УДК 514.763.3

ПОДМНОГООБРАЗИЯ В ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЯХ, НАДЕЛЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ СТРУКТУРАМИ. III. N (σ)-АНТИИНВАРИАНТНЫЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ В МНОГООБРАЗИИ ПОЧТИ КОНТАКТНОЙ СТРУКТУРЫ

Н. Д. Поляков

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа является продолжением статей Н. М. Остиану, Н. Д. Полякова [13], Н. М. Остиану, Р. Ф. Домбровского, Н. Д. Полякова [12], опубликованных в «Проблемах геометрии» (Тома 11, 13). В данной работе приводятся результаты исследований, приведенных автором и другими исследователями, относящихся к изучению $N(\sigma)$-антиинвариантных и антиинвариантных подмногообразий в многообразии почти контактной структуры и в многообразии метрической почти контактной структуры.

Понятие антиинвариантных подмногообразий было введено для многообразия метрической почти контактной структуры. Понятие $N(\sigma)$-антиинвариантного подмногообразия, введенное в настоящей работе, обобщает известное понятие антиинвариантного подмногообразия (см. § 2).

Изложение осуществляется единым инвариантным аналитическим методом, основанным на теории полей геометрических объектов [1], [3], [4].

Статья состоит из пяти параграфов. §1 носит вводный характер. § 2 посвящается исследованию $N(\sigma)$-антиинвариантных подмногообразий в многообразии почти контактной структуры. В § 3 рассматриваются некоторые вопросы геометрии антиинвариантных подмногообразий в многообразии метрической контактной структуры §§ 4—5, носящие обзорный характер, посвящены антиинвариантным подмногообразиям в многообразии Сасаки $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$.

На протяжении всего изложения индексы будут приобретать следующие значения: $I, K, L, \ldots = 1, 2, \ldots, n+1$; $a, b, c, \ldots = 1, 2, \ldots, m$; $\sigma, \tau, \rho, \ldots = m+1, m+2, \ldots, n+1$; $A, B,$

$C, \ldots = m+1,\ m+2, \ldots,\ n+1,\ n+2;\ P,\ Q,\ R, \ldots = 1,\ 2, \ldots,\ m,\ n+2;\ p,\ q,\ r, \ldots = 1,\ 2, \ldots,\ m-1;\ \alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1, \ldots, = m+1, \ldots,\ m+ +p;\ \underline{\alpha_2},\ \underline{\beta_2},\ \gamma_2, \ldots = m+p+1, \ldots,\ n+1;\ u,\ v, \ldots = 2m+2, \ldots,\ n+ +1;\ \bar{\sigma},\ \bar{\rho}, \ldots = m,\ m+1, \ldots,\ n+1.$

Автор выражает глубокую благодарность Н. М. Остиану за помощь, оказанную при написании настоящей статьи.

§ 1. ПОДМНОГООБРАЗИЯ M_m, ПОГРУЖЕННЫЕ В ПОЧТИ КОНТАКТНОЕ МНОГООБРАЗИЕ

1. Пусть задано $(n+1)$-мерное гладкое дифференцируемое многообразие M_{n+1}. Локальные координаты текущей точки x некоторой окрестности U обозначим x^I. Над окрестностью U построим касательное расслоение $T(M_{n+1})$ и будем считать, что в каждой касательной плоскости $T_x(M_{n+1})$ введен векторный репер $\vec{e}_I$.

Над каждой окрестностью U введем формы

$$\omega^I = x^I_K dx^K,$$

которые будем называть структурными формами многообразия M_{n+1}. Известно [5], что при помощи форм ω^I над окрестностью U можно построить последовательность форм ω^I_K, $\omega^I_{K_1K_2}, \ldots$, обладающих расслоенной структурой [4] по отношению к формам ω^I.

Будем считать, что исследуемое многообразие M_{n+1} $(n=2q)$ оснащено почти контактной структурой со структурными объектами φ, ξ, η (см. [1], гл. III). Компоненты структурных объектов удовлетворяют следующим конечным соотношениям [1], [27]:

$$\varphi^I_K \varphi^K_L = -\delta^I_L + \xi^I \eta_L,$$
$$\varphi^I_K \xi^K = 0, \quad \varphi^I_K \eta_I = 0, \quad \xi^I \eta_I = 1. \tag{1.1}$$

Дифференциальные уравнения полей геометрических объектов φ, ξ, η, соответственно, имеют следующий вид:

$$d\varphi^I_K - \varphi^I_L \omega^L_K + \varphi^L_K \omega^I_L = \varphi^I_{KL} \omega^L, \tag{1.2}$$
$$d\xi^I + \xi^L \omega^I_L = \xi^I_L \omega^L, \tag{1.3}$$
$$d\eta_I - \eta_L \omega^L_I = \eta_{IL} \omega^L. \tag{1.4}$$

Если же на M_{n+1} введена положительно определенная риманова метрика G такая, что

$$G_{IK} \varphi^I_L \varphi^K_M = G_{LM} - \eta_L \eta_M,$$
$$G_{LK} \xi^K = \eta_L, \tag{1.5}$$

то многообразие M_{n+1} со структурными объектами φ, ξ, η, G называется многообразием метрической почти контактной структуры [1].

2. В многообразии M_{n+1} почти контактной структуры $(\varphi\xi\eta)$

зададим m-мерное подмногообразие M_m параметрическими дифференциальными уравнениями вида:

$$\omega^I = \Lambda^I_a \theta^a, \qquad (1.6)$$

где θ^a — структурные формы многообразия параметров S_m (см. [13], § 2, п. 1). В каждой точке $x \in M_m$ касательная плоскость $T_x(M_m)$ поверхности M_m определяется системой m-линейно независимых векторов

$$\vec{\Lambda}_a = \Lambda^I_a \vec{e}_I. \qquad (1.7)$$

Функции $\{\Lambda^I_a\}$ образуют фундаментальный объект первого порядка подмногообразия M_m, присоединенный к группе $D^1_{n+1} \times GL(m, R)$. Поле фундаментального объекта $\{\Lambda^I_a\}$ определяется следующими дифференциальными уравнениями:

$$d\Lambda^I_a - \Lambda^I_b \overline{\theta}_a{}^b + \Lambda^K_a \omega^I_K = \Lambda^I_{ab} \theta^b, \qquad (1.8)$$

где $\overline{\theta}_a{}^b$ — инвариантные формы группы $GL(m, R)$.

Оснастим поверхность M_m в многообразии M_{n+1} полем нормалей, т. е. в каждой точке $x \in M_m$ зададим $(n-m+1)$-мерную плоскость $N_x(M_m)$, проходящую через эту точку, но не имеющую с касательной плоскостью $T_x(M_m)$ общих направлений в точке x.

Плоскость $N_x(M_m)$ в каждой точке $x \in M_m$ определим системой $(n-m+1)$-линейно независимых векторов

$$\vec{N}_\sigma = N^I_\sigma \vec{e}_I. \qquad (1.9)$$

Дифференциальные уравнения оснащающего поля имеют вид:

$$dN^I_\sigma - N^I_\tau \overline{\vartheta}^\tau_\sigma + N^K_\sigma \omega^I_K = N^I_{\sigma a} \theta^a, \qquad (1.10)$$

где $\overline{\vartheta}^\tau_\sigma$ — инвариантные формы группы $GL(n-m+1, R)$.

Поле $N_x(M_m)$ будем называть нормально оснащающим полем.

Матрица, построенная из компонент $\{\Lambda\}$ и $\{N\}$, имеет ранг $(n+1)$ и позволяет ввести «обращенные» объекты $\{\overset{*}{\Lambda}\}$ и $\{\overset{*}{N}\}$ такие, что выполняются следующие соотношения (см. [13], § 5):

$$\begin{gathered} \Lambda^I_a \overset{*}{\Lambda}{}^b_I = \delta_a{}^b, \quad \Lambda^I_a \overset{*}{N}{}^\sigma_I = 0, \\ N^I_\sigma \overset{*}{\Lambda}{}^a_I = 0, \quad N^I_\sigma \overset{*}{N}{}^\rho_I = \delta^\rho_\sigma, \\ \Lambda^K_a \overset{*}{\Lambda}{}^a_I + N^K_\sigma \overset{*}{N}{}^\sigma_I = \delta^K_I. \end{gathered} \qquad (1.11)$$

3. Н. М. Остиану в соавторстве с автором настоящей работы в статье [13] доказана следующая теорема.

Т е о р е м а (Основная теорема) (см. [13], § 5). Если поверхность M_m, погруженная в дифференцируемое многообразие M_{n+1} почти контактной структуры $(\varphi \xi \eta)$, нормально оснащена полем плоскостей $N_x(M_m)$, натянутых на векторы $\vec{N}_\sigma$, то на M_m естественным образом возникает $(f \xi \eta \rho)$-структура ранга m и коранга $(n-m+2)$.

Структурными объектами индуцированной $(f\xi\eta\rho)$-структуры на M_m являются следующие геометрические объекты:

$$f_b{}^a,\ u_b^A=\{u_b^\sigma,\ u_b^{(n+2)}\},\quad V_B^a=\{V_\tau^a,\ V_{(n+2)}^a\},$$
$$\rho_B^A=\{\rho_\tau^\sigma,\ \rho_{(n+2)}^\sigma,\ \rho_\tau^{(n+2)},\ \rho_{(n+2)}^{(n+2)}=0\},$$

которые определяются из разложения векторов $\varphi\vec{\Lambda}_a$, $\varphi\vec{N}_\sigma$, $\vec{\xi}$ по базисным векторам $\{\vec{\Lambda}_a\vec{N}_\sigma\}$ в $T_x(M_{n+1})$:

$$\varphi\vec{\Lambda}_a=f_a{}^b\vec{\Lambda}_b+u_a^\tau\vec{N}_\tau, \tag{1.12}$$

$$\varphi\vec{N}_\sigma=-V_\sigma^b\vec{\Lambda}_b+\rho_\sigma^\tau\vec{N}_\tau, \tag{1.13}$$

$$\vec{\xi}=V_{(n+2)}^b\vec{\Lambda}_b-\rho_{(n+2)}^\tau\vec{N}_\tau, \tag{1.14}$$

а также по формулам:

$$u_b^{(n+2)}=\eta_I\Lambda_b^I, \tag{1.15}$$

$$\rho_\sigma^{(n+2)}=\eta_I N_c^I. \tag{1.16}$$

Очевидно, компоненты структурных объектов $f_b{}^a$, u_b^A, V_B^a, ρ_B^A удовлетворяют следующим конечным соотношениям (см. [13], § 5):

$$\begin{gathered}
f_a{}^b f_b{}^c=-\delta_a{}^c+V_A^c u_c^A,\\
f_a{}^b u_b^A=-\rho_B^A u_a^B,\\
f_a{}^b V_A^a=-\rho_A^B V_B^b,\\
\rho_A^B\rho_B^C=-\delta_A^C+V_A^a u_a^C.
\end{gathered} \tag{1.17}$$

4. Почти контактная структура на M_{n+1} также индуцирует $(f\xi\eta\rho)$-структуру в нормальном расслоении $N(M_m)$ поверхности M_m. Докажем следующую теорему.

Теорема. В нормальном расслоении $N(M_m)$ поверхности M_m, погруженной в почти контактное многообразие $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$, индуцируется $(f\xi\eta\rho)$-структура ранга $(n-m+1)$ и коранга $(m+1)$.

Для доказательства этой теоремы введем следующие обозначения: $V_\sigma^P=\{V_\sigma^a,\ \rho_\sigma^{(n+2)}\}$, $u_Q^\tau=\{u_b^\tau,\ -\rho_{(n+2)}^\tau\}$,

$$f_Q^P=\left\|\begin{matrix} f_b{}^a & -u_b^{(n+2)}\\ V_{(n+2)}^a & 0\end{matrix}\right\|.$$

При таких обозначениях конечные соотношения (1.17) примут следующий вид:

$$\rho_\sigma^\tau\rho_\tau^\rho=-\delta_\sigma^\rho+V_\sigma^P u_P^\rho,\quad \rho_\sigma^\tau V_\tau^P=-f_Q^P V_\sigma^Q,\quad \rho_\sigma^\tau u_Q^\sigma=-f_Q^P u_P^\tau, \tag{1.18}$$
$$f_Q^R f_R^P=-\delta_Q^P+V_\sigma^P u_Q^\sigma,$$

из которых и следует справедливость вышеуказанной теоремы.

В случае, если объемлющее пространство M_{n+1} снабжено метрической почти контактной структурой $(\varphi\xi\eta G)$, то на M_m индуцируется метрическая $(f\xi\eta\rho)$-структура (см. 13, § 5) со структурными объектами f_b^a, u_b^A, V_B^a, ρ_B^A, а также объектами:

$$g_{ab}=G_{IK}\Lambda_a^I\Lambda_b^K, \tag{1.19}$$

$$g_{a\sigma}=G_{IK}\Lambda_a^I N_\sigma^K, \tag{1.20}$$

$$g_{\sigma\tau}=G_{IK}N_\sigma^I N_\tau^K. \tag{1.21}$$

Структурные объекты метрической $(f\xi\eta\rho)$-структуры удовлетворяют соотношениям (1.17), а также конечным соотношениям:

$$\begin{aligned}
&1.\ g_{ac}f_b{}^c+g_{bc}f_a{}^c+g_{a\sigma}u_b^\sigma+g_{b\sigma}u_a^\sigma=0,\\
&2.\ g_{\sigma\tau}\rho_\rho^\sigma+g_{\rho\sigma}\rho_\tau^\sigma+g_{\tau b}V_\rho^b+g_{\rho b}V_\tau^b=0,\\
&3.\ g_{cd}f_a{}^c f_b{}^d+g_{d\sigma}f_b{}^d u_a^\sigma+g_{c\rho}f_a{}^c u_b^\rho+\\
&\quad +g_{\sigma\tau}u_a^\sigma u_b^\tau=g_{ab}-u_a^{(n+2)}u_b^{(n+2)},\\
&4.\ g_{\sigma\rho}\rho_\tau^\sigma\rho_\xi^\rho-g_{b\sigma}\rho_\xi^\sigma V_\tau^b-g_{b\sigma}\rho_\tau^\sigma V_\xi^b+\\
&\quad +g_{bc}V_\tau^b V_\xi^c=g_{\tau\xi}-\rho_\tau^{(n+2)}\rho_\xi^{(n+2)},\\
&5.\ g_{ab}V_{(n+2)}^a-g_{b\sigma}\rho_{(n+2)}^\sigma-u_b^{(n+2)}=0,\\
&6.\ g_{ab}V_\tau^b-g_{\tau\sigma}u_a^\sigma-g_{a\sigma}\rho_\tau^\sigma-g_{b\tau}f_a{}^b=0,\\
&7.\ \rho_\sigma^{(n+2)}=g_{a\sigma}V_{(n+2)}^a-g_{\sigma\tau}\rho_{(n+2)}^\tau.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

В нормальном расслоении $N(M_m)$ поверхности M_m, погруженной в метрическое почти контактное многообразие M_{n+1}, также индуцируется метрическая $(f\xi\eta\rho)$-структура. Структурными объектами этой структуры являются следующие объекты: V_σ^P, u_Q^τ, f_Q^P, ρ_τ^σ, g_{ab}, $g_{a\sigma}$, $g_{\sigma\tau}$.

§ 2. $N(\sigma)$-АНТИИНВАРИАНТНЫЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ В ПОЧТИ КОНТАКТНОМ МНОГООБРАЗИИ

1. В дальнейшем будем рассматривать подмногообразие M_m в M_{n+1} почти контактной структуры $(\varphi\xi\eta)$ такое, что $m\leqslant\leqslant\frac{n}{2}+1$. В этом случае поверхность M_m допускает оснащения полями σ-параметрических пучков $N(\sigma)$, плоскостей N_x, размерности $(n-m+1)$. Размерность p оси каждого пучка равна m или $(m-1)$ и $\sigma=n-p$.

Понятие антиинвариантных поверхностей было введено в работах [24], [34] для метрических почти контактных многообразий.

Определение 1 [24], [34]. Поверхность M_m, вложенная в многообразие M_{n+1} метрической почти контактной структуры $(\varphi\xi\eta G)$, называется антиинвариантной поверхностью, если образ касательной плоскости $T_x(M_m)$, полученный под действием структурного аффинора φ, в каждой точке $x \in M_m$ принадлежит ортогональному дополнению $T_x(M_m)^{\perp}$ плоскости $T_x(M_m)$.

В дальнейшем поле нормально оснащающих плоскостей $T_x(M_m)^{\perp}$ поверхности M_m, ортогональных касательной плоскости $T_x(M_m)$, будем называть полем ортогонально оснащающих плоскостей. Расслоение ортогонально оснащающих плоскостей поверхности M_m будем обозначать через $N(M_m)^{\perp}$.

Замечание 1. В ортогонально оснащающем расслоении антиинвариантной поверхности M_m естественно выделяется подрасслоение с p-мерными слоями $\varphi T_x(M_m)$.

Понятие антиинвариантной поверхности допускает обобщение; во-первых, обобщение, когда многообразие M_{n+1} снабжено неметрической почти контактной структурой, и, во-вторых, когда поверхность M_m нормально оснащена пучком нормалей $N(\sigma)$ с общей осью $\varphi T_x(M_m)$.

Определение 2. Подмногообразие M_m в многообразии почти контактной структуры $(\varphi\xi\eta)$ будем называть подмногообразием, антиинвариантным относительно поля пучков нормально оснащающих плоскостей $N(\sigma)$, если образ касательной плоскости $T_x(M_m)$, полученной под действием структурного аффинора φ, совпадает с осью пучка нормалей $N_x(\sigma)$.

Такие подмногообразия в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ будем называть $N(\sigma)$-антиинвариантными подмногообразиями. В этом случае поверхность M_m оснащена полями σ-параметрических пучков $N(\sigma)$ с общей осью $\varphi T_x(M_m)$.

Если в многообразии M_{n+1} введена метрика G, согласованная с $(\varphi\xi\eta)$-структурой, т. е. если многообразие M_{n+1} является метрической почти контактной структурой, то относительно этой метрики $\varphi T_x(M_m)$ ортогональна $T_x(M_m)$. При этом ортогонально оснащающая плоскость $T_x(M_m)^{\perp}$ в каждой точке $x \in M_m$ принадлежит пучку нормалей $N_x(\sigma)$, т. е. содержит его ось. Следовательно, поверхность M_m антиинвариантная в смысле определения 1. Таким образом, понятие $N(\sigma)$-антиинвариантности обобщает понятие антиинвариантности.

Определение 2 можно обобщить на случай распределения линейных элементов в многообразии почти контактной структуры, т. е. можно ввести понятие $N(\sigma)$-антиинвариантных распределений.

Определение 3. Распределение m-мерных линейных элементов Λ в многообразии почти контактной структуры $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ $(m \leqslant \frac{n}{2}+1)$ будем называть распределением, антиинвариантным относительно поля пучков нормально оснащающих плоскостей $N(\sigma)$ ($N(\sigma)$-антиинвариантным распределением), если образ элемента Λ_x, полученный под действием аффинора φ, совпадает с осью пучка нормалей $N_x(\sigma)$.

Из определения 2 следует, что размерность $N(\sigma)$ антиинвариантной поверхности M_m в M_{n+1} не превышает $\frac{n}{2}+1$, а ось пучка нормалей $N_x(\sigma)$ в каждой точке $x \in M_m$, всегда принадлежит элементу распределения η.

Известно, что под действием структурного аффинора φ касательная плоскость $T_x(M_m)$ поверхности M_m преобразуется в плоскость $\varphi T_x(M_m)$ размерности m или $(m+1)$, причем размерность $\varphi T_x(M_m)$ равна $(m-1)$ тогда и только тогда, когда структурный вектор $\vec{\xi}_x$ принадлежит плоскости $T_x(M_m)$ в каждой точке $x \in M_m$. Следовательно, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Если размерность $N(\sigma)$-антиинвариантной поверхности M_m в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ максимальна, т. е. $m=\frac{n}{2}+1$, то в каждой точке $x \in M_m$ структурный вектор $\vec{\xi}_x$ лежит в касательной плоскости $T_x(M_m)$.

Аналогичное утверждение для антиинвариантной поверхности M_m в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$ доказано в работе [37].

Замечание 2. В случае, когда $m=\frac{n}{2}+1$, в каждой точке $x \in M_m$ пучок нормально оснащающих плоскостей $N_x(\sigma)$ вырождается в плоскость $\varphi T_x(M_m)$, т. е. $\sigma=0$.

Замечание 3. В случае, когда $m=\frac{n}{2}+1$, в метрическом почти контактном многообразии $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$ понятия $N(\sigma)$-антиинвариантной поверхности и антиинвариантной поверхности совпадают.

Следовательно, в случае $m=\frac{n}{2}+1$, в метрическом почти контактном многообразии $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$ геометрия $N(\sigma)$-антиинвариантных поверхностей и антиинвариантных поверхностей совпадает.

Утверждение 2. В $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ любое одномерное подмногообразие, касательный вектор которого не коллинеарен вектору $\vec{\xi}$, $N(\sigma)$-антиинвариантно.

Действительно, в силу свойств структурного аффинора φ, вектор $\varphi\vec{X}$ не коллинеарен вектору $\vec{X}$ для любого вектора $\vec{X} \in T_x(M_{n+1})$, отличного от структурного вектора $\vec{\xi}$. Следовательно, одномерное подпространство, натянутое на вектор $\varphi\vec{X}$, можно принять за ось пучка n-мерных нормалей $N_x(\sigma)$. В этом случае $\sigma=n-1$.

2. С точки зрения взаимного расположения касательной плоскости $T_x(M_m)$, структурного вектора $\vec{\xi}_x$ и ковектора η_x в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$, различаем три типа поверхностей M_m:

1. $T_x(M_m) \not\subset \eta_x$ и $\vec{\xi}_x \notin T_x(M_m)$;
2. $\vec{\xi}_x \in T_x(M_m)$;
3. $T_x(M_m) \subset \eta_x$.

Замечание 1. Поверхности первого и второго типов являются касательно r-оснащенными [2].

Роль касательно оснащающего пространства играет $(m-1)$-мерная плоскость λ_x — плоскость пересечения касательной плоскости $T_x(M_m)$ с элементом распределения η_x.

Замечание 2. Из формул (1.14)—(1.15) следует, что для поверхностей типа 1 справедливо:

$$u_a^{(n+2)} \neq 0, \quad \rho^{\sigma}_{,(n+2)} \neq 0; \tag{2.1}$$

для поверхностей типа 2:

$$\rho^{\sigma}_{(n+2)} = 0, \tag{2.2}$$

а для поверхностей типа 3:

$$u_a^{(n+2)} = 0. \tag{2.3}$$

Замечание 3. Если поверхность M_m — типа 2, то σ-параметрический пучок нормальных плоскостей $N_x(\sigma)$ поверхности M_m содержит плоскость, проходящую через структурный вектор $\vec{\xi}_x$, а также плоскость, принадлежащую гиперплоскости η_x. Если поверхность M_m — типа 2, то пучок $N_x(\sigma)$ содержит плоскость N_x, принадлежащую плоскости η_x. Если же поверхность M_m — типа 3, то пучок $N_x(\sigma)$ содержит плоскость, проходящую через вектор $\vec{\xi}_x$.

Замечание 4. Размерность оси пучка нормально оснащающих плоскостей $N(\sigma)$ поверхности M_m равна m для поверхностей типов 1 и 3 и равна $(m-1)$ для поверхностей типа 2.

Выясним вопрос о существовании $N(\sigma)$-антиинвариантных подмногообразий M_m в многообразии почти контактной структуры $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ для всех трех типов поверхностей. Для этого введем понятие $N(\sigma)$-антиинвариантных подмногообразий в многообразии почти комплексной структуры как обобщение известного понятия антиинвариантного подмногообразия в почти эрмитовом многообразии [21], [32], [34]—[36].

Пусть M_m — многообразие почти комплексной структуры со структурным объектом F $(F^2=-1)$ [1].

Определение 4. Подмногообразие M_m в многообразии почти комплексной структуры M_n $(n \geqslant 2m)$ будем называть подмногообразием, антиинвариантным относительно поля пучка нормально оснащающих плоскостей $N_x(\sigma)$ ($N(\sigma)$-антиинвариантным подмногообразием), если образ касательной плоскости $T_x(M_m)$, полученный под действием аффинора F, совпадает с осью пучка нормалей $N(\sigma)$.

Введем понятие $N(\sigma)$-антиинвариантных распределений в многообразии почти комплексной структуры.

Определение 5. Распределение m-мерных линейных элементов Λ в многообразии почти комплексной структуры M_n ($n \geqslant 2m$) будем называть распределением, антиинвариантным относительно поля пучка нормально оснащающих плоскостей $N(\sigma)$ ($N(\sigma)$-антиинвариантным распределением), если образ элемента Λ_x, полученный под действием аффинора F, совпадает с осью пучка нормалей $N(\sigma)$.

Известно [32]—[36], что в многообразии почти эрмитовой структуры существуют антиинвариантные подмногообразия, однако их размерность не может превышать половины размерности объемлющего пространства. Аналогичный факт имеет место и для $N(\sigma)$-антиинвариантных подмногообразий M_m, а также $N(\sigma)$- антиинвариантных распределений в многообразии почти комплексной структуры M_n. Действительно, так как

$$\dim T_x(M_m) = \dim FT_x(M_m),$$

то в многообразии почти комплексной структуры M_n при $n \geqslant 2m$ можно найти $N(\sigma)$-антиинвариантные поверхности..

Используя это утверждение, докажем, что для всех трех типов поверхностей M_m в многообразии почти контактной структуры $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ существуют $N(\sigma)$-антиинвариантные подмногообразия M_m.

Поле структурного ковектора η почти контактной структуры в M_{n+1} определяет распределение гиперплоскостных элементов η. Доказано [15]—[16], что аффинор φ действует на векторы, принадлежащие элементам распределения η, как аффинор почти комплексной структуры, т. е. для любого вектора X из η справедливо $\varphi^2\vec{X} = -\vec{X}$.

Пусть поверхность M_m — типа 3, т. е. ее касательная плоскость $T_x(M_m)$ содержится в элементе η_x распределения η.

В этом случае существование $N(\sigma)$-антиинвариантных поверхностей типа 3 следует непосредственно из существования $N(\sigma)$-антиинвариантных поверхностей в многообразии почти комплексной структуры.

Пусть поверхность M_m — типа 2. В этом случае в каждой точке $x \in M_m$ плоскость $T_x(M_m)$ пересекается с плоскостью η_x распределения η по $(m-1)$-мерной плоскости λ_x. Следовательно, для поверхностей второго типа на многообразии $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ выделяется распределение λ $(m-1)$-мерных плоскостей λ_x, причем в каждой точке x $\lambda_x \subset \eta_x$. В силу свойств аффинора φ (см. [16]), образ касательной плоскости $T_x(M_m)$ поверхности M_m, полученный под действием аффинора φ, совпадает с образом плоскости λ_x, т. е.

$$\varphi T_x(M_m) = \varphi\lambda_x.$$

Следовательно, поверхность M_m второго типа в многообразии M_{n+1} почти контактной структуры $N(\sigma)$-антиинвариантна тогда и только тогда, когда распределение плоскостей λ_x $N(\sigma)$-

антиинвариантно на распределении η почти комплексной структуры.

Пусть поверхность M_m — типа 1. Для таких поверхностей справедлива теорема.

Теорема 1. Поверхность M_m $(2m \leqslant n)$ первого типа $N(\sigma)$-антиинвариантна тогда и только тогда, когда в каждой точке $x \in M_m$ распределение плоскостей $\lambda_x = \eta_x \cap T_x(M_m)$ — $N(\sigma)$-антиинвариантна относительно почти комплексной структуры, действующей в η, и плоскость α_x, натянутая на плоскость $\varphi\lambda_x$ и вектор $\vec{\xi}_x$, не пересекается с касательной плоскостью $T_x(M_m)$.

Доказательство. 1) *Необходимость.* Пусть в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ поверхность M_m первого типа и $N(\sigma)$-антиинвариантна, а следовательно, плоскость $\varphi T_x(M_m)$ является осью пучка нормальных плоскостей $N_x(\sigma)$ и $\lambda_x \cap \varphi\lambda_x = \{x\}$. Это означает, что распределение λ плоскостей λ_x $N(\sigma)$-антиинвариантно относительно почти комплексной структуры, действующей в распределении η.

Так как M_m — поверхность первого типа, то в пучке нормальных плоскостей $N(\sigma)$ имеется плоскость $N_x(M_m)$, которая содержит структурный вектор $\vec{\xi}_x$. Очевидно, что плоскость $\varphi\lambda_x$ является гиперплоскостью плоскости $\varphi T_x(M_m)$, а плоскость α_x, натянутая на плоскость $\varphi\lambda_x$ и вектор $\vec{\xi}_x$, является подплоскостью нормальной плоскости $N_x(M_m)$ $N(\sigma)$-антиинвариантной поверхности M_m. Следовательно, α_x не имеет общих направлений с касательной плоскостью $T_x(M_m)$ поверхности M_m.

2) *Достаточность.* Пусть в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ для некоторой поверхности M_m первого типа $(2m \leqslant n)$ выполнены условия: 1) распределение плоскостей $\lambda_x = \eta_x \cap T_x(M_m)$ — $N(\sigma)$-антиинвариантна относительно почти комплексной структуры, действующей в η; 2) в каждой точке $x \in M_m$ плоскость α_x, натянутая на плоскость $\varphi\lambda_x$ и вектор $\vec{\xi}_x$, не пересекается с касательной плоскостью $T_x(M_m)$. Докажем, что при выполнении вышеуказанных условий поверхность M_m является $N(\sigma)$-антиинвариантной поверхностью.

Так как распределение плоскостей λ_x $N(\sigma)$-антиинвариантно относительно почти комплексной структуры, действующей в η, то плоскости λ_x и $\varphi\lambda_x$ не имеют общих направлений, т. е. $\lambda_x \cap \varphi\lambda_x = \{x\}$. Следовательно, плоскости $T_x(M_m)$ и $\varphi T_x(M_m)$ могут пересекаться только по одномерному подпространству.

Плоскости $T_x(M_m)$ и $\varphi T_x(M_m)$ пересекутся, если в касательной плоскости поверхности M_m существует вектор $\vec{X}$ такой, что его образ, полученный под действием аффинора φ, принадлежит плоскости λ_x, т. е. $\varphi\vec{X} \in \lambda_x$. Предположим, что в $T_x(M_m)$ существует вектор $\vec{X}$ такой, что $\varphi\vec{X} \in \lambda_x$. Проведем двумерную плоскость β_x через векторы $\vec{\xi}_x$ и $\vec{X}_x$. Известно, что в M_{n+1} почти контактной структуры образ двумерной плоскости β, проходящий через структурный вектор $\vec{\xi}_x$, преобразуется в образ вектора $\vec{Y}_x$, определяющего прямую пересечения t двумерной плоскости β_x с η_x,

В силу сделанного предположения, что $\varphi\vec{X}\in\lambda_x$, следует, что $\varphi\vec{Y}\in\lambda_x$. Последнее означает, что прямая t принадлежит плоскости $\varphi\lambda_x$. Таким образом, двумерная плоскость β_x пересекается с $\varphi\lambda_x$ по прямой t. Очевидно, что плоскость β_x есть подплоскость m-мерной плоскости α_x. Из этого следует, что плоскости α_x и $T_x(M_m)$ пересекаются по некоторой прямой, определенной вектором $\vec{X}$. А это противоречит условию. Значит, наше допущение неверно.

Итак, мы доказали, что плоскости $\varphi T_x(M_m)$ и $T_x(M_m)$ не имеют общих направлений. Поэтому подпространство $\varphi T_x(M_m)$ можно принять за ось пучка $(n-m+1)$-мерных нормалей $N_x(\sigma)$, относительно которого поверхность M_m является $N(\sigma)$-антиинвариантной.

3. Выведем аналитические условия $N(\sigma)$-антиинвариантности поверхности M_m в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$. Пусть $N(\sigma)$-антиинвариантная поверхность M_m оснащена полем пучка плоскостей $N(\sigma)$ и в каждой точке $x\in M_m$ осью пучка $N_x(\sigma)$ является плоскость $\varphi T_x(M_m)$, т. е. плоскость $\varphi T_x(M_m)$ принадлежит каждой плоскости $N_x(M_m)$ пучка $N_x(\sigma)$.

Пусть векторы $\vec{N}_\sigma$ натягивают нормальную плоскость $N_x(M_m)\subset N_x(\sigma)$. Тогда в разложении векторов $\varphi\vec{\Lambda}_a$ по векторам $\vec{\Lambda}_a$ и $\vec{N}_\sigma$ (см. (1.12)) компоненты объекта $f_a{}^b$ тождественно обращаются в нуль:

$$f_a{}^b=0, \tag{2.4}$$

а формулы (1.12) принимают вид:

$$\varphi\vec{\Lambda}_a=u_a^\sigma\vec{N}_\sigma. \tag{2.5}$$

Таким образом, если поверхность M_m $N(\sigma)$-антиинвариантна, то выполняются условия (2.4).

Верно и обратное утверждение, т. е. если для некоторой нормально оснащенной поверхности M_m в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ выполняются условия (2.4), то поверхность M_m $N(\sigma)$-антиинвариантна. Действительно, при выполнении условий (2.4) из (2.5) следует, что плоскости $T_x(M_m)$ и $\varphi T_x(M_m)$ не имеют общих направлений. Следовательно, плоскость можно принять за ось σ-параметрического пучка нормально оснащающих плоскостей $N_x(\sigma)$.

Следовательно, доказана следующая теорема.

Теорема 2. Поверхность M_m в M_{n+1} почти контактной структуры $N(\sigma)$-антиинвариантна тогда и только тогда, когда выполняются условия (2.4).

4. Определим теперь дифференциально-геометрическую структуру в нормальном расслоении $N(M_m)$ $N(\sigma)$-инвариантной поверхности M_m в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$. Будем считать, что поверхность M_m оснащена полем плоскостей $N_x(M_m)$ таких, что в каждой точке $x\in M_m$ $N_x(M_m)\subset N_x(\sigma)$.

Поверхность M_m—$N(\sigma)$-антиинвариантна, а следовательно, выполняются условия (2.4), т. е. $f_a^{\ b}=0$. При выполнении условий (2.4) конечные соотношения (1.18) приобретают вид:

$$\rho_\sigma^\tau\rho_\tau^\rho=-\delta_\sigma^\rho+V_\sigma^P u_P^\tau,\quad \rho_\sigma^\tau V_\tau^a=-f^a_{(n+2)}V_\sigma^{(n+2)},\quad \rho_\sigma^\tau V_\tau^{(n+2)}=-f_a^{(n+2)}V_\sigma^a,$$
$$\rho_\sigma^\tau u_a^\sigma=-f_a^{(n+2)}u^\tau_{(n+2)},\quad \rho_\sigma^\tau u^\sigma_{(n+2)}=-f^a_{(n+2)}u_a^\tau,$$
$$f_a^{(n+2)}f^c_{(n+2)}=-\delta_a^{\ c}+V_\sigma^c u_a^\sigma,\quad V_\sigma^{(n+2)}u_a^\sigma=0,$$
$$V_\sigma^a u^\sigma_{(n+2)}=0,\quad f^a_{(n+2)}f_a^{(n+2)}=-1+V_\sigma^{(n+2)}u^\sigma_{(n+2)}. \tag{2.6}$$

Из соотношений (2.6) следует, что ранг матрицы $\|\rho_\tau^\sigma\|$ равен $(n-2m+1)$, а система векторов $\vec{V}_\sigma=V_\sigma^a\vec{\Lambda}_a$ линейно зависима и содержит максимальную линейно независимую подсистему векторов, состоящую из m векторов.

Очевидно, что в нормальном расслоении $N(M_m)$ $N(\sigma)$-антиинвариантной поверхности возникает $(f\xi\eta\rho)$-структура частного класса со структурными объектами ρ_τ^σ, V_τ^P, u_Q^σ, f_Q^P. В отличие от общего случая (см. § 1, п. 4), матрица $\|f_Q^P\|$ имеет вид:

$$\begin{Vmatrix} 0 & -u_a^{(n+2)} \\ V^b_{(n+2)} & 0 \end{Vmatrix},$$

а матрица $\|\rho_\tau^\sigma\|$ имеет ранг $(n-2m+1)$.

Таким образом, в нормальном расслоении $N(M_n)$ $N(\sigma)$-антиинвариантной поверхности индуцируется $(f\xi\eta\rho)$-структура ранга $(n-2m+1)$ и коранга 1.

В случае, когда $N(\sigma)$-антиинвариантная поверхность M_m — третьего типа и она оснащена плоскостями $N_x(M_m)$ из пучка $N(\sigma)$, проходящими через структурный вектор $\vec{\xi}_x$, $(f\xi\eta\rho)$-структура в нормальном расслоении вырождается в f-структуру ранга $(n-2m)$. Действительно, в этом случае

$$f_a^{(n+2)}=0,\quad f^a_{(n+2)}=0,$$

а соотношения (2.6) примут вид:

$$\rho_\sigma^\rho\rho_\rho^\tau=-\delta_\sigma^\tau+V_\sigma^P u_P^\tau,\quad \rho_\sigma^\rho V_\rho^P=0,\quad \rho_\sigma^\rho u_Q^\sigma=0,\quad V_\sigma^P u_Q^\sigma=\delta_Q^P. \tag{2.7}$$

Из соотношений (2.7) следует, что в нормальном расслоении $N(\sigma)$-антиинвариантной поверхности M_m в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ $\rho^3+\rho=0$ и ранг $\|\rho\|=n-2m$.

5. Предположим теперь, что индексы α_1, β_1, $\gamma_1,\ldots$ пробегают любые p значений из множества натуральных чисел $m+1$,

$m+2, \ldots, n+1$, а индексы $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \ldots$ пробегают остальные $(n-m-p+1)$-значений из того же множества, причем p равно m, если поверхность первого или третьего типов, и p равно $(m-1)$, если поверхность типа 2.

В нормальном расслоении $N(M_m)$ $N(\sigma)$-антиинвариантной поверхности M_m в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ выделяется (см. п. 1) распределение p-мерных плоскостей $\varphi T_x(M_m)$, каждый элемент которого принадлежит плоскости η_x. Предположим, что каждая плоскость $\varphi T_x(M_m)$ натянута на первые p-векторов $\vec{N}_{\alpha_1}$ из системы векторов $\vec{N}_\sigma$, натягивающих нормальную плоскость $N_x(M_m)$. В этом случае векторы $\varphi\vec{\Lambda}_a$ являются линейными комбинациями только векторов $\vec{N}_{\alpha_1}$, а следовательно,

$$u_a^{\alpha_2}=0 \tag{2.8}$$

и формулы (2.5) примут вид:

$$\varphi\vec{\Lambda}_a=u_a^{\alpha_1}\vec{N}_{\alpha_1}. \tag{2.9}$$

Так как плоскость $\varphi T_x(M_m)$ принадлежит плоскости η_x, то из формул (1.16) следует, что

$$\rho_{\alpha_1}^{(n+2)}=\eta_I N_{\alpha_1}^I=0. \tag{2.10}$$

В каждой нормально оснащающей плоскости $N_x(M_m)$ пучка нормалей $N(\sigma)$ поверхности M_m можно выбрать $(n-m-p+1)$-мерную плоскость N_x, дополняющую p-мерную плоскость $\varphi T_x(M_m)$ до плоскости $N_x(M_m)$. Таким образом, в нормальном расслоении можно задать распределение $\tilde{N}$ $(n-m-p+1)$-мерных плоскостей $\tilde{N}_x$ таких, что каждый элемент этого распределения $\tilde{N}$ натянут на векторы $\vec{N}_{\alpha_2}$.

Замечание. Размерность подплоскости $\tilde{N}_x$ в нормальной плоскости $N_x(M_m)$ — четная, если поверхность M_m второго типа и равна $(n-2m+2)$. Размерность подплоскости $\tilde{N}_x$ — нечетная, если поверхность M_m — первого или третьего типов и равна $(n-2m+1)$.

Запишем разложение векторов $\varphi\vec{N}_{\alpha_1}$ и $\varphi\vec{N}_{\alpha_2}$ по векторам базиса $\{\vec{\Lambda}_a, \vec{N}_{\alpha_1}, \vec{N}_{\alpha_2}\}$ с учетом формул (1.13):

$$\varphi\vec{N}_{\alpha_1}=-V_{\alpha_1}^b\vec{\Lambda}_b+\rho_{\alpha_1}^{\beta_1}\vec{N}_{\beta_1}+\rho_{\alpha_1}^{\beta_2}\vec{N}_{\beta_2}, \tag{2.11}$$

$$\varphi\vec{N}_{\alpha_2}=-V_{\alpha_2}^b\vec{\Lambda}_b+\rho_{\alpha_2}^{\beta_1}\vec{N}_{\beta_1}+\rho_{\alpha_2}^{\beta_2}\vec{N}_{\beta_2}. \tag{2.12}$$

Выясним возможность оснащения $N(\sigma)$-антиинвариантной поверхности M_m в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ полями плоскостей $N_x(M_m)$ из пучка плоскостей $N(\sigma)$ таких, что распределение плоскостей $\tilde{N}$ инвариантно относительно действия аффинора φ.

Определение 6. Распределение плоскостей $\tilde{N}$ в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ называется инвариантным распределением, если

$$\varphi\tilde{N}_x \subseteq \tilde{N}_x$$

в каждой точке $x \in M_m$.

Если распределение $\tilde{N}$ инвариантно, то из определения 6 следует, что в разложении векторов $\varphi\vec{N}_{\alpha_2}$ компоненты $\rho^{\beta_1}_{\alpha_2}$, $V^b_{\alpha_2}$ тождественно обращаются в нуль:

$$\rho^{\beta_1}_{\alpha_2}=0, \quad V^b_{\alpha_2}=0 \tag{2.13}$$

и уравнения разложения (2.12) принимают вид:

$$\varphi\vec{N}_{\alpha_2}=\rho^{\beta_2}_{\alpha_2}\vec{N}_{\beta_2}. \tag{2.14}$$

При этом из равенств (1.17) с учетом (2.4), (2.8), (2.10), (2.13), получим

$$\rho^{(n+2)}_{\beta_2}\rho^{\alpha_1}_{(n+2)}=0, \quad \rho^{(n+2)}_{\beta_2}V^a_{(n+2)}=0. \tag{2.15}$$

Таким образом, если распределение $(n-m-p+1)$-мерных плоскостей $\tilde{N}$ инвариантно относительно действия аффинора φ, то возможны следующие два случая:

а) $\rho^{(n+2)}_{\beta_2}=0$,

б) $\rho^{\alpha_1}_{(n+2)}=0, \quad V^a_{(n+2)}=0$.

При одновременном выполнении равенств а) и б) приходим к противоречию (см. (2.6)).

Рассмотрим отдельно каждый из этих случаев.

а) Пусть распределение $\tilde{N}$ инвариантно и выполняются равенства:

$$\rho^{(n+2)}_{\beta_2}=0. \tag{2.16}$$

Равенства (2.10), (2.16) означают, что в каждой точке $x \in M_m$ элементы распределения $\tilde{N}$ принадлежат элементам распределения η. Так как плоскость $\varphi T_x(M_m)$, натягивающая вместе с $\tilde{N}_x$ всю нормаль $N_x(M_m)$, также лежит в плоскости η_x, то из этого следует, что элементы нормально оснащающего распределения $N(M_m)$ в каждой точке $x \in M_m$ лежат в элементах распределения η и принадлежат пучку $N_x(\sigma)$.

Известно (см. п. 2), что $N(\sigma)$-антиинвариантные поверхности M_m в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ только первого и второго типов в пучке нормалей $N(\sigma)$ содержат плоскости, лежащие в плоскостях η_x. Следовательно, в случае а) поверхность может быть либо первого, либо второго типов. Так как каждая плоскость $\tilde{N}_x$ инвариантного распределения $\tilde{N}$ принадлежит плоскости η_x распределения η, несущего комплексную структуру, то она должна быть четномерной (см. [13], § 6). Плоскость распределения $\tilde{N}$ четномерная, если поверхность M_m второго типа.

Следовательно, в случае а) $N(\sigma)$-антиинвариантная поверхность M_m только типа 2 допускает оснащение полями нормально оснащающих плоскостей $N_x(M_m)$ из пучка $N_x(\sigma)$, содержащие инвариантное относительно действия φ подпространства $\tilde{N}_x$, дополняющие плоскость $\varphi T_x(M_m)$ до $N_x(M_m)$.

б) Пусть распределение $\tilde{N}$ инвариантно относительно аффинора φ и выполняются равенства:

$$\rho^{\alpha_1}_{(n+2)}=0, \quad V^a_{(n+2)}=0. \tag{2.17}$$

Условия (2.17) означают, что структурный вектор $\vec{\xi}_x$ принадлежит элементу $\tilde{N}_x$ распределения $\tilde{N}$.

В пучке нормалей $N_x(\sigma)$ имеется нормальная плоскость $N_x(M_m)$, содержащая структурный вектор $\vec{\xi}_x$, только если $N(\sigma)$-антиинвариантная поверхность является первого или третьего типа. В этом случае элементы распределения $\tilde{N}$ должны быть нечетномерными. Известно (см. п. 2), что $\tilde{N}$ нечетномерно как для поверхности первого, так и для поверхности третьего типа.

Следовательно, поверхности первого и третьего типов также допускают оснащения полями плоскостей $N_x(M_m)$ из пучка $N_x(\sigma)$ такими, что распределение плоскостей $\tilde{N}_x$, дополняющих подплоскость $\varphi T_x(M_m)$ до $N_x(M_m)$, является инвариантным распределением.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. $N(\sigma)$-антиинвариантная поверхность M_m в M_{n+1} почти контактной структуры допускает оснащение полем плоскостей $N_x(M_m)$ из пучка $N_x(\sigma)$ таким, что распределение $\tilde{N}$ $(n-m-p+1)$-мерных плоскостей $\tilde{N}_x$, дополняющих подплоскость $\varphi T_x(M_m)$ до $N_x(M_m)$, является распределением инвариантным относительно структурного аффинора φ.

В случае, когда $N(\sigma)$-антиинвариантная поверхность M_m второго типа, нормальная плоскость $N_x(M_m)$ принадлежит плоскости η_x, плоскости $\tilde{N}_x$—четномерные и распределение плоскостей $\tilde{N}$ несет почти комплексную структуру со структурным объектом $\rho^{\beta_2}_{\alpha_2}$.

В случае, когда $N(\sigma)$-антиинвариантная поверхность M_m—первого или третьего типа, нормальная плоскость $N_x(M_m)$ содержит структурный вектор $\vec{\xi}_x$, плоскости $\tilde{N}_x$—нечетномерные и распределение плоскостей $\tilde{N}$ несет почти контактную структуру со структурными объектами $\rho^{\beta_2}_{\alpha_2}$, $\rho^{(n+2)}_{\alpha_2}$, $-\rho^{\beta_2}_{(n+2)}$.

§ 3. АНТИИНВАРИАНТНЫЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ В МЕТРИЧЕСКОМ ПОЧТИ КОНТАКТНОМ МНОГООБРАЗИИ

1. При дальнейшем изложении будем считать, что многообразие M_{n+1} снабжено метрической почти контактной структурой со структурными объектами φ, ξ, η, G. Пусть подмногообразие

M_m $(m \leq \frac{n}{2}+1)$ — антиинвариантное подмногообразие в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$ (в смысле определения 1 (§ 2, п. 1)). Это означает, что образ $\varphi T_x(M_m)$ касательной плоскости $T_x(M_m)$, полученный под действием аффинора φ, принадлежит ортогонально оснащающей плоскости $T_x(M_m)^{\perp}$.

В этом случае поверхность M_m можно оснастить полем σ-параметрического пучка плоскостей $N(\sigma)$ с общей осью $\varphi T_x(M_m)$, ортогональной касательной плоскости $T_x(M_m)$. Очевидно, ортогонально оснащающая плоскость $T_x(M_m)^{\perp}$ принадлежит пучку $N(\sigma)$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что антиинвариантная поверхность M_m в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$ оснащена полем плоскостей $T_x(M_m)^{\perp}$, ортогональных плоскостям $T_x(M_m)$.

В случае оснащения поверхности M_m ортогональными плоскостями, тензор $g_{a\sigma}$, компоненты которого определены по формулам (1.20), равен нулю:

$$g_{a\sigma}=G_{IK}\Lambda_a^I N_\sigma^K=0. \qquad (3.1)$$

В силу того, что плоскости $\varphi T_x(M_m)$ ортогональны плоскостям $T_x(M_m)$, в нормальном расслоении $N(M_m)$, каждая плоскость которого ортогональная плоскости $T_x(M_m)$, выделяется распределение p-мерных плоскостей $\varphi T_x(M_m)$ (p равно m или $(m-1)$). Следовательно, в ортогонально оснащающем расслоении можно рассмотреть распределение $(n-m-p+1)$-плоскостей $\tilde{N}$, элементы которого в каждой точке $x \in M_m$ дополняют плоскость $\varphi T_x(M_m)$ до ортогонально оснащающей плоскости $T_x(M_m)^{\perp}$.

Выясним теперь вопрос существования антиинвариантных поверхностей M_m в метрическом почти контактном многообразии $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$, допускающих оснащение полем $(n-m-p+ +1)$-мерных плоскостей $\tilde{N}_x$, ортогонально дополняющих плоскость $\varphi T_x(M_m)$ до плоскости $T_x(M_m)^{\perp}$ и инвариантных относительно аффинора φ.

Из ортогональности плоскостей $\varphi T_x(M_m)$ и $\tilde{N}_x$ следует

$$g_{\alpha_1\alpha_2}=G_{IK}N^I_{\alpha_1}N^K_{\alpha_2}=0, \qquad (3.2)$$

где в каждой точке $x \in M_m$ векторы $\vec{N}_{\alpha_1}$ натягивают плоскость $\varphi T_x(M_m)$, а векторы $\vec{N}_{\alpha_2}$ — плоскость $\tilde{N}$ (см. § 2, п. 5).

Из инвариантности распределения $\tilde{N}$ относительно аффинора φ следуют соотношения (2.13).

Из конечных соотношений (1.17) и (1.22), при выполнении условий (2.4), (2.8), (2.10), (2.13), а также (3.1)—(3.2), получим следующие соотношения:

$$\rho_{\beta_2}^{(n+2)}V^a_{(n+2)}=0, \quad \rho^{\beta_2}_{(n+2)}u_a^{(n+2)}=0,$$
$$\rho^{\beta_1}_{(n+2)}=0, \quad \rho^{\beta_1}_{\alpha_1}=0.$$

Следовательно, возможны следующие два случая:

$$\text{а) } \rho_{\beta_2}^{(n+2)}=0, \quad \rho_{(n+2)}^{\sigma}=0, \quad \rho_{\alpha_1}^{\beta_2}=0; \tag{3.3}$$

$$\text{б) } V_{(n+2)}^{a}=0, \quad u_a^{(n+2)}=0, \quad \rho_{(n+2)}^{\beta_1}=0, \quad \rho_{\alpha_1}^{\beta_2}=0. \tag{3.4}$$

Рассмотрим отдельно каждый из этих случаев.

Из первого случая следует, что в каждой точке $x \in M_m$ структурный вектор $\vec{\xi}_x$ принадлежит касательной плоскости $T_x(M_m)$ (см. (1.14)). Следовательно, при выполнении условий (3.3) антиинвариантная поверхность M_m в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$ — второго типа.

Из второго случая следует, что каждая касательная плоскость $T_x(M_m)$ антиинвариантной поверхности M_m принадлежит элементу распределения η (см. (1.15)), а ортогонально оснащающаяся плоскость $T_x(M_m)^{\perp}$ содержит структурный вектор $\vec{\xi}_x$ (см. (1.14)). Таким образом, второй случай возможен для антиинвариантных поверхностей M_m в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$ третьего типа.

Следовательно, доказана теорема.

Теорема 1. Антиинвариантная поверхность типа 2 и 3 в M_{n+1} метрической почти контактной структуры $(\varphi\xi\eta G)$ допускает оснащение полем $(n-m-p+1)$-мерных плоскостей $\tilde{N}_x$, ортогонально оснащающих плоскость $\varphi T_x(M_m)$ до ортогонально оснащающей плоскости $T_x(M_m)^{\perp}$, и инвариантных относительно структурного аффинора φ.

В работах [23], [24], [34] конструктивным методом показано, что такое инвариантное подпространство $\tilde{N}$ в $T_x(M_m)^{\perp}$, ортогональное плоскости $\varphi T_x(M_m)$, существует для антиинвариантных поверхностей типа 2 и 3.

В случае, когда антиинвариантная поверхность M_m — типа 2, распределение плоскостей $\tilde{N}$ несет почти эрмитову структуру со структурными объектами $\rho_{\alpha_2}^{\beta_2}$, $g_{\alpha_2\beta_2}$, а в случае, когда антиинвариантная поверхность M_m — третьего типа, то распределение N несет метрическую почти контактную структуру со структурными объектами: $\rho_{\beta_2}^{\alpha_2}$, $\rho_{\beta_2}^{(n+2)}$, $\rho_{(n+2)}^{\alpha_2}$, $g_{\alpha_2\beta_2}$.

Из этой теоремы следует, что антиинвариантная поверхность M_m первого типа в метрическом почти контактном многообразии не допускает такого ортогонального оснащения, чтобы распределение $\tilde{N}$, каждая плоскость которого ортогональна плоскости $\varphi T_x(M_m)$ в $T_x(M_m)^{\perp}$, было инвариантным распределением.

Теорема 2. При оснащении антиинвариантной поверхности M_m в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$ полем $(n-m-p+1)$-мерных плоскостей $\tilde{N}_x$, инвариантных относительно аффинора φ и дополняющих плоскость $\varphi T_x(M_m)$ до ортогонально оснащающей плоскости $T_x(M_m)^{\perp}$, в нормальном расслоении $N(M_m)$ возникает f-структура ранга $(n-2m)$.

Действительно из соотношений (1.22), (2.6) при выполнении условий (3.3) или (3.4) для антиинвариантной поверхности M_m в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$ получим следующие равенства:

$$\rho^3+\rho=0.$$

Из последних равенств следует справедливость теоремы (см. [24], [34]).

Изучением антинвариантных подмногообразий M_m в многообразии метрической почти контактной структуры занимались Яно [31], [33], [34], [37]—[38], Кон [24], [29]—[30], [34], [37]—[38], Явагучи [28]—[30], Блэр [19]—[20], Исихара [22]—[23] и др. В работе [34] дается краткий обзор исследований по этой теме до 1976 года.

В большинстве этих работ исследования проводятся в каноническом репере в $T_x(M_{n+1})$. Репер в $T_x(M_{n+1})$ определяется системой единичных взаимно ортогональных векторов.

Если поверхность M_m — типа 2, то в качестве базисных векторов канонического репера в $T_x(M_{n+1})$ выбираются следующие единичные взаимно ортогональные векторы:

$$\Big\{\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_{m-1}, \vec{\varepsilon}_m=\vec{\xi}, \vec{\varepsilon}_{m+1}, \ldots, \vec{\varepsilon}_{\frac{n}{2}+1},$$

$$\varphi\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \varphi\vec{\varepsilon}_{m-1}, \varphi\vec{\varepsilon}_{m+1}, \ldots, \varphi\vec{\varepsilon}_{\frac{n}{2}+1}\Big\},$$

где $\vec{\varepsilon}_a \in T_x(M_m)$.

Если поверхность — типа 3, то в каждой точке x в $T_x(M_{n+1})$ выбирается репер: $\Big\{\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_m, \vec{\varepsilon}_{m+1}=\vec{\xi}, \vec{\varepsilon}_{m+2}, \ldots, \vec{\varepsilon}_{\frac{n}{2}+1}, \varphi\vec{\varepsilon}_1, \ldots$ $\ldots, \varphi\vec{\varepsilon}_m, \varphi\vec{\varepsilon}_{m+2}, \ldots, \varphi\vec{\varepsilon}_{\frac{n}{2}+1}\Big\}$.

Очевидно, что в каждой точке $x \in M_m$ подпространство, натянутое в первом случае на векторы $\Big\{\vec{\varepsilon}_{m+1}, \ldots, \vec{\varepsilon}_{\frac{n}{2}+1}, \varphi\vec{\varepsilon}_{m+1}, \ldots$ $\ldots, \varphi\vec{\varepsilon}_{\frac{n}{2}+1}\Big\}$, а во втором — на векторы $\Big\{\vec{\varepsilon}_{m+2}, \ldots, \vec{\varepsilon}_{\frac{n}{2}+1}, \varphi\vec{\varepsilon}_{m+2}, \ldots$ $\ldots, \varphi\vec{\varepsilon}_{\frac{n}{2}+1}\Big\}$ инвариантно относительно аффинора φ. Это подпространство и является введенным ранее подпространством $\tilde{N}_x$.

В связи с тем, что антиинвариантные поверхности M_m типа 1 в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$ не допускают оснащения полями плоскостей $\tilde{N}_x$, ортогонально дополняющих плоскость $\varphi T_x(M_m)$ до $T_x(M_m)^{\perp}$ и инвариантных относительно аффинора φ (см. теорему 1, § 3), исследования проводились лишь для поверхностей второго и третьего типов.

В дальнейшем приведем краткий обзор работ, посвященных изучению антиинвариантных поверхностей M_m в многообразии Сасаки.

Однако мы не будем прибегать к указанной выше специализации репера в $T_x(M_{n+1})$, что придаст изложению большую общность, а также позволит включить в рассмотрение вопросы, которые из-за специализации репера оставались не изученными.

2. Пусть задано дифференцируемое многообразие M_{n+1} метрической почти контактной структуры со структурными объектами φ, ξ, η, G. Предположим, что в этом многообразии задана риманова связность Γ. Известно [12], что метрический тензор G в этой связности ковариантно постоянен, т. е.

$$\tilde{\nabla}_L G_{IK}\omega^L = dG_{IK} - G_{LK}\tilde{\omega}^L_I - G_{IL}\tilde{\omega}^L_K = 0, \tag{3.5}$$

где $\tilde{\nabla}$ — символ ковариантной производной в римановой связности Γ, а $\tilde{\omega}^J_K$ — формы связности Γ [3]:

$$\tilde{\omega}^I_K = \omega^I_K - \Gamma^I_{KL}\omega^L. \tag{3.6}$$

На поверхности M_m, в многообразии M_{n+1} римановой связности Γ, оснащенной полем ортогональных нормалей, возникает индуцированная риманова связность γ [8], [12]:

$$\tilde{\nabla}_c g_{ab}\theta^c = dg_{ab} - g_{cb}\tilde{\theta}_a{}^c - g_{ac}\tilde{\theta}_b{}^c = 0, \tag{3.7}$$

где $\tilde{\theta}_b{}^a$ — формы связности γ.

Риманова связность Γ на M_{n+1} индуцирует также метрическую связность в нормальном расслоении $N(M_m)$ поверхности M_m. Эта связность называется внешней связностью [12]. Компоненты внешней связности обозначим $\tilde{\gamma}^\sigma_{\rho a}$, а формы связности — $\tilde{\vartheta}^\sigma_\rho$.

Известно, что формы связности $\tilde{\omega}^I_K$, $\tilde{\theta}_b{}^a$, $\tilde{\vartheta}^\sigma_\rho$ удовлетворяют структурным уравнениям Картана — Лаптева [14], [3]:

$$D\tilde{\omega}^I_K = \tilde{\omega}^L_K \wedge \tilde{\omega}^I_L + \frac{1}{2} R^I_{KLM}\omega^L \wedge \omega^M, \tag{3.8}$$

$$D\tilde{\theta}_b{}^a = \tilde{\theta}_b{}^c \wedge \tilde{\theta}_c{}^a + \frac{1}{2} R^a_{bcd}\theta^c \wedge \theta^d, \tag{3.9}$$

$$D\tilde{\vartheta}^\sigma_\rho = \tilde{\vartheta}^\tau_\rho \wedge \tilde{\vartheta}^\sigma_\tau + \frac{1}{2} r^\sigma_{\rho cd}\theta^c \wedge \theta^d, \tag{3.10}$$

где R^I_{KLM} — тензор кривизны римановой связности Γ, заданной на M_{n+1}, R^a_{bcd} — тензор кривизны индуцированной на M_m римановой связности γ, $r^\sigma_{\rho cd}$ — тензор кривизны внешней связности $\bar{\gamma}$. Компоненты этих тензоров связаны известными соотношениями (см. [12]):

$$g^{ab}G_{IL}R^I_{Kcd}\Lambda^L_b\Lambda^K_e - R^a_{ecd} - g^{ab}g_{\sigma\tau}H^\sigma_{e[c}H^\tau_{|b|d]} = 0, \tag{3.11}$$

$$g^{\sigma\tau}G_{IK}N^K_\tau\Lambda^L_a R^I_{Lcd} + \tilde{H}^\sigma_{a[cd]} = 0, \tag{3.12}$$

$$g^{\sigma\tau}G_{IL}N^L_\tau N^K_\rho R^I_{Kcd} - r^\sigma_{\rho cd} - g^{ab}g_{\sigma\tau}H^\sigma_{a[c}H^\tau_{|b|d]} = 0. \tag{3.13}$$

Дифференциальные уравнения поля фундаментального объекта $\{\Lambda^I_a\}$ поверхности M_m и поля объекта $\{N^I_\sigma\}$ (см. (1.8), (1.10)) в римановой связности Г, в индуцированной связности γ и во внешней связности $\overline{\gamma}$ имеют вид:

$$\tilde{\Lambda}^I_{ab}\theta^b = \tilde{\nabla}_b\Lambda^I_a\theta^b = d\Lambda^I_a - \Lambda^I_a\tilde{\theta}_a{}^b + \Lambda^K_a\tilde{\omega}^I_K, \tag{3.14}$$

$$\tilde{N}^I_{\sigma b}\theta^b = \tilde{\nabla}_b N^I_\sigma\theta^b = dN^I_\sigma - N^I_\tau\tilde{\vartheta}^\tau_\sigma + N^K_\sigma\tilde{\omega}^I_K. \tag{3.15}$$

При ортогональном оснащении поверхности M_m в римановой связности Г формулы Гаусса и Вейнгартена, соответственно, имеют вид [12]:

$$\tilde{\nabla}_b\Lambda^I_a = H^\sigma_{ab}N^I_\sigma, \tag{3.16}$$

$$\tilde{\nabla}_b N^I_\sigma = L^a_{\sigma b}\Lambda^I_a, \tag{3.17}$$

где H^σ_{ab} — второй фундаментальный тензор поверхности M_m в M_{n+1}.

3. Пусть M_{n+1} — многообразие Сасаки (или нормальное контактное метрическое многообразие) [1], [18], т. е. метрическое почти контактное многообразие, для которого выполняются соотношения:

$$\tilde{\nabla}_K\xi^I = \varphi^I_K, \qquad \tilde{\nabla}_L\varphi^I_K = \eta_K\delta^I_L - G_{KL}\xi^I, \tag{3.18}$$

где $\tilde{\nabla}$ — символ ковариантной производной в римановой связности Г, причем

$$\tilde{\nabla}_K\xi^I\omega^K = d\xi^I + \xi^L\omega^I_L, \tag{3.19}$$

$$\tilde{\nabla}_K\varphi^I_L\omega^K = d\varphi^I_L - \varphi^I_K\tilde{\omega}^K_L + \varphi^K_L\tilde{\omega}^I_K. \tag{3.20}$$

Для дальнейшего исследования антиинвариантных подмногообразий M_m в многообразии Сасаки запишем дифференциальные уравнения структурных объектов $(f\,\xi\,\eta\,\rho)$-структуры в нормальном расслоении $N(M_m)$ (§ 1, п. 4) при помощи форм римановых связностей Г и γ и внешней связности $\overline{\gamma}$. Для этого продифференцируем равенства (1.12)—(1.16) и заменим инвариантные формы ω^I_K, θ^a_b, ν^σ_τ формами связности $\tilde{\omega}^I_K$, $\tilde{\theta}^a_b$, $\tilde{\nu}^\sigma_\tau$ с учетом (2.4), (3.16)—(3.18). В результате получим:

$$\nabla u^\sigma_a = \tilde{\nabla}_c u^\sigma_a\theta^c = (g_{ac}\rho^\sigma_{(n+2)} + \rho^\sigma_\rho H^\rho_{ac})\,\theta^c, \tag{3.21}$$

$$\nabla V^b_\sigma = \tilde{\nabla}_c V^b_\sigma\theta^c = (-\rho^{(n+2)}_\sigma\delta_c{}^b + \rho^\rho_\sigma L^b_{\rho c})\theta^c, \tag{3.22}$$

$$\nabla\rho^\sigma_\rho = \tilde{\nabla}_c\rho^\sigma_\rho\theta^c = (L^b_{\rho c}u^\sigma_b + V^b_\rho H^\sigma_{bc})\,\theta^c, \tag{3.23}$$

$$\nabla V^b_{(n+2)} = \tilde{\nabla}_c V^b_{(n+2)}\theta^c = \rho^\sigma_{(n+2)}L^b_{\sigma c}\theta^c, \tag{3.24}$$

$$\nabla\rho^\sigma_{(n+2)} = \tilde{\nabla}_c\rho^\sigma_{(n+2)}\,\theta^c = (-u^\sigma_c + H^\sigma_{ac}V^a_{(n+2)})\,\theta^c, \tag{3.25}$$

$$\nabla u_a^{(n+2)} = \tilde{\nabla}_c u_a^{(n+2)} \theta^c = \rho_\sigma^{(n+2)} H_{ac}^\sigma \theta^c, \qquad (3.26)$$

$$\nabla \rho_\sigma^{(n+2)} = \tilde{\nabla}_c \rho_\sigma^{(n+2)} \theta^c = (g_{bc} V_\sigma^b + u_b^{(n+2)} L_{\sigma c}^b)\, \theta^c, \qquad (3.27)$$

а также

$$-g_{ac} V^b_{(n+2)} + u_a^{(n+2)} \delta_c{}^b - V_\sigma^b H_{ac}^\sigma - u_a^\rho L_{\rho c}^b = 0. \qquad (3.28)$$

В дальнейшем будем исследовать отдельно антиинвариантные поверхности второго типа (см. § 4) и антиинвариантные поверхности третьего типа (см. § 5).

§ 4. АНТИИНВАРИАНТНЫЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ ТИПА 2 В МНОГООБРАЗИИ САСАКИ

1. Пусть M_m — антиинвариантное подмногообразие типа 2 в многообразии Сасаки $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$. В этом случае структурный вектор $\vec{\xi}_x$ в каждой точке $x \in M_m$ принадлежит касательному пространству $T_x(M_m)$ поверхности M_m (§ 2, п. 2).

Будем считать, что поверхность M_m оснащена полем плоскостей $T_x(M_m)^\perp$, ортогональных $T_x(M_m)$, а распределение плоскостей $\bar{N}$, элементы которого дополняют плоскость $\varphi T_x(M_m)$ до ортогонально оснащающей плоскости $T_x(M_m)^\perp$, — инвариантным распределением. При таких предположениях для антиинвариантной поверхности второго типа в многообразии Сасаки будут тождественно обращаться в нуль компоненты следующих систем величин:

$$\rho^\sigma_{(n+2)} = 0, \quad \rho_\sigma^{(n+2)} = 0, \quad u_a^{\alpha_2} = 0,$$
$$\rho_{\alpha_2}^{\beta_1} = 0, \quad V^b_{\alpha_2} = 0, \quad \rho_{\alpha_1}^{\alpha_2} = 0, \quad \rho_{\alpha_1}^{\beta_1} = 0, \qquad (4.1)$$

а конечные соотношения (1.17) или (2.6) примут следующий вид:

$$V^a_{\alpha_1} u_a^{\beta_1} = \delta_{\alpha_1}^{\beta_1}, \quad \rho_{\alpha_2}^{\beta_2} \rho_{\beta_2}^{\gamma_2} = -\delta_{\alpha_2}^{\gamma_2},$$
$$V^a_{\alpha_1} u_a^{(n+2)} = 0, \quad V^a_{(n+2)} u_a^{\alpha_1} = 0,$$
$$V^b_{(n+2)} u_a^{(n+2)} = -\delta_a{}^b + V^b_{\alpha_1} u_a^{\alpha_1}, \quad V^a_{(n+2)} u_a^{(n+2)} = -1. \qquad (4.2)$$

Дифференциальные уравнения структурных объектов $(f\,\xi\,\eta\,\rho)$-структуры в нормальном расслоении $N(M_m)$ (см. § 2, п. 4) антиинвариантной поверхности второго типа в многообразии Сасаки имеют вид:

$$\nabla u_a^{\alpha_1} = \tilde{\nabla}_c u_a^{\alpha_1} \theta^c = 0, \qquad u_a^{\alpha_1} \vartheta_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \rho_{\beta_2}^{\alpha_2} H_{ac}^{\beta_2} \theta^c; \qquad (4.3)$$

$$\nabla V^b_{\alpha_1} = \tilde{\nabla}_c V^b_{\alpha_1} \theta^c = 0, \quad -V^b_{\alpha_1} \vartheta^{\alpha_1}_{\alpha_2} = \rho_{\alpha_2}^{\beta_2} L^b_{\beta_2 c} \theta^c; \qquad (4.4)$$

$$\begin{aligned} &\tilde{\nabla}_c \rho_{\beta_1}^{\alpha_1} \theta^c = (L^b_{\beta_1 c} u_b^{\alpha_1} + V^b_{\beta_1} H^{\alpha_1}_{bc})\, \theta^c = 0,\\ &\rho_{\beta_2}^{\alpha_2} \tilde{\vartheta}^{\alpha_1}_{\alpha_2} = L^b_{\beta_2 c} u_b^{\alpha_1} \theta^c,\\ &\nabla \rho_{\beta_2}^{\alpha_2} = \tilde{\nabla}_c \rho_{\beta_2}^{\alpha_2} \theta^c = 0,\\ &-\rho_{\beta_2}^{\alpha_2} \tilde{\vartheta}^{\beta_2}_{\beta_1} = V^b_{\beta_1} H^{\alpha_2}_{bc} \theta^c; \end{aligned} \qquad (4.5)$$

$$\nabla V^b_{(n+2)} = \tilde{\nabla}_c V^b_{(n+2)} \theta^c = 0; \qquad (4.6)$$

$$-u_c^{\alpha_1}+H_{ac}^{\alpha_1}V_{(n+2)}^a=0, \quad H_{ac}^{\alpha_2}V_{(n+2)}^a=0; \tag{4.7}$$

$$\nabla u_a^{(n+2)}=\tilde{\nabla}_c u_a^{(n+2)}\theta^c=0; \tag{4.8}$$

$$-g_{bc}V_{\alpha_1}^b+u_b^{(n+2)}L_{\alpha_1 c}^b=0, \quad u_b^{(n+2)}L_{\alpha_2 c}^b=0. \tag{4.9}$$

Равенства (4.3)—(4.9) получены из (3.21)—(3.28) с учетом (4.1).

Из дифференциальных уравнений (4.4) следует, что плоскость, натянутая на векторы $\vec{V}_{\alpha_1}=V_{\alpha_1}^b\vec{\Lambda}_b$, переносится параллельно в связности γ.

Так как в каждой точке $x\in M_m$ вектор $\vec{\xi}_x$ принадлежит плоскости $T_x(M_m)$, то в локальном репере $\{\vec{\Lambda}_a,\vec{N}_\sigma\}$ этот вектор имеет координаты $V_{(n+2)}^a$ (см. (1.14)). Поэтому вектор $\vec{\xi}$ переносится параллельно вдоль любой кривой в индуцированной на M_m связности γ, если геометрический объект $V_{(n+2)}^a$ ковариантно постоянен в этой связности. Из (4.6) следует, что объект $V_{(n+2)}^a$ ковариантно постоянен в связности γ.

Следовательно, справедлива теорема.

Теорема 1. ([31], стр. 289; [34], стр. 40). Если структурный вектор $\vec{\xi}_x$ принадлежит касательной плоскости $T_x(M_m)$ некоторой поверхности M_m в многообразии Сасаки M_{n+1} (поверхность M_m типа 2) и эта поверхность антиинвариантна, то вектор $\vec{\xi}$ переносится параллельно в связности γ вдоль любой кривой на M_m.

Покажем справедливость обратной теоремы. Пусть $M_m\left(m\leqslant\frac{n}{2}+1\right)$ — некоторая поверхность, вложенная в многообразие Сасаки. Дифференцируя равенства (1.14) с учетом (3.18), находим следующие дифференциальные уравнения объекта $V_{(n+2)}^a$:

$$\nabla_b V_{(n+2)}^a\theta^b=(\rho_{(n+2)}^\sigma L_{\sigma b}^a-f_b{}^a)\,\theta^b.$$

Следовательно, поверхность M_m типа 2 антиинвариантна, если вектор $\vec{\xi}$ ковариантно постоянен в связности γ.

Итак, справедлива теорема.

Теорема 2 [34]. Если структурный вектор $\vec{\xi}_x$ принадлежит касательной плоскости $T_x(M_m)$ некоторой поверхности M_m, вложенной в многообразие Сасаки M_{n+1}, и переносится параллельно в индуцированной связности вдоль любой кривой на M_m, то поверхность M_m антиинвариантна.

Для антиинвариантных поверхностей типа 2 справедливы следующие равенства (см. (4.7))

$$H_{ac}^\sigma V_{(n+2)}^a=u_c^\sigma. \tag{4.10}$$

Свернув (4.10) с $V^c_{(n+2)}$, с учетом (4.2), получим:

$$H^\sigma_{ac}V^a_{(n+2)}V^c_{(n+2)}=0. \tag{4.11}$$

Теорема 3([34], стр. 78). Если в многообразии Сасаки поверхность M_m — антиинвариантная поверхность типа 2, то вектор $\vec{\xi}$ в каждой точке $x \in M_m$ принадлежит многообразию асимптотических направлений.

Яно и Кон в работах [34] и [37] доказали, что в многообразии Сасаки M_{n+1} антиинвариантная поверхность типа 2 не может быть вполне омбилической ($m \geqslant 2$). Доказательство проведено от противного. Пусть в многообразии Сасаки M_{n+1} поверхность M_m — антиинвариантная типа 2 и вполне омбилическая, т. е.

$$H^\sigma_{ab}N^I_\sigma=g_{ab}H^I, \tag{4.12}$$

где $\vec{H}=H^I\vec{e}_I$ — вектор средней кривизны поверхности M_m:

$$H^I=\tilde{\Lambda}^I_{ab}g^{ab}=\sum_{c=1}^{m}\tilde{\Lambda}^I_{ab}\varepsilon_c{}^a\varepsilon_c{}^b, \tag{4.13}$$

а векторы $\vec{\varepsilon}_a=\varepsilon_a{}^b\vec{\Lambda}_b$ в каждой точке $x \in M_m$ образуют систему векторов в $T_x(M_m)$, ортонормированную в метрике g. При этом из (4.11) и (4.12) следует

$$g_{ab}V^a_{(n+2)}V^b_{(n+2)}H^I=0,$$

а следовательно, обращаются в нуль компоненты вектора средней кривизны. Это означает, что поверхность M_m — минимальная. Если поверхность минимальна, то

$$\tilde{\Lambda}^I_{ab}=0,$$

а значит, поверхность вполне геодезическая. Продифференцировав соотношения

$$\xi^I=V^a_{(n+2)}\Lambda^I_a$$

и, воспользовавшись дифференциальными уравнениями соответствующих объектов, в связностях Γ и γ получим

$$\varphi^I_K\Lambda^K_a=0,$$

т. е. в плоскости $T_x(M_m)$ аффинор φ действует как аннулятор, что невозможно, так как ранг матрицы $\|\varphi\|$ равен n. Сделанное предположение неверно. Таким образом, антиинвариантная поверхность M_m второго типа в многообразии Сасаки не может быть вполне омбилической.

В каждой точке $x \in M_m$ плоскость $T_x(M_m)$ пересекается с плоскостью η_x по $(m-1)$-мерной плоскости λ_x. Следовательно, в касательном расслоении антиинвариантной поверхности M_m в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$ выделяются два распределения линейных элементов: 1) распределение одномерных линейных элементов, определенное полем вектора $\vec{\xi}$; 2) распределение $(m-1)$-мерных плоскостей, определенное объектом $u_a^{(n+2)}$. Из соотношений (1.1) следует, что в каждой точке $x \in M_m$ плоскость λ_x и вектор $\vec{\xi}_x$ ортогональны в метрике g и натягивают всю плоскость $T_x(M_m)$. Следовательно, на касательном расслоении антиинвариантной поверхности M_m типа 2 в M_{n+1} естественным образом возникает π-структура (см., например, [1]).

Выведем теперь дифференциальные уравнения распределения плоскостей λ_x. При надлежащей нумерации переменных всегда можно считать, что

$$u_m^{(n+2)} \neq 0. \tag{4.14}$$

В связи с этим мы можем рассмотреть величины

$$u_p{}^m = -\frac{u_p^{(n+2)}}{u_m^{(n+2)}}. \tag{4.15}$$

Эти величины определяют геометрический объект и удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений в

$$\nabla u_p{}^m + \tilde{\theta}_p{}^m - u_p{}^m u_q{}^m \tilde{\theta}_m{}^q = \tilde{u}_{pa}^m \theta^a, \tag{4.16}$$

где $\tilde{\theta}_b{}^a$ — формы связности γ.

Из (4.8) следует:

$$\tilde{u}_{pa}^m = -\frac{\tilde{u}_{pa}^{(n+2)} + u_p{}^m \tilde{u}_{ma}^{(n+2)}}{u_m^{(n+2)}} = 0, \tag{4.17}$$

т. е. в связности γ элементы распределения λ переносятся параллельно. Дифференциальные уравнения (4.16) суть дифференциальные уравнения распределения гиперплоскостных элементов λ в касательном расслоении поверхности M_m, а объект $\{u_p{}^m\}$ — фундаментальный объект первого порядка распределения λ (см. [6], [9]).

Определение [6]. Система величин

$$r_{pq}^m = \tilde{u}_{pq}^m + \tilde{u}_{[p|m|}^m u_{q]}^m \tag{4.18}$$

называется объектом неголономности распределения λ.

Известно [9]—[10], что тождественное обращение в нуль всех компонент объекта неголономности выделяет класс распределений, называемых голономными.

Из (4.17)—(4.18) следует, что $r_{pq}{}^m = 0$, а следовательно, распределение λ, определенное объектом $\{u_p{}^m\}$, в касательном расслоении антиинвариантной поверхности M_m в многообразии Сасаки голономно. В случае голономности распределение λ расслаивается на однопараметрическое семейство $(m-1)$-мерных поверхностей M_{m-1}, огибающих однопараметрическое семейство элементов распределения λ. Каждый элемент распределения касается соответствующей $(m-1)$-мерной поверхности в своем центре [6].

В предположении, что $u_m^{(n+2)} \neq 0$, в силу сотношений (4.2), $V_{(n+2)}^m \neq 0$. Вектор $\vec{\xi}$ является вектором нормали распределения λ в касательном расслоении поверхности M_m. Объектом этой нормали является

$$V_m{}^p = -\frac{V_{(n+2)}^p}{V_{(n+2)}^m}; \tag{4.19}$$

его компоненты подчинены дифференциальным уравнениям

$$\nabla V_m{}^p + \tilde{\theta}_m{}^p - V_m{}^p V_m{}^q \tilde{\theta}_q{}^m = 0. \tag{4.20}$$

Таким образом, в касательном расслоении антиинвариантной поверхности M_m в многообразии Сасаки индуцируется голономное распределение $(m-1)$-мерных плоскостей λ, ортогонально оснащенное полем нормалей ξ. Следовательно, в каждой точке $x \in M_m$ существует поверхность M_{m-1}, вложенная в поверхность M_m и являющаяся интегральным многообразием наибольшей размерности распределения λ. Поверхность M_{m-1} является также интегральным многообразием размерности $(m-1)$ распределения η. Следовательно, в этом случае распределение η допускает существование интегрального многообразия размерности $(m-1)$.

Мы доказали справедливость следующей теоремы.

Теорема 4. Если в многообразии Сасаки вектор $\vec{\xi}_x$ принадлежит касательной плоскости $T_x(M_m)$ антиинвариантной поверхности M_m, то в каждой точке $x \in M_m$ поверхность M_m представляет собой произведение интегрального многообразия M_{m-1} и кривой, определенной вектором $\vec{\xi}_x$ (см. [34]).

В каждой касательной плоскости можно ввести новый репер, состоящий из линейно независимых векторов:

$$\vec{u}_p = \vec{\Lambda}_p + u_p{}^m \vec{\Lambda}_m = u_p{}^a \vec{\Lambda}_a, \tag{4.21}$$

$$\vec{V}_m = V_m{}^p \vec{\Lambda}_p + \vec{\Lambda}_m = V_m{}^a \vec{\Lambda}_a. \tag{4.22}$$

Координатами этих векторов в репере $\vec{e}_I$ в $T_x(M_{n+1})$ являются, соответственно, следующие величины:

$$u_p^I = u_p{}^a \Lambda_a^I, \tag{4.23}$$

$$V_m^I = V_m{}^a \Lambda_a^I. \tag{4.24}$$

Очевидно, что метрика g, индуцированная на поверхности M_m, в свою очередь, индуцирует на поверхности M_{m-1} метрику, определенную тензором h, компоненты которого определяются из соотношений:

$$h_{pq} = g_{ab} u_p{}^a u_q{}^b, \tag{4.25}$$

а риманова связность γ, индуцированная на M_m, индуцирует риманову связность $\tilde{\gamma}$ на M_{m-1}.

Приведем теперь формулы Гаусса и Вейнгартена для поверхности M_{m-1} в многообразии Сасаки M_{n+1}, рассматривая ее как поверхность в M_{n+1}, оснащенную полем ортогональных нормалей $(n-m+2)$-мерных плоскостей $T_x(M_{m-1})^{\perp}$, натянутых в каждой точке $x \in M_m$ на плоскость $T_x(M_m)$ и вектор $\vec{\xi}_x$. Формулы Гаусса для поверхности M_{m-1} имеют вид:

$$\tilde{\nabla}_q u_p^I = \tilde{H}_{pq}^{\sigma} N_{\sigma}^I, \tag{4.26}$$

где $\tilde{\nabla}$ — символ ковариантной производной связности $\tilde{\gamma}$, $N_m^I = V_m^I$. Показано, что компоненты второго фундаментального тензора $\tilde{H}_{pq}^{\sigma}$ поверхности M_{m-1} подчинены условиям:

$$\tilde{H}_{pq}^{\sigma} = H_{pq}^{\sigma} + u_p{}^m H_{mq}^{\sigma}, \quad \tilde{H}_{pq}^{m} = 0. \tag{4.27}$$

Формулы Вейнгартена для поверхности M_{m-1} имеют вид:

$$\tilde{\nabla}_q N_{\sigma}^I = \tilde{L}_{\sigma q}^{p} u_p^I + \tilde{L}_{\sigma q}^{\tau} N_{\tau}^I, \tag{4.28}$$

где

$$\tilde{L}_{\sigma p}^{q} = L_{\sigma p}^{q} + \frac{1}{\varkappa}\left(L_{\sigma p}^{r} u_r{}^m V_m{}^q - L_{\sigma p}^{m} V_m{}^q\right), \tag{4.29}$$

$$\tilde{L}_{\sigma p}^{m} = \frac{1}{\varkappa}\left(L_{\sigma p}^{m} - L_{\sigma p}^{q} u_q{}^m\right), \quad \tilde{L}_{\sigma p}^{\tau} = 0, \tag{4.30}$$

$$\tilde{L}_{mq}^{\sigma} = H_{mq}^{\sigma} + V_m{}^p H_{pq}^{\sigma}, \quad \tilde{L}_{mp}^{q} = 0, \quad \tilde{L}_{mp}^{m} = 0. \tag{4.31}$$

В формулах (4.29)—(4.31)

$$\varkappa = 1 - V_m{}^p u_p{}^m \tag{4.32}$$

есть абсолютный инвариант.

Второй фундаментальный тензор поверхности M_{m-1} и поверхности M_m в многообразии Сасаки связаны соотношениями (4.27). Очевидно, что компоненты тензоров H_{ab}^{σ}, $\tilde{H}_{pq}^{\sigma}$ симметричны по нижним индексам. В дальнейшем при каждом фиксированном σ матрицу H_{ab}^{σ} будем обозначать через H_{σ}, а матрицу $\tilde{H}_{ab}^{\sigma}$ — через $\tilde{H}_{\sigma}$.

Определение 1. [34]. Второй фундаментальный тензор поверхности M_m (M_{m-1}) называется коммутативным, если при любых значениях σ и τ выполняется коммутативный закон умножения матриц H_{σ} $(\tilde{H}_{\sigma})$, т. е. $H_{\sigma}H_{\tau} = H_{\tau}H_{\sigma}$ $(\tilde{H}_{\sigma}\tilde{H}_{\tau} = \tilde{H}_{\tau}\tilde{H}_{\sigma})$.

Определение 2 [34]. f-структура в нормальном расслоении антиинвариантной поверхности M_m типа 2 в многообразии Сасаки M_{n+1} называется параллельной во внешней связности $\bar{\gamma}$, если

$$\bar{\nabla}_c \rho_{\tau}^{\sigma} = 0. \tag{4.33}$$

При продолжении уравнений (3.14) получим

$$d\tilde{\Lambda}^I_{ab}-\tilde{\Lambda}^I_{cb}\tilde{\theta}_a{}^c-\tilde{\Lambda}^I_{ac}\tilde{\theta}_b{}^c+\tilde{\Lambda}^K_{ab}\tilde{\omega}^I_K=\tilde{\Lambda}^I_{abc}\theta^c, \qquad (4.34)$$

где $\tilde{\omega}^I_K$, $\tilde{\theta}_b{}^a$ — формы связностей Γ и γ. Если $\tilde{\Lambda}^I_{abc}=0$, то говорят, что вторая фундаментальная форма $\tilde{\Lambda}^I_{ab}\theta^a\cdot\theta^b$ поверхности параллельна.

Очевидно, компоненты второго фундаментального тензора поверхности M_m удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$dH^\sigma_{ab}-H^\sigma_{cb}\tilde{\theta}_a{}^c-H^\sigma_{ac}\tilde{\theta}_b{}^c+H^\tau_{ab}\tilde{\vartheta}^\sigma_\tau=H^\sigma_{abc}\theta^c, \qquad (4.35)$$

где $\tilde{\vartheta}^\sigma_\tau$ — формы внешней связности $\bar{\gamma}$. Если $H^\sigma_{abc}=0$, то говорят, что второй фундаментальный тензор параллелен.

В случае, когда f-структура в нормальном расслоении параллельна, то из (4.5), с учетом (4.2) и (4.7), получаем:

$$H^{\alpha_2}_{ab}=0, \qquad (4.36)$$

т. е. компоненты второго фундаментального тензора H^σ_{ab} обращаются в нуль, когда σ принимает значения $2m, 2m+1, \ldots$ $\ldots, n+1$.

Пусть M_m — минимальное антиинвариантное подмногообразие типа 2 в многообразии Сасаки. Если f-структура в нормальном расслоении параллельна и $\tilde{H}_\sigma\tilde{H}_\tau=\tilde{H}_\tau\tilde{H}_\sigma$ для всех σ и τ, то $\tilde{H}^\sigma_{pq}=0$ [34].

2. В работах [24], [31], [33] проведены исследования антиинвариантных поверхностей типа 2 в многообразии Сасаки с исчезающим контактным бохнеровым тензором кривизны.

Определение 3 [33]. Многообразие Сасаки $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ называется многообразием с исчезающим контактным бохнеровым тензором кривизны, если тождественно обращается в нуль тензор B, компоненты которого определены по следующим формулам:

$$\begin{aligned}B_{IKLM}=R_{IKLM}&+(G_{IL}-\eta_I\eta_L)L_{KM}-(G_{IM}-\eta_I\eta_M)L_{KL}+\\&+(G_{KM}-\eta_K\eta_M)L_{IL}-(G_{KL}-\eta_K\eta_L)L_{IM}+\varphi_{IL}M_{KM}-\varphi_{IM}M_{KL}+\\&+M_{IL}\varphi_{KM}-M_{IM}\varphi_{KL}+2(M_{IK}\varphi_{LM}+\varphi_{IK}M_{LM})+\\&+(\varphi_{IL}\varphi_{KM}-\varphi_{IM}\varphi_{KL}+2\varphi_{IK}\varphi_{LM}),\end{aligned} \qquad (4.37)$$

где

$$L_{KM}=\frac{1}{n+4}\left[-R_{KM}-(L+3)G_{KM}+(L-1)\eta_K\eta_M\right],$$

$$M_{IK}=-L_{IL}\varphi^L_K, \quad L=G^{IK}L_{IK}.$$

В работах [24], [31], [33] найдены условия, при выполнении которых поверхность M_{m-1} в многообразии Сасаки с исчезающим контактным бохнеровым тензором кривизны становится конформно плоским римановым многообразием, а антиинвариантная поверхность M_m локально представляет произведение конформного плоского риманова пространства и одномерного пространства.

Известно ([34], стр. 12), что поверхность M_{m-1} — конформно плоское риманово пространство, если тождественно обращаются в нуль компоненты тензора вейлевой конформной кривизны C:

$$C_{pqrs}=\tilde{r}_{pqrs}+\frac{1}{m-3}\left(\tilde{r}_{qr}h_{ps}-\tilde{r}_{sr}h_{pq}+h_{qs}\tilde{r}_{pr}-h_{rs}\tilde{r}_{pq}\right)-$$
$$-\frac{\tilde{r}}{(m-2)(m-3)}\left(h_{qs}h_{pr}-h_{rs}h_{pq}\right), \qquad (4.38)$$

где $\tilde{r}_{pqrs}$ — компоненты тензора кривизны, $\tilde{r}_{qs}$ — компоненты тензора Риччи, $\tilde{r}$ — скалярная кривизна поверхности M_{m-1} в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$ $(m\geqslant 5)$.

Для определения связи между компонентами контактного бохнерова тензора кривизны B и компонент тензора вейлевой конформной кривизны C введем следующие обозначения:

$$B_{pqrs}=B_{IKLM}u_p^I u_q^K u_r^L u_s^M,$$
$$D_{pqrs}=D_{abcd}u_p{}^a u_q{}^b u_r{}^c u_s{}^d=g_{\sigma\tau}\left(H^\sigma_{ac}H^\tau_{bd}-H^\sigma_{ad}H^\tau_{bc}\right)u_p{}^a u_q{}^b u_r{}^c u_s{}^d.$$
$$D_{ps}=D_{prsq}h^{rq}, \quad D=D_{ps}h^{ps},$$
$$B_{ps}=B_{prsq}h^{rq}, \quad b=B_{ps}h^{ps}.$$

В работах [24], [33] получена связь между компонентами B_{pqrs} и C_{pqrs}:

$$B_{pqrs}=C_{pqrs}-D_{pqrs}+\frac{1}{m-3}\left(-h_{pr}B_{qs}+h_{qs}B_{pr}-h_{qr}B_{ps}+h_{pr}D_{qs}+\right.$$
$$\left.+h_{qs}D_{pr}-h_{qs}D_{pr}-h_{qr}D_{ps}\right)+\frac{b+D}{(m-2)(m-3)}\left(h_{pr}h_{qs}-h_{ps}h_{qr}\right). \quad (4.39)$$

С учетом связи между компонентами B_{pqrs} и c_{pqrs} (4.39), а также соотношений (4.2)—(4.9) в работах [24], [31], [33], [34] были получены следующие результаты:

Пусть M_m $(m\geqslant 5)$ — антиинвариантное подмногообразие второго типа в $(n+1)$-мерном многообразии Сасаки с исчезающим контактным бохнеровым тензором кривизны. Если выполняется одно из следующих условий:

1) f-структура нормального расслоения параллельна (см. (4.33)) и второй фундаментальный тензор коммутативен (см. [31]);

2) для компонент D_{pqrs} выполняются соотношения:

$$D_{pqrs}=\alpha\left(h_{pr}h_{qs}-h_{ps}h_{qr}\right),$$

где α — скалярная функция на M_m [24];

3) f-структура нормального расслоения параллельна и $\tilde{H}_\sigma\tilde{H}_\tau=\tilde{H}_\tau\tilde{H}_\sigma$ для любых σ и τ [24];

4) M_m — контактное вполне омбилическое подмногообразие [24];

5) второй фундаментальный тензор поверхности M_m коммутативен и $m=\frac{n}{2}+1$ (M_m — максимально возможной размерности) [33], то в каждом случае антиинвариантная поверхность M_m в каждой точке $x \in M_m$ представляет собой произведение конформно плоского риманова многообразия M_{m-1} и одномерного пространства M_1, определенного полем структурного вектора $\vec{\xi}$.

Четырехмерное антиинвариантное подмногообразие типа 2 в многообразии Сасаки с исчезающим контактным бохнеровым тензором кривизны изучено в работе [24].

3. Антиинвариантные подмногообразия типа 2 в сасакиевой пространственной форме $M_{n+1}(c)$ изучены в работах [22], [25], [34], [37], [38] и др.

Определение 4 [25]. Многообразие Сасаки называется сасакиевой пространственной формой $M_{n+1}(c)$ (Sasakian space form), если φ-секционная кривизна постоянна.

Известно (см., например, [22], [34]), что тензор кривизны сасакиевой пространственной формы $M_{n+1}(c)$ определяется по формулам:

$$R^I_{KLM}=\frac{1}{4}(c+3)(\delta^I_L G_{KM}-\delta^I_M G_{KL})+\frac{1}{4}(c-1)(\eta_K\eta_L\delta^I_M-\eta_K\eta_M\delta^I_L+$$
$$+\xi^I\eta_M G_{KL}-\xi^I\eta_L G_{KM}+\varphi^I_L\varphi_{KM}-\varphi^I_M\varphi_{KL}-2\varphi^I_K\varphi_{LM}), \quad (4.40)$$

а тензор кривизны антиинвариантной поверхности M_m типа 2 в M_{n+1} — по формулам:

$$R^a_{bcd}=\frac{1}{4}(c+3)(\delta^a_c g_{bd}-\delta_d{}^a g_{bc})+\frac{1}{4}(c-1)\big(u_b^{(n+2)}u_c^{(n+2)}\delta_d{}^a-$$
$$-u_b^{(n+2)}u_d^{(n+2)}\delta_c{}^a+V^a_{(n+2)}u_d^{(n+2)}g_{bc}-V^a_{(n+2)}u_c^{(n+2)}g_{bd}+ \quad (4.41)$$
$$+g_{\sigma\tau}(H^\sigma_{ec}H^\tau_{bd}-H^\sigma_{ed}H^\tau_{bc})\big)g^{ea}.$$

Формулы (4.41) получены из формул (4.40) с учетом уравнений (3.11)—(3.13).

Из формул (4.41) в работе [34] найдены формулы для определения компонент тензора Риччи R_{ab} и скалярной кривизны r антиинвариантной поверхности M_m в $M_{n+1}(c)$ в репере, адаптированном элементам распределения λ и векторам $\vec{\xi}_x$, т. е. $\vec{\Lambda}_p=\vec{u}_p$, $\vec{\Lambda}_m=\vec{\xi}$.

В [34] выведены также формулы для определения тензора Риччи и скалярной кривизны антиинвариантной поверхности в $M_{n+1}(c)$ в случае, когда f-структура нормального расслоения параллельна и когда поверхность M_m — минимальна.

Для антиинвариантных подмногообразий в сасакиевой пространственной форме $M_{n+1}(c)$ справедливы следующие результаты.

Пусть M_m — антиинвариантное подмногообразие типа 2 в сасакиевой пространственной форме $M_{n+1}(c)$.

1. Если второй фундаментальный тензор поверхности коммутативен и f-структура в нормальном расслоении параллельна, то M_m $(m \geqslant 2)$ — плоское тогда и только тогда, когда $c=1$ [37].

2. Если f-структура в нормальном расслоении параллельна то в каждой точке $x \in M_m$ поверхность есть произведение риманова многообразия M_{m-1} и одномерного пространства M_1, где M_{m-1} — гиперповерхность в M_m с постоянной кривизной $\frac{1}{4}(c-1)$ и вполне геодезическая в M_m [34].

3. Если f-структура в нормальном расслоении параллельна и $\tilde{H}_\sigma \tilde{H}_\tau = \tilde{H}_\tau \tilde{H}_\sigma$ при всех σ и τ, то M_m — плоское тогда и только тогда, когда $c=-3$ [34].

4. Если f-структура в нормальном расслоении и вектор средней кривизны параллельны и $\tilde{H}_\sigma \tilde{H}_\tau = \tilde{H}_\tau \tilde{H}_\sigma$, то или $\tilde{H}^\sigma_{ab}=0$, или $c \leqslant -3$ [34].

5. Если вторая фундаментальная форма параллельна и $\tilde{H}_\sigma \tilde{H}_\tau = \tilde{H}_\tau \tilde{H}_\sigma$, то или $\tilde{H}^\sigma_{ab}=0$, или $c=-3$ и M_m — плоское [34].

6. Если f-структура в нормальном расслоении и вектор средней кривизны параллельны и $\tilde{H}_\sigma \tilde{H}_\tau = \tilde{H}_\tau \tilde{H}_\sigma$ и $c \geqslant -3$, то вторая фундаментальная форма поверхности M_m параллельна [34].

В работе [22] проведено исследование антиинвариантных подмногообразий M_m типа 2 в сасакиевой пространственной форме, когда внешняя связность $\bar{\gamma}$ плоская или псевдоплоская.

7. Связность $\bar{\gamma}$ называется плоской, если тензор кривизны этой связности тождественно обращается в нуль.

Связность $\bar{\gamma}$ называется псевдоплоской, если

$$r^\sigma_{\tau ab} u_p{}^a u_q{}^b = 0.$$

Если внешняя связность $\bar{\gamma}$ плоская, то и M_m — плоское [22].

8. Если внешняя связность $\bar{\gamma}$ псевдоплоская, то локально M_m представляет собой прямое риманово произведение поверхности, M_{m-1} — постоянной кривизны и одномерного подпространства, определенного вектором $\vec{\xi}$ [22].

9. Если M_m — минимальное в $M_{n+1}(c)$ $(c \neq -3)$, то связность $\bar{\gamma}$ плоская тогда и только тогда, когда $\bar{\gamma}$ — псевдоплоская [22].

10. Если M_m — минимальное в $M_{n+1}(c)$ $(c \neq -3)$ и связность $\bar{\gamma}$ псевдоплоская, то M_m — плоское [22].

В работе [25] проведено исследование минимальных антиинвариантных подмногообразий M_m второго типа в сасакиевой пространственной форме $M_{n+1}(c)$.

Известно, что поверхность M_m минимальна, если вектор средней кривизны (см. (4.13)) обращается в нуль.

Интересные результаты получены в [22] при требовании параллельности и псевдопараллельности вектора средней кривизны антиинвариантной поверхности M_m в $M_{n+1}(c)$.

При ковариантном дифференцировании (4.13) в связности γ и $\bar{\gamma}$ получаем:

$$\tilde{\nabla}_c H^I = \tilde{\nabla}_c H^\sigma_{ab} g^{ab} N^I_\sigma + H^\sigma_{ab} g^{ab} \tilde{\nabla}_c N^I_\sigma.$$

Вектор средней кривизны $\vec{H} = H^I \vec{e}_I$ параллелен в связности Γ, если $\tilde{\nabla}_c H^I = 0$, и псевдопараллелен, если $\tilde{\nabla}_c H^I u_p{}^c = 0$.

В работе [22] доказны следующие теоремы:

Теорема 5 [22]. Пусть M_m $(m \geqslant 4)$ — антиинвариантное подмногообразие второго типа в сасакиевой пространственной форме $M_{n+1}(c)$ $(c \neq -3)$ с псевдопараллельным вектором средней кривизны. Если внешняя связность $\bar{\gamma}$ псевдоплоская, то существует в $M_{n+1}(c)$ вполне геодезическое и инвариантное подмногообразие $M_{2m-1}(c)$ размерности $(2m-1)$ такое, что поверхность M_m, вложенная в $M_{2m-1}(c)$, является плоским антиинвариантным подмногообразием.

Теорема 6 [22]. Пусть M_m — антиинвариантное подмногообразие типа 2 в сасакиевой пространственной форме $M_{n+1}(c)$. Если второй фундаментальный тензор параллелен в γ, тогда M_m есть антиинвариантное подмногообразие, вложенное во вполне геодезическое $(2m-1)$-мерное подмногообразие $M_{2m-1}(c)$ многообразия $M_{n+1}(c)$.

Исследование антиинвариантных подмногообразий M_m максимально возможной размерности в сасакиевой пространственной форме проведено в работе [37].

§ 5. АНТИИНВАРИАНТНЫЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ ТИПА 3 В МНОГООБРАЗИИ САСАКИ

1. Сначала докажем, что любое C-вполне вещественное подмногообразие (см. Определение 1) в многообразии Сасаки является антиинвариантным подмногообразием типа 3.

Пусть многообразие M_{n+1} — контактное многообразие (см. [12], [18]). Напомним, что многообразие M_{n+1} называется контактным многообразием, если на нем задано поле ковектора η такое, что

$$d\eta\wedge\ldots\wedge d\eta\wedge\eta = (d\eta)^n\wedge\eta \neq 0. \tag{5.1}$$

Известно, что поле ковектора η определяет распределение η гиперплоскостных элементов в M_{n+1}. Это распределение называется контактным распределением (см., например, [12], [18], [27]).

Подмногообразие M_m в контактном многообразии M_{n+1} называется интегральным подмногообразием контактного распределения η, если в каждой точке $x \in M_m$ касательная плоскость $T_x(M_m)$ содержится в η_x [19]—[20], [28]—[30].

Размерность интегрального подмногообразия M_m контактного распределения η не превышает $\frac{n}{2}$ $(m \leqslant \frac{n}{2})$.

Известно [1], [12], что при задании на контактном многообразии M_{n+1} римановой метрики с контактной структурой на M_{n+1} ассоциируется метрическая почти контактная структура со структурными объектами φ, ξ, η, G.

При наложении условий (3.18) на компоненты структурных и продолженных структурных объектов $(\varphi\xi\eta G)$-структуры на M_{n+1} римановой связности Γ, возникает частный класс метрических почти контактных многообразий — многообразие Сасаки.

Определение 1 ([19]—[20], [28]—[30]). Интегральные подмногообразия контактного распределения в многообразии Сасаки называются C-вполне вещественными подмногообразиями.

В многообразии Сасаки справедлива следующая теорема.

Теорема [28]. C-вполне вещественное подмногообразие M_m в многообразии Сасаки M_{n+1} является антиинвариантным подмногообразием M_m типа 3.

Доказательство. Из определения 2 следует, что в каждой точке $x \in M_m$ касательная плоскость $T_x(M_m)$ принадлежит плоскости η_x. Следовательно, поверхность M_m—типа 3. Из теоремы 1 следует, что $m < \frac{n}{2}$. Докажем теперь, что $\varphi T_x(M_m) \subset T_x(M_m)^{\perp}$, т. е. любой вектор $\vec{X} \in T_x(M_m)$ под действием аффинора φ преобразуется в вектор $\varphi\vec{X}$, ортогональный плоскости $T_x(M_m)$ в метрике G.

Пусть каждая плоскость $T_x(M_m)^{\perp}$ натянута на систему линейно независимых векторов $\vec{N}_\sigma$. Из ортогональности характеристического вектора $\vec{\xi}_x$ и элемента η_x контактного распределения η (см. [12]) следует, что вектор $\vec{\xi}_x$ принадлежит плоскости $T_x(M_m)^{\perp}$. В связи с этим формулы (1.14) примут вид:

$$\xi^I = \rho^{\sigma}_{(n+2)} N^I_\sigma. \qquad (5.2)$$

При дифференцировании этих равенств, с учетом формул Вейнгартена (3.17), получим:

$$\tilde{\nabla}_K \xi^I \Lambda^K_a = \tilde{\nabla}_a \rho^{\sigma}_{(n+2)} N^I_\sigma + \rho^{\sigma}_{(n+2)} L^b_{\sigma a} \Lambda^I_b, \qquad (5.3)$$

где $\tilde{\nabla}$ — символ ковариантного дифференцирования в римановой связности Γ.

Пусть $\vec{X}$ — произвольный вектор, принадлежащий касательной плоскости $T_x(M_m)$. В силу известных свойств аффинора φ (см. [12], § 2), векторы $\vec{X}$ и $\varphi\vec{X}$ ортогональны в метрике G:

$$G(\varphi\vec{X}, \vec{X})=0. \tag{5.4}$$

Предположим, что вектор $\vec{X}$ имеет координаты $\tilde{X}^a$ в локальном репере $\{\vec{\Lambda}_a\}$ в $T_x(M_m)$:

$$\vec{X}=\tilde{X}^a\vec{\Lambda}_a.$$

Тогда равенства (5.4) можно записать в виде:

$$G_{IK}\varphi^I_L\Lambda^L_a\tilde{X}^a\Lambda^K_b\tilde{X}^b=0. \tag{5.5}$$

Так как в многообразии Сасаки $\tilde{\nabla}_K\xi^I=\varphi^I_K$ (см. (3.18)), то из (5.3) следует:

$$\varphi^I_K\Lambda^K_a=\tilde{\nabla}_a\rho^\sigma_{(n+2)}N^I_\sigma+\rho^\sigma_{(n+2)}L^b_{\sigma a}\Lambda^I_b. \tag{5.6}$$

Из равенств (5.5), с учетом (1.22) и (5.6), получим:

$$\rho^{(n+2)}_\sigma H^\sigma_{ab}=0. \tag{5.7}$$

Перепишем теперь условия (5.6), с учетом (1.12) и (5.7):

$$f_a{}^b\Lambda^I_b+u^\sigma_aN^I_\sigma=\tilde{\nabla}_a\rho^\sigma_{(n+2)}N^I_\sigma.$$

Из последних равенств следует, что компоненты $f_a{}^b$ равны нулю, а следовательно, формулы (1.12) примут вид:

$$\varphi\vec{\Lambda}_a=u^\sigma_a\vec{N}_\sigma.$$

В силу того, что система векторов $\{\vec{N}_\sigma\}$ образует линейно независимую систему векторов в ортогональном оснащении $T_x(M_m)^\perp$, следует, что плоскость $\varphi T_x(M_m)$ принадлежит плоскости $T_x(M_m)^\perp$. Отсюда и следует справедливость теоремы

В силу того, что всякое C-вполне вещественное подмногообразие является антиинвариантным подмногообразием в многообразии Сасаки $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$, мы в дальнейшем приведем обзор работ и антиинвариантных многообразий типа 3 и C-вполне вещественных подмногообразий в многообразии Сасаки, не различая их.

2. Пусть M_m — антиинвариантное подмногообразие типа 3 в многообразии Сасаки $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$. В этом случае в каждой точке $x\in M_m$ касательная плоскость $T_x(M_m)$ поверхности M_m принадлежит плоскости η_x. Очевидно, в многообразии $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$ существуют антиинвариантные подмногообразия третьего типа, если распределение η допускает существование интегральных подмногообразий, размерность которых не превышает $\frac{n}{2}$.

Будем считать, что поверхность M_m оснащена полем ортогональных плоскостей $T_x(M_m)^{\perp}$ и распределение плоскостей $\tilde{N}$, элементы которого дополняют плоскость $\varphi T_x(M_m)$ до ортогонально оснащающей плоскости $T_x(M_m)^{\perp}$, инвариантно относительно φ. При таких предположениях вектор ξ_x принадлежит плоскости $\tilde{N}_x$ и тождественно обращаются в нуль компоненты следующих систем величин:

$$
\begin{gathered}
u_a^{(n+2)}=0, \quad V^a_{(n+2)}=0, \quad \rho^{\beta_1}_{\alpha_2}=0, \\
V^b_{\alpha_2}=0, \quad u_a^{\alpha_2}=0, \quad \rho^{(n+2)}_{\alpha_1}=0, \\
\rho^{\alpha_1}_{(n+2)}=0, \quad \rho^{\beta_1}_{\alpha_1}=0, \quad \rho^{\beta_2}_{\alpha_1}=0.
\end{gathered} \tag{5.8}
$$

При таком оснащении антиинвариантных подмногообразий типа 3 в многообразии Сасаки M_{n+1} конечные соотношения (1.17) принимают следующий вид:

$$
\begin{gathered}
V^a_{\beta_1}u_a^{\alpha_1}=\delta^{\alpha_1}_{\beta_1}, \quad V^b_{\alpha_1}u_a^{\alpha_1}=\delta_a{}^b, \\
\rho^{\alpha_2}_{\beta_2}\rho^{\beta_2}_{\gamma_2}+\rho^{\alpha_2}_{(n+2)}\rho^{(n+2)}_{\gamma_2}=-\delta^{\alpha_2}_{\gamma_2}, \quad \rho^{\alpha_2}_{\beta_2}\rho^{\beta_2}_{(n+2)}=0, \\
\rho^{\alpha_2}_{\beta_2}\rho^{(n+2)}_{\alpha_2}=0, \quad \rho^{\alpha_2}_{(n+2)}\rho^{(n+2)}_{\alpha_2}=-1,
\end{gathered} \tag{5.9}
$$

а дифференциальные уравнения структурных объектов $(f\xi\eta\rho)$-структуры, индуцированной в ортогонально оснащающем расслоении (см. § 2, п. 4), имеют вид:

$$
\begin{gathered}
\nabla u_a^{\alpha_1}=\tilde{\nabla}_c u_a^{\alpha_1}\theta^c=0, \\
u_a^{\alpha_1}\tilde{\vartheta}^{\alpha_2}_{\alpha_1}=\left(-\rho^{\alpha_2}_{(n+2)}g_{ac}+\rho^{\alpha_2}_{\beta_2}H^{\beta_2}_{ac}\right)\theta^c;
\end{gathered} \tag{5.10}
$$

$$
\nabla V^b_{\alpha_1}=\tilde{\nabla}_c V^b_{\alpha_1}\theta^c=0, \quad -V^b_{\alpha_1}\tilde{\vartheta}^{\alpha_1}_{\alpha_2}=\left(-\rho^{(n+2)}_{\alpha_2}\delta_c{}^b+\rho^{\beta_2}_{\alpha_2}L^b_{\beta_2 c}\right)\theta^c; \tag{5.11}
$$

$$
\begin{gathered}
L^b_{\alpha_1 c}u_b^{\beta_1}-V^b_{\alpha_1}H^{\beta_1}_{bc}=0, \quad \rho^{\beta_2}_{\alpha_2}\tilde{\vartheta}^{\beta_1}_{\beta_2}=L^b_{\alpha_2 c}u_b^{\beta_1}\theta^c, \\
-\rho^{\beta_2}_{\alpha_2}\tilde{\vartheta}^{\alpha_2}_{\alpha_1}=-V^b_{\alpha_1}H^{\beta_2}_{bc}\theta^c, \quad \nabla\rho^{\beta_2}_{\alpha_2}=\tilde{\nabla}_c\rho^{\beta_2}_{\alpha_2}\theta^c=0;
\end{gathered} \tag{5.12}
$$

$$
\rho^{\alpha_2}_{(n+2)}L^b_{\alpha_2 c}=0; \tag{5.13}
$$

$$
\rho^{\alpha_2}_{(n+2)}\tilde{\vartheta}^{\alpha_1}_{\alpha_2}=-u_c^{\alpha_1}\theta^c, \quad \nabla\rho^{\alpha_2}_{(n+2)}=\tilde{\nabla}_c\rho^{\alpha_2}_{(n+2)}\theta^c; \tag{5.14}
$$

$$
\rho_{\alpha_2}H^{\alpha_2}_{ac}=0; \tag{5.15}
$$

$$
\rho^{(n+2)}_{\alpha_2}\tilde{\vartheta}^{\alpha_2}_{\alpha_1}=-g_{bc}V^b_{\alpha_1}\theta^c, \quad \nabla\rho^{(n+2)}_{\alpha_2}=\tilde{\nabla}_c\rho^{(n+2)}_{\alpha_2}\theta^c=0; \tag{5.16}
$$

а также

$$
V^b_{\alpha_1}H^{\alpha_1}_{ac}+u_a^{\alpha_1}L^b_{\alpha_1 c}=0. \tag{5.17}
$$

Из дифференциальных уравнений (5.11) следует, что m-мерная плоскость, натянутая на векторы $\vec{V}_{\alpha_1}=V^b_{\alpha_1}\vec{\Lambda}_b$, переносится параллельно в связности γ.

Из дифференциальных уравнений (5.12) следует, что если

f-структура, индуцированная в нормальном расслоении, параллельна в связности γ (см. § 4, п. 1 (4.33)), то

$$H^{\Gamma_2}_{ac}=0. \qquad (5.18)$$

В случае параллельности второй фундаментальной формы (см. § 4, п. 1) из формул Гаусса (3.16), соотношений (5.9) и уравнений (5.10)—(5.16) следует равенство нулю следующих компонент второго фундаментального тензора [12]:

$$H^{\beta_1}_{ac}=0. \qquad (5.19)$$

Из (5.18) и (5.20) следует, что в многообразии Сасаки M_{n+1} антиинвариантная поверхность третьего типа является вполне геодезической, если вторая фундаментальная форма поверхности и f-структура в нормальном расслоении параллельны в связности γ. В случае, когда $m=\frac{n}{2}$, то M_m — вполне геодезическая, если вторая фундаментальная форма поверхности параллельна [29] или если M_m — вполне омбилическое подмногообразие [25].

Антиинвариантная поверхность типа 3 в многообразии Сасаки минимальна, если f-структура в нормальном расслоении и вектор средней кривизны $\vec{H}=H^I\vec{e}_I$ (см. (4.13)) параллельны в связностях Γ, $\bar{\gamma}$ [34]. В случае $m=\frac{n}{2}$, подмногообразие M_m минимально, если параллелен вектор средней кривизны $\vec{H}$ [20].

Из формул (3.11)—(3.13), а также из (5.8)—(5.12) следует, что в многообразии Сасаки $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$ компоненты тензора кривизны $r^{\sigma}_{\tau,ab}$ нормального расслоения $N(M_m)$ антиинвариантной поверхности M_m типа 3 удовлетворяют соотношениям $r^{\sigma}_{\tau ab}\rho^{\tau}_{(n+2)}=0$ [25].

Если f-структура, индуцированная в нормальном расслоении, параллельна и внешняя связность $\bar{\gamma}$ плоская ($r^{\sigma}_{\tau ab}=0$), то поверхность M_m — постоянной кривизны r, равной 1. В случае $m=\frac{n}{2}$, внешняя связность плоская тогда и только тогда, когда M_m постоянной кривизны r, равной 1 [25], [29].

3. В работах [26], [33]—[34] проведены исследования антиинвариантных подмногообразий M_m ($m\geqslant 4$) типа 3 в многообразии Сасаки с исчезающим контактным бохнеровым тензором кривизны (см. § 4, п. 2). В частности, найдены условия, при выполнении которых антиинвариантная поверхность M_m типа 3 конформно плоская, т. е. компоненты тензора вейлевой конформной кривизны C_{abcd} обращаются в нуль (см. (4.38)). Для установления связи между компонентами контактного бохнерова тензора кривизны с компонентами вейлевой конформной кривизны введем следующие обозначения:

$$B_{abcd}=B_{IKLM}\Lambda^I_a\Lambda^K_b\Lambda^L_c\Lambda^M_d,$$

$$D_{abcd}=g_{\sigma\tau}\left(H^{\sigma}_{ac}H^{\tau}_{bd}-H^{\sigma}_{ad}H^{\tau}_{cb}\right),$$
$$D_{ac}=g^{bd}D_{abcd},\quad D=g^{ac}D_{ac},$$
$$b_{ac}=g^{bd}B_{abcd},\quad b=g^{ac}b_{ac}.$$

В работе [34] получена связь между B_{abcd} и C_{abcd}:

$$B_{abcd}=C_{abcd}-D_{abcd}+\frac{1}{m-2}(g_{ac}b_{bd}+g_{bd}b_{ac}-g_{ad}b_{bc}-g_{bc}b_{ad}+$$
$$+g_{ac}D_{bd}+g_{bd}D_{ac}-g_{ad}D_{bc}-g_{bc}D_{ad})+$$
$$+\frac{1}{(m-1)(m-2)}(g_{ac}g_{bd}-g_{ad}g_{bc})(b+D). \tag{5.20}$$

При помощи (4.35)—(4.36) и (5.21), а также (5.8)—(5.17) были получены следующие результаты [26], [31], [33]—[34]:

Пусть M_m ($m\geqslant 4$) — антиинвариантная поверхность третьего типа в многообразии Сасаки M_{n+1} с исчезающим контактным бохнеровым тензором кривизны. Если выполняется одно из следующих условий:

1) Компоненты D_{abcd} удовлетворяют условиям:

$$D_{abcd}=\alpha\,(g_{ac}g_{bd}-g_{bd}g_{bc}),$$

где α — некоторая скалярная функция [34].

2) f-структура, индуцированная в нормальном расслоении $N(M_m)^{\perp}$, параллельна и второй фундаментальный тензор поверхности коммутативен [31].

3) M_m — вполне омбилическая поверхность [33], то антиинвариантная поверхность M_m конформно плоская.

В случае $m=\frac{n}{2}$, антиинвариантная поверхность M_m в многообразии Сасаки с исчезающим контактным бохнеровым тензором кривизны — конформно плоская, если второй фундаментальный тензор коммутативен [33].

4. Антиинвариантные подмногообразия третьего типа в сасакиевой пространственной форме $M_{n+1}(c)$ (см. § 4, п. 3) изучены в работах [34], [19], [23], [30], [37].

Компоненты тензора кривизны многообразия $M_{n+1}(c)$ вычисляются по формулам (4.40). Свернув (4.40) с $\Lambda^K_b\Lambda^L_c\Lambda^M_d\overset{*}{\Lambda}{}^a_I$, с учетом уравнений Гаусса (3.11) и соотношений (5.8), получим формулы для вычисления компонент тензора кривизны R^a_{bcd} антиинвариантного подмногообразия M_m типа 3, вложенного в многообразие $M_{n+1}(c)$:

$$R^a_{bcd}=\frac{1}{4}(c+3)(\delta_c{}^a g_{bd}-\delta_d{}^a g_{bc})+$$
$$+g_{\sigma\tau}\left(H^{\sigma}_{ac}H^{\tau}_{bd}-H^{\sigma}_{ad}H^{\tau}_{bc}\right), \tag{5.21}$$

Формулы, определяющие компоненты тензора Риччи R_{ab}:

$$R_{ab}=\frac{1}{4}(m-1)(c-1)g_{ab}+g^{ac}g_{\sigma\tau}(H^{\sigma}_{ac}H^{\tau}_{bd}-H^{\sigma}_{ad}H^{\tau}_{bc}), \qquad (5.22)$$

и скалярную кривизну r поверхности M_m:

$$r=\frac{1}{4}(m-1)(c+3)+g^{ac}g^{bd}g_{\sigma\tau}(H^{\sigma}_{ac}H^{\tau}_{bd}-H^{\sigma}_{ad}H^{\tau}_{bc}). \qquad (5.23)$$

В [34] выведены также формулы для определения компонент тензора кривизны, тензора Риччи и скалярной кривизны антиинвариантной поверхности M_m в случаях, когда f-структура в нормальном расслоении $N(M_m)^{\perp}$ параллельна и когда поверхность M_m минимальна (см. [34] гл. 5, § 1, стр. 125—126).

При помощи формул (5.21)—(5.23), а также аналогичных формул для случая, когда f-структура в нормальном расслоении $N(M_m)^{\perp}$ параллельна и когда поверхность M_m минимальна, с учетом соотношений (5.8)—(5.9) и уравнений (3.11)—(3.13), (5.10)—(5.17), получены следующие результаты:

Пусть M_m — антиинвариантное подмногообразие типа 3 в сасакиевой пространственной форме.

1. Если M_m — вполне геодезическое, то оно постоянной кривизны $r=\frac{1}{4}(m-1)(c+3)$ [34].

2. Если M_m — минимальное, то $r\leqslant\frac{1}{4}m(m-1)(c+3)$ [19];

3. Если M_m — минимальное, то оно вполне геодезическое тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий [19]:

а) M_m — постоянной кривизны $\frac{1}{4}(c+3)$,

б) $R_{ab}=\frac{1}{4}(m-1)(c+3)g_{ab}$,

в) $r=\frac{1}{4}m(m-1)(c+3)$.

4) Если f-структура в нормальном расслоении $N(M_m)^{\perp}$ и вектор средней кривизны параллельны и второй фундаментальный тензор коммутативен, то M_m — постоянной кривизны $r=\frac{1}{4}(c+3)$ [34].

5) Если f-структура в нормальном расслоении $N(M_m)^{\perp}$ параллельна и M_m вполне омбилическое, то M_m — постоянной кривизны $r=\frac{1}{4}(c+3)$ [34].

6) Если f-структура в нормальном расслоении $N(M_m)^{\perp}$ параллельна, то M_m — постоянной кривизны $\frac{1}{4}(c+3)$ тогда и только тогда, когда вторая фундаментальная форма параллельна [34].

В работе [34] введены понятия η-параллельности вектора средней кривизны $\vec{H}$ и η-параллельности второй фундаментальной формы поверхности M_m в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta G)$. Если поверхность M_m — типа 3, то поле ортогональных плоскостей $T_x(M_m)^{\perp}$ в каждой точке $x \in M_m$ содержит вектор $\vec{\xi}_x$ и пересекает гиперплоскость η_x по $(n-m)$-мерной плоскости. Пусть эта плоскость натянута на векторы $\{\vec{N}_{\alpha_1}, \vec{N}_u\}$, а ортогонально оснащающая плоскость на векторы $\{\vec{N}_{\alpha_1}, \vec{\xi}, \vec{N}_u\}$. В этом случае вторая фундаментальная форма примет вид:

$$\tilde{\Lambda}^I_{ab}\theta^a\theta^b\vec{e}_I = (H^{\alpha_1}_{ab}\vec{N}_{\alpha_1} + H^{2m+1}_{ab}\vec{\xi} + H^u_{ab}N_u)\,\theta^a\theta^b.$$

Если в формулах (4.35) обращаются в нуль компоненты $H^{\alpha_1}_{abc}$, H^u_{abc}, то говорят, что вторая фундаментальная форма η-параллельна [34].

Если обращаются в нуль компоненты $H^{\alpha_1}_{abc}g^{ab}$, $H^u_{abc}g^{ab}$, то говорят, что вектор средней кривизны $\vec{H}$ η-параллелен [34].

7) Если вектор средней кривизны η-параллелен (см. § 4, п. 3), то f-структура в нормальном расслоении $N(M_m)^{\perp}$ параллельна, и M^m — плоское, то вторая фундаментальная форма η-параллельна [34].

8) Если вектор средней кривизны η-параллелен, f-структура в нормальном расслоении $N(M_m)^{\perp}$ η-параллельна, M_m — постоянной кривизны r и выполняется условие $\frac{1}{4}(c+3) \geqslant r$, то либо $r \leqslant 0$, либо M_m — вполне геодезическое и $r = \frac{1}{4}(c+3)$ [34].

9) Если f-структура в нормальном расслоении $N(M_m)^{\perp}$ η-параллельна и M_m — постоянной кривизны r и выполняется условие $\frac{1}{4}(c+3) \geqslant r$, то либо M_m — вполне геодезическое, либо плоское [34].

10) Если вектор средней кривизны η-параллелен, f-структура в нормальном расслоении η-параллельна и второй фундаментальный тензор коммутативен, то M_m — либо вполне геодезическое, либо $c \leqslant -3$ [34].

11) Если вторая фундаментальная форма η-параллельна, f-структура в нормальном расслоении $N(M_m)^{\perp}$ параллельна и второй фундаментальный тензор поверхности коммутативен, то M_m либо вполне геодезическое, либо плоское [23].

В работе [23] изучены антиинвариантные подмногообразия типа 3 в сасакиевой пространственной форме $M_{n+1}(c)$, когда компоненты тензора кривизны удовлетворяют условиям, которые в ортонормированном репере $\{\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_m, \vec{\varepsilon}_{m+1} = \vec{\xi}, \vec{\varepsilon}_{m+2}, \ldots, \vec{\varepsilon}_{\frac{n}{2}+1}, \varphi\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \varphi\vec{\varepsilon}_m, \varphi\vec{\varepsilon}_{m+2}, \ldots, \varphi\vec{\varepsilon}_{\frac{n}{2}+1}\}$ имеют вид:

$$R^{m+a}_{m+bcd} = -(\delta_c{}^a\delta_{bd} - \delta_d{}^a\delta_{bc}),$$

$$R^{m+a}_{\alpha_1 cd} = 0, \quad R^{\alpha_2}_{m+bcd} = 0, \quad R^{\alpha_2}_{\beta_2 cd} = 0, \tag{5.24}$$

где индексы $(m+a)$, $(m+b)$ принимают значения $m+1$, $m+2, \ldots, 2m$.

12) Если $c \neq -3$, $m \geqslant 3$ и тензор кривизны внешней связности γ удовлетворяют условию (5.24), то M_m постоянной кривизны [23].

13) Если $c \neq -3$, поверхность M_m — минимальная и тензор кривизны внешней связности удовлетворяет условию (5.24), то M_m — плоское [23].

14) Если $m \leqslant 3$, $c \neq -3$ вектор средней кривизны M_m η-параллелен и тензор кривизны нормальной связности удовлетворяет условию (5.24), то в $M_{n+1}(c)$ существует вполне геодезическое инвариантное подмногообразие $M_{2m+1}(c)$ такое, что подмногообразие, вложенное в $M_{2m+1}(c)$, является плоской антиинвариантной минимальной поверхностью [23].

Минимальные антиинвариантные подмногообразия в пятимерной сасакиевой пространственной форме изучены в работах [30], [28].

В работах [22], [34], [37] изучены компактные, компактные минимальные антиинвариантные подмногообразия типа 3 в сасакиевой пространственной форме.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.*, Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. В сб. «Пробл. геометрии. Т. 9 (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР)». М., 1979, 5—246 (РЖМат, 1980, 1А800)
2. *Домбровский Р. Ф.*, К геометрии касательно-оснащенных поверхностей в P_n. В сб. «Тр. Геометр. семинара. Т. 6 (Всес. ин-т науч. и техн. информ. АН СССР)». М., 1974, 171—188 (РЖМат, 1975, 3А714)
3. *Лаптев Г. Ф.*, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований. Тр. Моск. мат. о-ва, 1953, № 2, 275—382 (РЖМат, 1953, 433)
4. —, Многообразия, погруженные в обобщенные пространства. Тр. 4-го Всес. мат. съезда, 1961, Т. 2. Л., Наука, 1964, 226—233 (РЖМат, 1964, 12А391)
5. —, Основные инфинитезимальные структуры высших порядков. В сб. «Тр. Геометр. семинара. Т. I (Ин-т науч. информ. АН СССР)». М., 1966, 139—190 (РЖМат, 1967, 7А382)
6. —, Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I. В сб. «Тр. Геометр. семинара. Т. 3 (Всес. ин-т научн. и техн. информ. АН СССР)». М., 1971, 49—94 (РЖМат, 1972, 6А680)
7. —, *Остиану Н. М.*, $(f\xi\eta\rho)$-структура на дифференцируемых многообразиях. В сб. «Пробл. геометрии. Т. 7 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1975, 5—22 (РЖМат, 1976, 9А622)
8. *Норден А. П.*, Пространства аффинной связности. М., Наука, 1976
9. *Остиану Н. М.*, Распределение m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. II. В сб. «Тр. Геометр. семинара. Т. 3 (Всес.

ин-т научн. и техн. информ. АН СССР)». М., 1971, 95—114 (РЖМат, 1972, 6А681)
10. —, Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве. В сб. «Тр. Геометр. семинара. Т. 4 (Всес. ин-т научн. и техн. информ. АН СССР)». М., 1973, 71—120 (РЖМат, 1974, 5А695)
11. —, Дифференциально-геометрические структуры на дифференцируемых многообразиях. В сб. «Пробл. геометрии. Т. 8 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1977, 89—111 (РЖМат, 1978, 1А632)
12. —, *Домбровский Р. Ф., Поляков Н. Д.*, Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. II. Подмногообразия коразмерности 2 в контактном и почти контактном многообразиях. В сб. «Пробл. геометрии. Т. 13 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1981, 27—76
13. —, *Поляков Н. Д.*, Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. I. В сб. «Пробл. геометрии. Т. 11 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1980, 3—64 (РЖМат, 1980, 11А728)
14. —, *Рыжков В. В., Швейкин П. И.*, Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т научн. и техн. информ. М., 1974, 4, 7—70 (РЖМат, 1974, 3А451)
15. *Поляков Н. Д.*, Геометрия дифференцируемых многообразий почти контактной структуры. I. ВИНИТИ АН СССР. М., 1976. 26 с., библиогр. 10 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 26 авг. 1976, № 3200—76 Деп.) (РЖМат, 1976, 10А417ДЕП)
16. —, Дифференциально-геометрические структуры на почти контактном многообразии. В сб. «Пробл. геометрии. Т. 8 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1977, 113—137 (РЖМат, 1978, 11А639)
17. *Arca Giuseppe*, Sous-varietes anti-invariants d'une variete sasakienne a vecteur de courbure moyenne φ-quasi parallele. C. R. Acad. Sci.», 1979, *AB289*, № 15, A759—A761 (РЖМат, 1980, 9А631)
18. *Blair D. E.*, Contact manifolds in Riemannian geometry. Lect. Notes Math.», 1976, *509*, 146 pp. (РЖМат, 1976, 9А640)
19. —, *Ogine K.*, Geometry of integral submanifolds of a contact distribution. Illinois J. Math.», 1975, *19*, № 2, 269—276 (РЖМат, 1976, 5А663)
20. —, —, Positively curved integral submanifolds of a contact distribution. Ill. J. Math., 1975, *19*, № 4, 628—631 (РЖМат, 1977, 4А709)
21. *Chen B. Y., Ogive K.*, On totally real submanifolds. Trans. Amer. Math. Soc., 1974, *193*, 257—266
22. *Ishihara I.*, Anti-invariant submanifolds of a Sasakian space form. Kodai Math. J., 1979, *2*, № 2, 171—186 (РЖМат, 1980, 1А816)
23. —, Anti-invariant submanifolds satisfying a certain condition on normal connection. Kodai Math. J., 1979, *2*, № 3, 371—383 (РЖМат, 1980, 7А678)
24. *Kon Madahiro*, Remarks on anti-invariant submanifolds of a Sasakian manifold. Tensor, 1976, *30*, № 3, 239—246 (РЖМат, 1977, 8А685)
25. *Ludden G. D., Okumura M., Yano K.*, Anti-invariant submanifolds of almost contact metric manifolds. Math. Ann., 1977, *225*, № 3, 253—261 (РЖМат, 1977, 8А684)
26. *Mihova-Nehmer V.*, On the generalized common curvature of some subspaces of the tangent space of an almost contact metric manifold. «Докл. Болг. АН», 1979, *32*, № 9, 1175—1178 (РЖМат, 1980, 9А629)
27. *Sasaki S.*, A characterization of contact transformations. Tohoku Math. J., 1964, *16*, 285—290
28. *Yamaguchi Seiichi, Ikawa Tashihiko*, On compact minimal C-totally real submanifolds. Tensor, 1975, *29*, № 1, 30—34 (РЖМат, 1976, 3А808)
29. —, —, C-totally real submanifolds. J. Different. Geom.», 1976, *11*, № 1, 59—64 (РЖМат, 1977, 4А721)

30. —, *Kon Masahiro, Moyahara Vasushi,* A theorem on *C*-totally real minimal surface. «Proc. Amer. Math. Soc.», 1976, *54*, 276—280 (РЖМат, 1977, 1A686)
31. *Yano Kentaro,* Differential geometry of anti-invariant submanifolds of a Sasakian manifolds. Boll. Unione mat. ital., 1975, *12*, № 3, suppl., 279—296 (РЖМат, 1977, 1A671)
32. —, Differential geometry of totally real submanifolds. Topics in Differential Geometry, 1976, 173—184
33. —, Anti-invariant submanifolds of a Sasakian manifolds with vanishing contact Bochner curvature. tensor. J. Diff. Geom., 1977, *12*, № 2, 157—170 (РЖМат, 1979, 2A541)
34. —, *Kon Masahiro,* Anti-invariant submanifolds. Lect. Notes. Pure and Appl. Math., Vol. 21. Marcel Dekker. New York — Basel, 1976, viii, 183 pp. (РЖМат, 1977, 7A629K)
35. —, —, Totally real submanifolds of complex space form. II. Kodai Math. Semin. Repts., 1976, *27*, 385—399 (РЖМат, 1977, 1A685)
36. —, —, Totally real submanifolds of complex space form. I. Tohoku Math. J., 1976, *28*, 215—225 (РЖМат, 1977, 1A684)
37. —, —, Anti-invariant submanifolds of Sasakian space forms. I. Tohoku Math. J., 1977, *29*, № 1, 9—23 (РЖМат, 1977, 11A620)
38. —, —, Anti-invariant submanifolds of Sasakian space forms. II. J. Korean Math. Soc., 1976, *13*, 1—14.