ДЕКАБРЬ 1967, ТОМ III, № 12

УДК 517.933

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОРГАНИЗАЦИИ СКОЛЬЖЕНИЯ В ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Н. Г. ЯРОВОЙ

В ряде работ [1—4, 7] рассматривались системы регулирования с переменной структурой. Особенностью таких систем является то, что, изменяя некоторые параметры системы автоматического регулирования, добиваются выхода системы в скользящий режим. Как правило, при этом часть поверхности переключения являлась поверхностью скольжения. Так, например ([2], стр. 1290), для системы дифференциальных уравнений третьего порядка вида

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = -cx - by - az - \alpha Kx, \tag{1}$$

где a, b, c — постоянные; $|\alpha| \leqslant 1$; K — положительный параметр, изменяющийся в широких пределах, закон переключения выбирается по правилу

$$\alpha = \operatorname{sign} x(Ax + By + z).$$

Здесь поверхностью переключения является поверхность, состоящая из двух плоскостей $x=0$, $Ax_1+By+z=0$, одна из которых $Ax+By+z=0$ является поверхностью скольжения, другая $x=0$ прошивается траекториями системы дифференциальных уравнений (1).

В настоящей работе рассмотрен случай, когда возможна организация скольжения на обеих плоскостях переключения. При этом найдены необходимые и достаточные условия существования скольжения на поверхности переключения, которая представляет собой пару пересекающихся плоскостей; доказано попадание изображающей точки фазового пространства на поверхность скольжения. Устойчивость невозмущенного движения динамической системы характеризуется попаданием изображающей точки фазового пространства на поверхность переключения и устойчивым движением по ней.

§ 1. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений третьего порядка вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + x_{23}x_3, \\ \dot{x}_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \alpha b x_3, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где a_{ik} $(i = 1, 2, 3; \quad k = 1, 2, 3)$ — постоянные величины; b — положительный параметр, изменяющийся в широких пределах; α удовлетворяет условию $|\alpha| \leqslant 1$.

Выберем закон переключения α по правилу

$$\alpha = \operatorname{sign}(Ax_1 + Bx_2 + Cx_3)(Ax_1 + Bx_2 - Cx_3),$$

где A, B, C — положительные постоянные.

Поставим задачу: найти необходимые и достаточные условия существования скольжения на всей поверхности переключения, которая представляет собой пару пересекающихся плоскостей

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0,$$

$$Ax_1 + Bx_2 - Cx_3 = 0$$

фазового пространства переменных x_1, x_2, x_3.

Найдем производную функции

$$\omega = (Ax_1 + Bx_2 + Cx_3)(Ax_1 + Bx_2 - Cx_3)$$

по времени t в силу системы дифференциальных уравнений (1.1). Значение производной функции ω по времени t на плоскости $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$ обозначим через $\frac{d\omega_1}{dt}$, а на плоскости $Ax_1 + Bx_2 - Cx_3 = 0$ — через $\frac{d\omega_2}{dt}$, получим

$$\frac{d\omega_1}{dt} = 2(Ax_1 + Bx_2)\Bigg[\Bigg(a_{11}A + a_{21}B - a_{23}\frac{AB}{C} + Ca_{31} - a_{13}\frac{A^2}{C} - a_{33}A - \alpha bA\Bigg)x_1 + \Bigg(a_{12}A + a_{22}B + a_{32}C - a_{23}\frac{B^2}{C} - a_{13}\frac{AB}{C} - a_{33}B - \alpha bB\Bigg)x_2\Bigg],$$

$$\frac{d\omega_2}{dt} = 2(Ax_1 + Bx_2)\Bigg[\Bigg(a_{11}A + a_{21}B - a_{31}C + a_{13}\frac{A^2}{C} + a_{23}\frac{AB}{C} - a_{33}A - \alpha bA\Bigg)x_1 + \Bigg(a_{12}A + a_{22}B - a_{32}C + a_{23}\frac{B^2}{C} + a_{13}\frac{AB}{C} - a_{33}B - \alpha bB\Bigg)x_2\Bigg].$$

Для того чтобы существовало скольжение в каждой точке поверхности $\omega = 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия ([5], стр. 421)

$$\lim_{\omega \to +0} \frac{d\omega}{dt} \leqslant 0, \quad \lim_{\omega \to -0} \frac{d\omega}{dt} \geqslant 0, \tag{1.2}$$

что в нашем случае запишется так:

$$\frac{d\omega_1}{dt} \leqslant 0 \quad \text{при} \quad \alpha = +1,$$

$$\frac{d\omega_2}{dt} \leqslant 0 \quad \text{при} \quad \alpha = +1, \tag{1.3}$$

$$\frac{d\omega_1}{dt} \geqslant 0 \quad \text{при} \quad \alpha = -1,$$

$$\frac{d\omega_2}{dt} \geqslant 0 \quad \text{при} \quad \alpha = -1.$$

Причем условия (1.3) должны выполняться при любых x_1, x_2.

Введем обозначения:

$$D = a_{11}A + a_{21}B - a_{23}\frac{AB}{C} + a_{31}C - a_{13}\frac{A^2}{C} - a_{33}A - \alpha bA,$$

$$E = a_{12}A + a_{22}B + a_{32}C - a_{23}\frac{B^2}{C} - a_{13}\frac{AB}{C} - a_{33}B - \alpha bB,$$

$$D_1 = a_{11}A + a_{21}B - a_{31}C + a_{13}\frac{A^2}{C} + a_{23}\frac{AB}{C} - a_{33}A - \alpha bA,$$

$$E_1 = a_{12}A + a_{22}B - a_{32}C + a_{13}\frac{AB}{C} + a_{23}\frac{B^2}{C} - a_{33}B - \alpha bB,$$

тогда при $A > 0$ получим

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{dt} &= 2AD\left[\left(x_1 + \frac{AE+BD}{2AD}x_2\right)^2 - \frac{(AE-BD)^2}{4A^2D^2}x_2^2\right], \\ \frac{d\omega_2}{dt} &= 2AD_1\left[\left(x_1 + \frac{AE_1+BD_1}{2AD_1}x_2\right)^2 - \frac{(AE_1-BD_1)^2}{4A^2D_1^2}x_2^2\right]. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Так как знак $\frac{d\omega_1}{dt}$ и $\frac{d\omega_2}{dt}$ в силу условия (1.3) зависит только от α и не зависит от x_1, x_2, то имеем

$$AE - BD \equiv 0, \quad AE_1 - BD_1 \equiv 0, \tag{1.5}$$

откуда следуют условия

$$\begin{aligned} &ABa_{22} + A^2a_{12} + ACa_{32} - a_{11}AB - a_{21}B^2 - BCa_{31} \equiv 0, \\ &ABa_{22} + A^2a_{12} + BCa_{31} - ACa_{32} - a_{11}AB - a_{21}B^2 \equiv 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Учитывая, что неравенства (1.3) выполняются одновременно при $\alpha = \pm 1$, из тождеств (1.6) получим

$$\begin{aligned} &ABa_{22} + A^2a_{12} - a_{11}AB - a_{21}B^2 = 0, \\ &Aa_{32} - Ba_{31} = 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

При выполнении условий (1.7) имеем

$$\frac{d\omega_1}{dt} = 2D(Ax_1 + Ax_2)^2,$$

$$\frac{d\omega_2}{dt} = 2D_1(Ax_1 + Bx_2)^2.$$

Отсюда следует, используя (1.3), что

$$D \leqslant 0 \quad \text{и} \quad D_1 \leqslant 0 \quad \text{при} \quad \alpha = +1,$$

$$D \geqslant 0 \quad \text{и} \quad D_1 \geqslant 0 \quad \text{при} \quad \alpha = -1.$$

Возвращаясь к старым обозначениям и объединяя последние неравенства, получим

$$\left| a_{11}A + a_{21}B \pm a_{31}C \mp a_{13}\frac{A^2}{C} \mp a_{23}\frac{AB}{C} - a_{33}A \right| \leqslant bA. \tag{1.8}$$

Очевидно, условия (1.7) и (1.8) являются и достаточными.

Теорема 1. *Для существования скольжения на поверхности переключения*

$$(Ax_1 + Bx_2 + Cx_3)(Ax_1 + Bx_2 - Cx_3) = 0$$

фазового пространства переменных x_1, x_2, x_3, необходимо и достаточно выполнения условий (1.7) и (1.8).

§ 2. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЮЩИХ ПРОЦЕСС СКОЛЬЖЕНИЯ ПО ПОВЕРХНОСТИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ

Процесс скольжения на плоскости $Ax_1 + Bx_2 - Cx_3 = 0$ фазового пространства переменных x_1, x_2, x_3 описывается системой дифференциальных уравнений ([6], стр. 680)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \left(a_{11} + a_{13}\frac{A}{C}\right)x_1 + \left(a_{12} + a_{13}\frac{B}{C}\right)x_2, \\ \dot{x}_2 &= \left(a_{21} + a_{23}\frac{A}{C}\right)x_1 + \left(a_{22} + a_{23}\frac{B}{C}\right)x_2, \end{aligned} \tag{2.1}$$

корни характеристического уравнения которой равны

$$\lambda_1 = a_{22} - \frac{B}{A}a_{21},$$

$$\lambda_2 = a_{23}\frac{B}{C} + a_{11} + a_{13}\frac{A}{C} - a_{21}\frac{B}{A}.$$

Следовательно, для асимптотической устойчивости невозмущенного движения на плоскости $Ax_1 + Bx_2 - Cx_3 = 0$ фазового пространства переменных x_1, x_2, x_3 необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$a_{22} - a_{21}\frac{B}{A} < 0,$$

$$a_{23}\frac{B}{C} + a_{11} + a_{13}\frac{A}{C} - a_{21}\frac{B}{A} < 0.$$

Аналогично процесс скольжения на плоскости $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$ фазового пространства переменных x_1, x_2, x_3 описывается системой дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \left(a_{11} - a_{13}\frac{A}{C}\right)x_1 + \left(a_{12} - a_{13}\frac{B}{C}\right)x_2, \\ \dot{x}_2 &= \left(a_{21} - a_{23}\frac{A}{C}\right)x_1 + \left(a_{22} - a_{23}\frac{B}{C}\right)x_2. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Корни характеристического уравнения этой системы имеют вид

$$\gamma_1 = a_{22} - a_{21}\frac{B}{A},$$

$$\gamma_2 = a_{21}\frac{B}{A} + a_{11} - a_{23}\frac{A}{C} - a_{13}\frac{A}{C}.$$

Таким образом, чтобы невозмущенное движение на обеих плоскостях было асимптотически устойчиво, нужно, чтобы выполнялись условия

$$a_{22} - a_{21}\frac{B}{A} < 0,$$

$$|Aa_{13} + Ba_{23}| < -C\left(a_{11} - a_{21}\frac{B}{A}\right).$$

Итак доказана

Теорема 2. *Для того чтобы на поверхности переключения невозмущенное движение было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$a_{22} - a_{21}\frac{B}{A} < 0,$$

$$|Aa_{13} + Ba_{23}| < -C\left(a_{11} - a_{21}\frac{B}{A}\right). \tag{2.3}$$

Замечание. Прямая

$$\begin{aligned} &Ax_1 + Bx_2 = 0, \\ &x_3 = 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

является интегральной прямой систем дифференциальных уравнений (1.1), (2.1), (2.2), в чем легко убедиться. В самом деле, подставляя (2.4) в (1.1), (2.1) и (2.2), получим

$$-\frac{B}{A} = \frac{a_{11}B - a_{12}A}{a_{21}B - a_{22}A},$$

что эквивалентно условию $ABa_{11} - a_{12}A^2 + a_{21}B^2 - ABa_{22} = 0$, которое является условием скольжения.

§ 3. ПОПАДАНИЕ ИЗОБРАЖАЮЩЕЙ ТОЧКИ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА НА ПОВЕРХНОСТЬ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ

Систему дифференциальных уравнений (1.1) заменой переменных вида

$$\begin{aligned} Az_1 &= Ax_1 + Bx_2, \\ z_2 &= x_2, \\ z_3 &= Ax_1 + Bx_2 + Cx_3, \end{aligned} \tag{3.1}$$

используя условия существования скольжения (1.7), приведем к виду

$$\dot{z}_1 = b_{11}z_1 + b_{13}z_3,$$

$$\begin{aligned}\dot z_2 &= \left(a_{31} - a_{23}\frac{A}{C}\right) z_1 + \left(a_{22} - a_{21}\frac{B}{A}\right) z_2 + \frac{a_{23}}{C} z_3,\\ \dot z_3 &= (b_{31} - \alpha bA) z_1 + (b_{33} + \alpha b) z_3,\end{aligned} \tag{3.2}$$

где введены обозначения

$$b_{11} = \left(a_{11} + a_{21}\frac{B}{A} - a_{13}\frac{A}{C} - a_{23}\frac{B}{C}\right),$$

$$b_{13} = \frac{a_{13}}{C} + \frac{a_{23}B}{AC}, \qquad b_{33} = \frac{A}{C} a_{13} + \frac{B}{C} a_{23} + a_{33},$$

$$b_{31} = Aa_{11} + Ba_{21} + Ca_{31} - \frac{A^2}{C} a_{13} - \frac{AB}{C} a_{23} - a_{33}A.$$

Преобразованием (3.1) область

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 \geqslant 0,$$

$$Ax_1 + Bx_2 - Cx_3 \geqslant 0$$

фазового пространства переменных x_1, x_2, x_3 переводится в область

$$z_3 \geqslant 0,$$

$$z_3 - 2Az_1 \leqslant 0. \tag{3.3}$$

Следовательно, в области (3.3) действует система дифференциальных уравнений (3.2) с $\alpha = +1$.

Характеристическое уравнение системы дифференциальных уравнений (3.2) распадается на два уравнения вида

$$\lambda = a_{22} - a_{21}\frac{B}{A},$$

$$\lambda^2 - (b_{11} + b_{33} + b)\lambda + b_{13}(b_{31} - bA) = 0. \tag{3.4}$$

Обозначим корни уравнения (3.4) через λ_2 и λ_3 и пусть выполняется условие $\lambda_3 - \lambda_2 > 0$.

Допустим, что в начальный момент $t = 0$ точка $M_0(z_1^0, z_2^0, z_3^0)$ фазового пространства переменных z_1, z_2, z_3 находится в области (3.3), т. е. ее координаты удовлетворяют условию

$$z_3^0 \geqslant 0, \qquad z_3^0 - 2Az_1^0 \leqslant 0. \tag{3.5}$$

Предположим, что точка M_0 при своем движении по траектории системы дифференциальных уравнений (3.2) при $\alpha = +1$ попадает на плоскость $z_3 = 0$ в момент t_1 $(t_1 \geqslant 0)$. Тогда будем иметь

$$t_1 = \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_2} \ln \frac{z_3^0(\lambda_3 - b_{33} - b) - z_1^0(b_{31} - Ab)}{z_3^0(\lambda_2 - b_{33} - b) - z_1^0(b_{31} - Ab)}.$$

При сделанных выше предположениях $t_1 \geqslant 0$, если выполнено условие

$$\frac{z_3^0(\lambda_3 - \lambda_2)}{z_3^0(\lambda_2 - b_{33} - b) - z_1^0(b_{31} - Ab)} \geqslant 0,$$

эквивалентное условию

$$z_3^0(\lambda_2 - b_{33} - b) - z_1^0(b_{31} - Ab) > 0. \tag{3.6}$$

Аналогично, если точка $M_1(z_1', z_2', z_3')$, координаты которой удовлетворяют условию

$$z_3' \geqslant 0, \quad z_3' - 2Az_1' \leqslant 0,$$

при своем движении вдоль траектории системы дифференциальных уравнений (3.2) при $\alpha = +1$ попадает на плоскость $z_3 - 2Az_1 = 0$ при $t = t_2$, то

$$t_2 = \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_2} \times$$

$$\times \ln \frac{[2A(\lambda_2 - b_{33} - b) - b_{31} + bA][z_3'(\lambda_3 - b_{33} - b) - z_1'(b_{31} - bA)]}{[2A(\lambda_3 - b_{33} - b) - b_{31} + bA][z_3'(\lambda_2 - b_{33} - b) - z_1'(b_{31} - bA)]}.$$

На плоскости $z_3 - 2Az_1 = 0$ фазового пространства переменных z_1, z_2, z_3 в случае попадания на нее точки M_1 $t_2 \geqslant 0$. Следовательно, должно выполняться условие

$$\frac{(b_{31} - bA)(\lambda_2 - \lambda_3)(z_3' - 2Az_1')}{[2A(\lambda_3 - b_{33} - b) - b_{31} + bA][z_3'(\lambda_2 - b_{33} - b) - z_1'(b_{31} - bA)]} \geqslant 0. \quad (3.7)$$

Числитель неравенства (3.7) в силу сделанных предположений и условий (1.8) отрицателен. Таким образом, условие (3.7) эквивалентно условию

$$z_3'(\lambda_2 - b_{33} - b) - z_1'(b_{31} - bA) < 0$$

при

$$2A(\lambda_3 - b_{33}) - bA - b_{31} > 0. \quad (3.8)$$

Рассмотрим функцию

$$v(z_1, z_3) = z_3(\lambda_2 - b_{33} - b) - z_1(b_{31} - bA), \quad (3.9)$$

определенную и непрерывную в области (3.3). Очевидно, при выполнении условий (1.8) будем иметь

$$v(z_1, 0) = -z_1(b_{31} - bA) \geqslant 0.$$

С другой стороны, подставляя $z_3 = 2Az_1$ в (3.9), получим

$$v(z_1, 2Az_1) \leqslant 0,$$

если выполняется условие

$$2A(\lambda_2 - b_{33}) - b_{31} - bA < 0. \quad (3.10)$$

Таким образом, при выполнении условий (3.10) функция $v(z_1, z_2)$ на границе области (3.3) принимает значения разных знаков и, следовательно, она обращается в нуль внутри области (3.3), т. е. плоскость

$$z_3(\lambda_2 - b_{33} - b) - z_1(b_{31} - bA) = 0$$

делит область (3.3) на две части:

$$z_3(\lambda_2 - b_{33} - b) - z_1(b_{31} - bA) \leqslant 0, \quad z_3 - 2Az_1 \leqslant 0, \quad (3.11)$$

$$z_3(\lambda_2 - b_{33} - b) - z_1(b_{31} - bA) > 0, \quad z_3 \geqslant 0. \quad (3.12)$$

Итак, каждая начальная точка, расположенная в области (3.11) при $t = 0$, при своем движении по траекториям системы дифференциальных уравнений (3.2) попадет на плоскость $z_3 - 2Az_1 = 0$ и каждая точка, расположенная в области (3.12) при $t = 0$, при своем движении попадет на плоскость $z_3 = 0$, если выполнены условия (3.8), (3.10).

Рассмотрим теперь область

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 \leqslant 0,$$
$$Ax_1 + Bx_2 - Cx_3 \geqslant 0$$

фазового пространства переменных x_1, x_2, x_3, которая преобразованием (3.1) переходит в область

$$z_3 \leqslant 0, \quad z_3 - 2Az_1 \leqslant 0 \tag{3.13}$$

фазового пространства переменных z_1, z_2, z_3. Следовательно, в области (3.13) действует система дифференциальных уравнений (3.2) при $\alpha = -1$.

Характеристическое уравнение системы дифференциальных уравнений (3.2) распадается на два уравнения вида

$$\rho = a_{22} - a_{21}\frac{B}{A},$$
$$\rho^2 - (b_{11} + b_{33} - b)\rho + b_{13}(b_{31} + bA) = 0. \tag{3.14}$$

Корни уравнения (3.14) обозначим через ρ_2 и ρ_3 и пусть, кроме того, $\rho_3 - \rho_2 > 0$.

Проводя точно такие же рассуждения для области (3.13), как при рассмотрении области (3.3), получим условия

$$2A(\rho_3 - b_{33}) - b_{31} + bA > 0,$$
$$2A(\rho_2 - b_{33}) - b_{31} + bA < 0. \tag{3.15}$$

Таким образом, если выполнены условия (3.15), то все точки, расположенные в момент $t = 0$ в области

$$z_3(\rho_2 - b_{33} + b) - z_1(b_{31} + bA) \leqslant 0,$$
$$z_3 \leqslant 0$$

фазового пространства переменных z_1, z_2, z_3, при своем движении по траекториям системы дифференциальных уравнений (3.2) попадут на плоскость $z_3 = 0$, а все начальные точки, расположенные в области

$$z_3(\rho_2 - b_{33} + b) - z_1(b_{31} + bA) > 0,$$
$$z_3 - 2Az_1 \leqslant 0,$$

при своем движении попадут на плоскость

$$z_3 - 2Az_1 = 0.$$

Рассмотрение остальных областей, где α принимает значения $+1$ и -1, приводит к точно таким же результатам, как (3.8), (3.10) и (3.15).

Очевидно, условия (3.8), (3.10) и (3.15) являются не только необходимыми, но и достаточными.

Следует заметить, что эти условия при достаточно больших b выполняются всегда.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1 для системы дифференциальных уравнений (1.1). Тогда для попадания изображающей точки фазового пространства переменных x_1, x_2, x_3 на поверхность переключения необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (3.8), (3.10) и (3.15).*

В качестве примера рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}_1 = -5x_1 + x_2 + x_3,$$
$$\dot{x}_2 = 6x_1 - 4x_2 - x_3,$$
$$\dot{x}_3 = 2x_1 + x_2 + 8x_3 + \alpha b x_3,$$

где

$$\alpha = \operatorname{sign}(2x_1 + x_2 + x_3)(2x_1 + x_2 - x_3).$$

При $b = 20$ все условия теорем 1, 2, 3 выполняются.

Автор благодарит Е. А. Барбашина за ценные советы, которые были крайне необходимы для написания статьи.

Литература

1. Емельянов С. В., Таран В. А. Изв. АН СССР, Энергетика и автоматика, № 3, 183—188, 1962.
2. Барбашин Е. А., Табуева В. А. Автоматика и телемеханика, **23**, № 10, 1290—1297, 1962.
3. Емельянов С. В., Уткин В. И. ДАН СССР, **152**, № 2, 299—301, 1963.
4. Геращенко Е. И. Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, № 4, 157—163, 1963.
5. Долголенко Ю. В. Труды 2-го Всесоюзного совещания по теории авт. регулирования. АН СССР, **1**, 1955, стр. 421—438.
6. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. Труды 1-го Международного конгресса IFAC. Теория непрерывных систем. Изд. АН СССР, 1961, стр. 679—688.
7. Емельянов С. В., Таран В. А., Уткин В. И. Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, № 3, 132—138, 1965.

*Поступила в редакцию
23 августа 1966 г.*

*Уральский государственный
университет им. А. М. Горького*