varepsilon)$ , как точку  $(x, \varepsilon) = z \in E$ , в точку  $x \in B$ .

Примеры. 1) Пусть  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{G}/G$  и  $\mathcal{G}/\mathcal{H}$  имеют такие же истолкования, как в примере 1) п. 4.2. Пусть в многообразии  $\mathcal{G}/G$   $m$ -мерных плоскостей, пересекающих абсолют, дано подмногообразие  $B$ . Тогда соответствующее погруженное однородное расслоение  $E$ , определяемое  $j$ -инцидентностью, истолковывается следующим образом (см. также 4.3): при  $j = n - m$  — многообразие пар  $(m - 1)$ -мерных сфер и принадлежащих им точек в конформном пространстве  $S_{n-1}$  (причем сферы образуют многообразие  $B$ ); при  $j = n - m - 1$  — два многообразия пар  $m$ -мерных плоскостей из  $B$  и принадлежащих им точек неевклидовых пространств  ${}^1S_n$  положительной или отрицательной кривизны (см. [27], стр. 151); при  $j = m$  — многообразие пар  $m$ -мерных плоскостей из  $B$  и точек пространства  ${}^1S_n$  положительной кривизны, принадлежащих полярным к ним  $(n - m - 1)$ -мерным плоскостям.

2) Эти частные виды погруженных расслоений принадлежат некоторому более общему классу. Погруженное расслоение называется грасмановым расслоением, если многообразием его базового пространства  $\mathcal{G}/G$  является грасманово многообразие  $m$ -мерных плоскостей  $n$ -мерного проективного пространства  $P_n$ , группой движений  $\mathcal{G}$  — группа проективных преобразований в  $P_n$  или некоторая ее замкнутая подгруппа, а слоевым пространством  $\mathcal{G}/\mathcal{H}$  — многообразие точек в  $P_n$  или некоторое его подмногообразие, являющееся орбитой в  $P_n$  относительно группы Ли  $\mathcal{G}$ .

Теория грасмановых расслоений тесно связана с геометрией семейств подпространств, успешно развитой советскими геометрами, и обогащает ее некоторыми новыми понятиями и методами.

3) Некоторый новый класс погруженных расслоений получается, если в качестве  $\mathcal{G}$  рассматривать также группу проективных преобразований слоевого пространства  $\mathcal{G}/\mathcal{H} = P_n$ , а в качестве  $G$  не саму подгруппу стационарности  $m$ -мерной плоскости в  $P_n$ , а некоторую ее подгруппу. Тогда  $\mathcal{G}/G$  представляет собой многообразие некоторых геометрических образов в  $m$ -мерных плоскостях проективного пространства  $P_n$  (например, невырожденных квадратик, если этой подгруппой является  ${}^kO_{m+1}$ ). Некоторые частные виды погруженных расслоений этого класса (связанные, например, с многообразиями квадратик) исследовал В. С. Малаховский (см. [18], [19]).

**5.3. Фокальные точки и направления.** Понятие погруженного расслоения позволяет с общей точки зрения определить

понятие фокальной точки, которое в различных конкретных случаях было рассмотрено многими авторами (см. литературу, указанную во введении, а также [20], стр. 42).

Пусть дано погруженное расслоение  $E$ , определяемое  $j$ -инцидентностью, с базовым пространством  $\mathcal{G}/G$  и слоевым пространством  $\mathcal{G}/\mathfrak{h}$ . Вместе с его проекцией  $p$  на базу  $B \subset \mathcal{G}/G$ , которая пару  $(x, \mathfrak{z}) = z \in E$  отображает в  $pz = x \in B$ , определяется также некоторое отображение этого расслоения  $E$  в слоевое пространство  $\mathcal{G}/\mathfrak{h}$ . Таким отображением

$$\mathfrak{p}: E \rightarrow \mathcal{G}/\mathfrak{h}$$

является ограничение проекции  $\tilde{\mathfrak{p}}$  на  $E$ , т. е.

$$\mathfrak{p}z = \mathfrak{z} \in \mathcal{G}/\mathfrak{h}.$$

Образом  $\mathfrak{p}E \subset \mathcal{G}/\mathfrak{h}$  является дифференцируемое подмногообразие (возможно, с краем) точек  $\mathfrak{z}$  в  $\mathcal{G}/\mathfrak{h}$ ,  $j$ -инцидентных хотя бы с одной из точек  $x \in B$ .

Так как  $\tilde{\mathfrak{p}}$  является аналитическим отображением, то его ограничение  $\mathfrak{p}$  на дифференцируемом многообразии  $E$  является дифференцируемым. Однако оно может оказаться нерегулярным.

Если  $\dim E > \dim (\mathfrak{p}E)$  (в частности, если  $\dim E > \dim \mathcal{G}/\mathfrak{h}$ ), то  $\mathfrak{p}$  нерегулярно везде. В таком случае каждой точке  $\mathfrak{z} \in \mathfrak{p}E$  соответствует некоторое многообразие  $p\mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{z}) \subset \mathcal{G}/G$  (возможно, с краем), которое состоит из тех точек  $x$  в базе  $B$ , которые  $j$ -инцидентны с заданной  $\mathfrak{z} \in \mathfrak{p}E$ .

Простым примером является грасманово расслоение, определяемое комплексом прямых проективного пространства  $P_3$  (см. [8]). Многообразиями  $p\mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{z})$  являются здесь конусы прямых комплекса, проходящих через заданную точку  $\mathfrak{z} \in P_3$ . Другим примером является грасманово расслоение, определяемое 3-мерным многообразием прямолинейных образующих гиперквадрики в  $P_4$ . Как показал Ф. Севери [46], оно является при  $m=1$ ,  $n=4$  и  $\dim B = \dim E = 3$  единственным грасмановым расслоением.

Если  $\dim E = \dim (\mathfrak{p}E) \leq \dim \mathcal{G}/\mathfrak{h}$ , то отображение нерегулярно только в точках множества меры нуль (как следует из теоремы Сарда; см. [25], стр. 30; [20], стр. 43). Его критические точки называются тогда фокальными точками погруженного многообразия  $E$ . Их образы в  $\mathfrak{p}E$  при отображении  $\mathfrak{p}$  называются фокусами.

Фокальные точки погруженного расслоения  $E$  могут быть определены еще другим, более геометрическим способом.

Лемма. Точка  $(x, \mathfrak{z}) = z \in E$  является фокальной точкой тогда и только тогда, когда в касательном к  $E$  пространстве

$T_z(E)$  существует вектор  $Z$ , такой что  $(dp)_z Z \neq 0$  и  $(d\varphi)_z Z$  является касательным к образу слоя при  $\varphi$ .

Доказательство. Из существования такого вектора  $Z \in T_z(E)$  непосредственно следует, что  $(d\varphi)_z$  является вырожденным линейным отображением  $T_z(E)$  в  $T_z(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})$  и точка  $z$ , следовательно, — критической точкой отображения  $\varphi$ . Обратно, если  $z \in E$  является критической для  $\varphi$ , то  $(d\varphi)_z$  является вырожденным линейным отображением, и такой вектор  $Z \in T_z(E)$  обязательно найдется, потому что между касательными пространствами к слою и к его образу при  $\varphi$  отображение  $(d\varphi)_z$  устанавливает изоморфизм. Лемма доказана.

Если точка  $z \in E$  является фокальной точкой и вектор  $Z \in T_z(E)$  удовлетворяет условиям леммы, то направление вектора  $(dp)_z Z$  в касательном к базе  $B$  пространстве  $T_{pz}(B)$  называется фокальным направлением погруженного расслоения  $E$ .

## § 6. ИНДУЦИРОВАННЫЕ СВЯЗНОСТИ

**6.1. Погруженные расслоения с редуктивным базовым пространством.** Однородное пространство  $\mathfrak{G}/G$  называется редуктивным, если в алгебре Ли  $\mathfrak{G}$  его группы движений  $\mathfrak{G}$  существует линейное подпространство  $M$ , так что

$$\mathfrak{G} = \underline{G} + M, \quad \underline{G} \cap M = \{0\}, \quad (\text{ad } G) M \subset M, \quad (1)$$

где  $G$  — подалгебра Ли стационарной подгруппы  $G$ , а  $\text{ad } G$  обозначает присоединенное представление этой подгруппы в  $\mathfrak{G}$ . Оказывается, что в любом погруженном однородном расслоении с редуктивным базовым пространством  $\mathfrak{G}/G$  индуцируется некоторая линейная связность.

Теорема. Пусть дано погруженное однородное расслоение  $E$ , базовое пространство  $\mathfrak{G}/G$  которого является редуктивным, и пусть в алгебре Ли  $\mathfrak{G}$  группы движений  $\mathfrak{G}$  дано разложение (1). Тогда в  $E$  естественным образом определяется некоторая линейная связность.

Доказательство. Известно (см. [22], стр. 68), что разложение (1) определяет линейную связность для структуры главного расслоения с базой  $\mathfrak{G}/G$  и структурной группой  $\underline{G} = G$  в группе Ли  $\mathfrak{G}$ . Горизонтальным распределением этой связности является левоинвариантное распределение  $\Delta$  на  $\mathfrak{G}$ , подпространство  $\Delta_e \subset T_e(\mathfrak{G})$  которого в единице  $e \in \mathfrak{G}$  совпадает с линейным подпространством  $M \subset \mathfrak{G} = T_e(\mathfrak{G})$  (и которое, следовательно, определяется этим подпространством  $M$ ). Условие 1° в теореме 3.3 удовлетворяется в силу первых двух из условий (1), условие 2° следует из последнего условия (1).

Однородное расслоение  $\tilde{E}$ , определяемое  $j$ -инцидентностью между точками однородного пространства  $\mathfrak{G}/G$  и некоторого другого (слоевого) однородного пространства  $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$  и содержащее  $E$ , получается факторизацией указанного выше главного расслоения по подгруппе  $H = G_x \cap \mathfrak{H}_x$  его структурной группы  $G_x$ , где  $x$  и  $x$  — взаимно  $j$ -инцидентные точки. Пусть  $\pi: \mathfrak{G}$  на  $\tilde{E} = \mathfrak{G}/(G_x \cap \mathfrak{H}_x)$  является канонической проекцией этой факторизации.

Из 1.4 (следствие 2) и из следствия 2.4 следует, что линейная связность, заданная горизонтальным распределением  $\Delta$  на  $\mathfrak{G}$ , определяет некоторую ассоциированную с ней связность в  $\tilde{E}$ , которая, в силу следствия 3.1, также линейна. Из теоремы 3.4 следует, что горизонтальное распределение  $\tilde{\Gamma}$  этой линейной связности в  $\tilde{E}$  является образом

$$\tilde{\Gamma} = d\pi\Delta$$

распределения  $\Delta$  при дифференциале  $d\pi$  проекции  $\pi$ .

Заданное погруженное однородное расслоение  $E$  с базой  $V \subset \mathfrak{G}/G$  является ограничением однородного расслоения  $\tilde{E}$  на  $V$ . Поэтому в нем также определяется линейная связность (см. 3.1), горизонтальное распределение  $\Gamma$  которой является ограничением распределения  $\tilde{\Gamma}$  на  $E$ . Теорема доказана.

Линейная связность в погруженном однородном расслоении  $E$  с редуktивным базовым пространством  $\mathfrak{G}/G$ , определяемая разложением (1) в алгебре Ли  $\mathfrak{G}$ , называется индуцированной этим разложением связностью в  $E$ .

Доказательство теоремы позволяет также более подробно указать связь горизонтального распределения  $\Gamma$  с линейным подпространством  $M \subset \mathfrak{G}$  разложения (1):  $\Gamma$  является образом ограничения на  $\pi^{-1}(E) \subset \mathfrak{G}$  левоинвариантного распределения  $\Delta$ , определяемого на  $\mathfrak{G}$  подпространством  $M$ , при дифференциале ограничения отображения  $\pi$  на  $\pi^{-1}(E)$ . Другими словами,  $\Gamma$  является ограничением на  $E$  распределения  $\tilde{\Gamma}$  на  $\tilde{E} = \mathfrak{G}/(G_x \cap \mathfrak{H}_x)$ , подпространство  $\tilde{\Gamma}_z \subset T_z(\tilde{E})$  которого в точке  $(x, x) = z \in E \subset \tilde{E}$  состоит из касательных векторов путей

$$(\exp tA)z = ((\exp tA)x, (\exp tA)x), \quad (2)$$

где  $A \in M$ .

Примеры. 1) Базовое пространство  $\mathfrak{G}/G$  грасмановых расслоений, рассматриваемых в примере 1) п. 5.2, является редуktивным (более того, симметрическим). В самом деле, группой движений  $\mathfrak{G}$  в этом случае является псевдоортого-

нальная группа  ${}^1O_{n+1}$ . Ее алгебра Ли  ${}^1O_{n+1}$  состоит из матриц  $A = \|A_j^i\|$ , удовлетворяющих условию

$$A_j^i + \varepsilon A_i^j = 0, \quad \varepsilon = \pm 1; \quad i, j = 0, 1, \dots, n \quad (3)$$

(ср. [24], стр. 393). Скобочная операция в  ${}^1O_{n+1}$ , как в любой матричной алгебре Ли, определяется формулой

$$[AB] = AB - BA. \quad (4)$$

Элемент  $\exp tA = E + tA + \dots$  группы  ${}^1O_{n+1}$ , действуя на точку  $x \in P_n = \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ , переводит ее в точку

$$(\exp tA)x = x + tAx + \dots \quad (5)$$

Если в  $\mathfrak{G}/\mathfrak{H} = P_n$  ввести репер относительно  $\mathfrak{G} = {}^1O_{n+1}$ , состоящий из  $n+1$  точек  $e_i \in P_n$ , попарно полярных относительно абсолюта, то  $x = X^i e_i$  и

$$A = A_j^i X^j e_i. \quad (6)$$

Тогда подалгебра Ли  $G$  подгруппы стационарности  $G$   $m$ -мерной плоскости  $x$  в  $P_n$ , натянутой на точки  $e_a$  ( $a = 0, 1, \dots, m$ ) репера, состоит из матриц  $A \in {}^1O_{n+1}$ , у которых  $A_a^\alpha = 0$  ( $\alpha = m+1, \dots, n$ ). Из (3) следует, что в этом случае также  $A_\alpha^a = 0$ , т. е. инвариантна также  $(n-m-1)$ -мерная плоскость, полярная к  $x$ . Подалгебра  $G$  состоит, таким образом, из матриц вида

$$\hat{A} = \left\| \begin{array}{c} A' : 0 \\ \dots \\ 0 : A'' \end{array} \right\|.$$

Вся алгебра  $\mathfrak{G} = {}^1O_{n+1}$  является прямой суммой подалгебры  $G$  и линейного подпространства  $M$ , состоящего из матриц вида

$$\tilde{B} = \left\| \begin{array}{c|c} 0 & B' \\ \hline B'' & 0 \end{array} \right\|. \quad (7)$$

При этом, в силу (4),

$$[\hat{A}\tilde{B}] = \left\| \begin{array}{c|c} 0 & A'B' - B'A'' \\ \hline A''B'' - B'A' & 0 \end{array} \right\|,$$

т. е.  $[GM] \subset M$ . Отсюда, как известно [26], следует, что  $(\text{ad } G)\bar{M} \subset M$ . Таким образом, в  $\mathfrak{G}$  дано разложение (1), и однородное пространство  $\mathfrak{G}/G$  — многообразие  $m$ -мерных плоскостей в  $P_n$ , пересекающих абсолюта — является редуктивным. (Оно является, кроме того, симметрическим, потому что  $M$

инвариантно относительно инволютивного автоморфизма в  $\mathfrak{G}$ , определяемого инволютивным автоморфизмом  $A = \|A_{ij}^{\epsilon}\| \rightarrow A^* = \| \epsilon A_{ij}^{\epsilon} \|^{-1}$  в  $\mathfrak{G} = {}^1O_{n+1}$ , который сохраняет  $G$ .)

Следовательно, в каждом из грассмановых расслоений, рассматриваемых в примере 1) п. 5.2., определяется некоторая линейная связность, индуцируемая разложением  $\mathfrak{G}$  в прямую сумму подалгебры  $G$  и линейного подпространства  $M$ .

Горизонтальное распределение  $\Gamma$  этой связности проектируется при  $\varphi: E$  в  $\mathfrak{G}/\mathfrak{h} = P_n$  в распределение  $d\varphi\Gamma$  на  $\varphi E \subset P_n$ , для которого  $(d\varphi\Gamma)_{\xi}$  в точке  $\varphi z = \xi = X^{a\epsilon}_a$  состоит, в силу (2), (5), (6) и (7), из точек

$$\xi + \tilde{B}\xi = \xi + B_a^{\alpha} X^{a\epsilon}_a,$$

где  $B_a^{\alpha}$  — произвольные вещественные числа. Следовательно,  $(d\varphi\Gamma)_{\xi}$  принадлежит  $(n - m)$ -мерной плоскости в  $P_n$ , натянутой на точку  $\xi = \varphi z$  и  $(n - m - 1)$ -мерную плоскость точек  $X^{a\epsilon}_a$ , полярную к  $m$ -мерной плоскости  $\varphi z = x$  точек  $X^{a\epsilon}_a$ .

Короче говоря, параллельное перенесение точек  $\xi$  плоскости  $x \in B$  в этой связности сводится, с инфинитезимальной точки зрения, к проектированию в  $P_n$ , «центром» которого является полярная к  $x$  плоскость.

2) Рассмотренные в предыдущем примере грассмановы расслоения являются частными случаями более общих погруженных однородных расслоений.

Пусть  $\mathfrak{G}/\mathfrak{h}$  является проективным пространством  $P_n$ ,  $\mathfrak{G}$  — группой Ли его проективных преобразований. Пусть  $G$  является стационарной подгруппой пары непересекающихся  $m$ -мерной и  $(n - m - 1)$ -мерной плоскостей в  $P_n$ . Тогда  $\mathfrak{G}/G$  является симметрическим однородным пространством, которое называется пространством  $m$ -пар (см. [27], стр. 299).

Пусть в  $\mathfrak{G}/G$  дано некоторое подмногообразие  $B$   $m$ -пар. Тогда соответствующее ему погруженное однородное расслоение  $E$ , определяемое  $(n - m - 1)$  инцидентностью между точками из  $\mathfrak{G}/\mathfrak{h} = P_n$  и  $\mathfrak{G}/G$  интерпретируется как многообразие пар  $(x, \xi)$ , где  $x$  — некоторая  $m$ -пара из  $B$ , а  $\xi$  — точка в  $P_n$ , принадлежащая  $m$ -мерной плоскости пары  $x$ . Так как  $\mathfrak{G}/G$  в данном случае является симметрическим, а следовательно и редуктивным (в этом можно убедиться и непосредственно, точно так же, как в предыдущем примере), то в  $E$ , согласно теореме 6.1, индуцируется линейная связность. Эта связность принадлежит классу связностей, рассмотренных в [35]; она была введена в [33].

Рассуждения, аналогичные тем, которые были проведены в предыдущем примере, показывают, что инфинитезимальное перенесение в этой связности сводится к проектированию в  $P_n$ , «центром» которого является вторая плоскость  $m$ -пары.

Если связность, индуцируемая указанным образом в  $E$ , имеет нулевую кривизну (т. е. ее группа голономии является гомоморфным образом фундаментальной группы базисного подмногообразия  $B$ ), то многообразие  $m$ -пар  $B$  называется расслоенным в сторону  $m$ -мерных плоскостей (см. литературу, указанную во введении).

## 6.2. Оснащение погруженного однородного расслоения.

Если базовое пространство  $\mathfrak{G}/G$  погруженного однородного расслоения  $E$  не является редуцированным, то в некоторых случаях можно в  $E$  индуцировать связность с помощью известных вспомогательных построений, которые принято называть оснащениями. Ниже описывается одна общая схема такого оснащения.

Однородные пространства  $\mathfrak{G}/G$  и  $\mathfrak{G}/G'$  называются взаимно редуцирующимися, если однородное пространство  $\mathfrak{G}/(G \cap G')$  является редуцированным. Здесь  $\mathfrak{G}/(G \cap G')$  можно реализовать в виде орбиты в  $\mathfrak{G}/G \times \mathfrak{G}/G'$  относительно  $\mathfrak{G}$ , содержащей пару  $(x, x')$  точек  $x \in \mathfrak{G}/G$  и  $x' \in \mathfrak{G}/G'$ , стационарными подгруппами которых являются  $G$  и  $G'$ . Пусть  $\rho$  означает соответствующий диффеоморфизм:

$$\rho: \mathfrak{G}/(G \cap G') \text{ в } \mathfrak{G}/G \times \mathfrak{G}/G'.$$

Подмногообразие  $B$  однородного пространства  $\mathfrak{G}/G$  называется оснащаемым с помощью другого однородного пространства  $\mathfrak{G}/G'$ , взаимно редуцирующегося с  $\mathfrak{G}/G$ , если существует его диффеоморфизм  $\varphi$  в  $\mathfrak{G}/G'$  такой, что

$$(B, \varphi(B)) \subset \rho(\mathfrak{G}/(G \cap G')).$$

При этом диффеоморфизм  $\varphi: B$  в  $\mathfrak{G}/G'$  называется оснащением подмногообразия  $B \subset \mathfrak{G}/G$ .

Теорема. Пусть 1) однородные пространства  $\mathfrak{G}/G$  и  $\mathfrak{G}/G'$  — взаимно редуцирующиеся, 2) существует орбита  $j$ -инцидентности  $E$  в однородном пространстве  $\mathfrak{G}/\mathfrak{h}$  относительно  $G$ , которая является в то же время орбитой  $j'$ -инцидентности относительно  $G \cap G'$ , 3) подмногообразие  $B \subset \mathfrak{G}/G$  оснащено с помощью  $\mathfrak{G}/G'$ .

Тогда каждое оснащение  $\varphi: B$  в  $\mathfrak{G}/G'$  позволяет в погруженное однородное расслоение  $E$  с базой  $B \subset \mathfrak{G}/G$  и с заданным типовым слоем  $F \subset \mathfrak{G}/\mathfrak{h}$ , определяемое  $j$ -инцидентностью между точками из  $\mathfrak{G}/G$  и  $\mathfrak{G}/\mathfrak{h}$ , ввести линейную связность, индуцируемую некоторым разложением

$$\underline{\mathfrak{G}} = \underline{G} \cap \underline{G'} + M, \quad (1)$$

удовлетворяющим условию (1) теоремы 6.1.

Доказательство. Из условия 3) следует, что в  $\underline{\mathfrak{G}}/(\underline{G} \cap \underline{G'})$  существует диффеоморфный образ  $\tilde{B}$  многообразия  $B$  — прообраз многообразия  $(B, \varphi(B))$  при диффеоморфизме  $\rho$ . Из 2) следует, что существует соответствующий диффеоморфизм между погруженными однородными расслоениями с базами  $B \subset \underline{\mathfrak{G}}/G$  и  $\tilde{B} \subset \underline{\mathfrak{G}}/(\underline{G} \cap \underline{G'})$  и общим слоевым пространством  $\underline{\mathfrak{G}}/\mathfrak{H}$ , определяемые, соответственно,  $j$ - и  $j'$ -инцидентностью. Из 1) следует, в силу теоремы 6.1, что во втором из них определяется линейная связность, индуцируемая некоторым разложением  $\underline{\mathfrak{G}} = \underline{G} \cap \underline{G'} + M$ . Указанный диффеоморфизм отображает эту связность в первое однородное расслоение  $E$ . Теорема доказана.

Линейная связность в погруженном расслоении  $E$ , о существовании которой утверждается в теореме, называется связностью, индуцированной в  $E$  заданным оснащением  $\varphi$  его базы  $B$  и заданным разложением (1) в алгебры Ли  $\underline{\mathfrak{G}}$ .

Ее частными случаями являются проективные или аффинные связности, индуцируемые оснащениями Э. Картана [34] и А. П. Нордена [23] в грасмановых расслоениях, базами которых являются многообразия касательных  $m$ -мерных плоскостей  $m$ -мерной поверхности проективного пространства  $P_n$ . Она обобщает также аффинную связность, которая индуцируется оснащением О. Гальвани [38]  $m$ -мерного грасманова подмногообразия  $m$ -мерных плоскостей аффинного пространства  $A_n$ .

Например, оснащение Картана охватывается более общим оснащением произвольного грасманова подмногообразия плоскостей в  $P_n$ , рассматриваемым в следующем примере. (Аналогичные весьма близкие обобщения можно указать также для оснащений Нордена и Гальвани; см. [16]).

Пример. Пусть дано грасманово расслоение  $E$ , слоевым пространством  $\underline{\mathfrak{G}}/\mathfrak{H}$  которого является проективное пространство  $P_n$  с проективной группой движений  $\underline{\mathfrak{G}}$ , а базовым пространством  $\underline{\mathfrak{G}}/G$  — грасманово многообразие  $m$ -мерных плоскостей в  $P_n$ . Пусть  $\underline{\mathfrak{G}}/G'$  является грасмановым многообразием  $(n - m - 1)$ -мерных плоскостей в  $P_n$ . Тогда  $\underline{\mathfrak{G}}/(\underline{G} \cap \underline{G'})$ , где  $G$  и  $G'$  — стационарные подгруппы непересекающихся, соответственно,  $m$ - и  $(n - m - 1)$ -мерных плоскостей, является редуцированным (даже симметрическим) однородным пространством (см. примеры в 6.1). теперь еще Пусть база  $B \subset \underline{\mathfrak{G}}/G$  грасманова расслоения  $E$  оснащается с помощью  $\underline{\mathfrak{G}}/G'$ .

Орбита  $(n - m - 1)$ -инцидентности в  $\mathcal{G}/\mathfrak{h} = P_n$  относительно  $G$  как многообразие точек в  $P_n$ , принадлежащих некоторой  $m$ -плоскости  $x$ , является в то же время орбитой  $(n - m - 1)$ -инцидентности в  $P_n$  также относительно  $G \cap G'$ . Поэтому удовлетворяются все условия теоремы, и заданное оснащение  $\varphi: B$  в  $\mathcal{G}/G'$ , вместе с разложением (1) алгебры Ли проективной группы  $\mathcal{G}$ , рассмотренным в примерах п. 6.1, индуцирует в  $E$  некоторую связность. Геометрическое истолкование соответствующего параллельного перенесения на бесконечно близкий слой дано в примерах п. 6.1.

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Акивис М. А., Конформно-дифференциальная геометрия. Итоги науки. Геометрия 1963, М., Инст. научн. инф. АН СССР, 1965, 108—137
2. Вагнер В. В., Теория составного многообразия. Тр. семинара по вект. и тенз. анализу, 1950, 8, 11—72
3. Ведерников В. И., Обобщение метода нормализации А. П. Нордена на случай расслоенного пространства. Уч. зап. Казанск. ун-та. 1963, 123, № 1, 3—23
4. Гейдельман Р. М., Лумисте Ю. Г., Геометрия семейств  $m$ -мерных плоскостей в  $n$ -мерных пространствах. Тр. 4-го Всес. матем. съезда, 1961, т. 2, Л., 1964, 201—206
5. Дуничев К. И., Коровин В. И., Расслоение многообразий. Тр. 4-го Всес. матем. съезда, 1961, т. 2, Л., 1964, 206—209
6. Евтушик Л. Е., О нелинейных связностях. Успехи матем. наук, 1962, 17, № 2, 195—197
7. Карапетян С. Е., Проективно-дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей (I, II, III). Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-матем. н., 1963, 16, № 3, 3—22; 1963, 16, № 5, 3—22; 1964, 17, № 1, 3—21
8. Кованцов Н. И., Теория комплексов. Изд. Киевского ун-та, 1963
9. Лаптев Г. Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Тр. Моск. матем. о-ва, 1953, 2, 275—382
10. Лефшец С., Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М., 1961
11. Лихнерович А., Теория связностей в целом и группы голономии. М., 1960
12. Лумисте Ю. Г., К основаниям глобальной теории связностей. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1964, 150, 69—107
13. —, Связности в однородных расслоениях. Успехи матем. наук, 1965, 20, № 5, 263—265
14. —, Средняя поверхность конгруэнции плоскостей аффинного пространства. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1965, № 5, 86—98
15. —, Инвариантные оснащения конгруэнции плоскостей аффинного пространства. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1965, № 6, 93—102
16. —, Индуцированные связности в погруженных проективных или аффинных расслоениях. Tartu Ülikooli toimetised. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, 177, 6—41
17. —, Связности в однородных расслоениях. Матем. сб., 1966, 69, 419—454
18. Малаховский В. С., Невырожденные конгруэнции кривых второго порядка в трехмерном проективном пространстве. Тр. Томского ун-та, 1963, 168, 43—53

19. —, Поля геометрических объектов на многообразии квадратичных элементов. Тр. Томского ун-та, 1964, 176, 11—19
20. Милнор Дж., Теория Морса. М., 1965
21. Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений. М.—Л., 1949
22. Номидзу К., Группы Ли и дифференциальная геометрия. М., 1960
23. Норден А. П., Пространства аффинной связности. М.—Л., 1950
24. Понтрягин Л. С., Непрерывные группы. М., 1954
25. Де Рам Ж., Дифференцируемые многообразия. М., 1956
26. Рашевский П. К., О геометрии однородных пространств. Тр. семинара по вект. и тенз. анализу, 1952, 9, 49—74
27. Розенфельд Б. А., Неевклидовы геометрии. М., 1955
28. Стийрод Н., Топология косых произведений. М., 1953
29. Фиников С. П., Теория пар конгруэнции. М., 1956
30. Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М., 1964
31. Ходж В., Пидо В., Методы алгебраической геометрии, т. I, и II, М., 1954
32. Шевалле К., Теория групп Ли, I, М., 1948
33. Bortolotti E., Connessioni nelle varietà luogo di spazi. Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 1933, 3, 81—89
34. Cartan E., Les espaces à connexion projective. Тр. семинара по вект. и тенз. анализу, 1937, 4, 147—159
35. Senkl B., Les variétés de König généralisées. Чехосл. матем. ж., 1964, 14, № 1, 1—21
36. Ehresmann C., Espaces fibrés de structures comparables. C. r. Acad. Sci., 1942, 214, 144—147; 1943, 216, 628—630
37. —, Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable. Colloque de Topologie (Bruxelles, 1950), Paris, 1951, 29—55
38. Galvani O., La réalisation des connexions ponctuelles affines et la géométrie des groupes de Lie. J. math. pures et appl., 1946, 25, 209—239
39. Gleason A. M., Spaces with a compact Lie group of transformation. Proc. Amer. Math. Soc., 1950, 1, 35—43
40. Goetz A., On induced connections. Fundam. math., 1964, 55, № 2, 149—174
41. Greub W., Zur Theorie der linearen Übertragungen. Suomalais tiedekat. toimituks., 1964. Sar. AI, № 346
42. Kobayashi S., Theory of connections. Ann. mat.pura ed appl., 1957, 43, 119—194
43. —, Nomizu K., Foundations of differential geometry. Vol. I. New York—London, 1963
44. Nomizu K., Recent developments in the theory of connections and holonomy groups. New York—London, 1961
45. Schmidt J., Zum Begriff des linearen Zusammenhanges. Monatsh. Math., 1964, 68, № 4, 326—367
46. Severi F., Intorno ai punti doppi impropri di una superficie generale dello spazio a 4 dimensioni e a' suoi punti tripli apparenti. Rend. Circ. Mat. Palermo, 1901, 15, 33—51
47. Speranza F., Determinazione di connessioni prospettive. Boll. Unione mat. ital., 1963, 18, № 2, 101—107
48. Wagner V., Differential geometry of the family of  $R_k$ 's in  $R_n$  and of the family of totally geodesic  $S_{k-1}$ 's in  $S_{n-1}$  of positive curvature. Матем. сб., 1942, 10 (52), 3, 165—212