Для доказательства пункта г) достаточно применить лемму 6 к ряду

$$1+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^m}\chi_{2^m+k}(t)\frac{1}{(m+1)\sqrt{2^m}}.$$

Теорема полностью доказана.

Замечание 3. В дополнение к пункту б) теоремы отметим, что существуют полиномы (с монотонными коэффициентами) второго и третьего порядка, которые обращаются в нуль на множествах, мера которых равна 1/2 (см. замечание 2).

Замечание 4. А. Вероятно, от величины меры множества E, на котором ряд (1) сходится к нулю, зависит тот минимальный номер N, начиная с которого заведомо все коэффициенты a_m равны нулю. Из доказанной теоремы следует, что если $|E|=1/2$, то $N=4$, а если $|E|>1/2$, то $N=1$. Мы не знаем этой зависимости в общем случае.

Б. Нам неизвестно, имеются ли аналоги доказанной теоремы для тригонометрической системы или для других классических полных систем. Некоторый сдвиг в этом направлении осуществлен в работах [5] и [6].

В. Доказанная теорема допускает некоторое обобщение в сторону ослабления условия $\{a_m\}\in A$. Однако мы не знаем оптимальных условий, при наложении которых на последовательность коэффициентов $\{a_m\}$ остается верным, например, утверждение пункта а) теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лузин Н. Н. Интеграл и тригонометрический ряд. М.—Л., 1951.
2. Алексич Г. Проблемы сходимости ортогональных рядов. М., 1963.
3. Ульянов П. Л. О рядах по системе Хаара. — Матем. сб., 1964, **63**, № 3, 356—391.
4. Ульянов П. Л. Некоторые результаты о рядах по системе Хаара. — Докл. АН СССР, 1982, **262**, № 3, 542—545.
5. Гапошкин В. Ф. О нулях тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами. — Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1981, № 9, 13—15.
6. Дьяченко М. И. О рядах Фурье с монотонно убывающими коэффициентами и некоторые вопросы гладкости сопряженных функций. — Сообщ. АН ГрузССР, 1981, **104**, № 3, 533—536.
7. Paley R. A remarkable series orthogonal functions. — Proc. London. Math. Soc., 1932, **34**, 241—279.
8. Marcinkiewicz J. Quelgues théorèmes sur les orthogonales. — Ann. Soc. polon. math., 1937, **16**, 84—96.
9. Ульянов П. Л. О рядах по системе Хаара с монотонными коэффициентами. — Изв. АН СССР. Сер. матем., 1964, **28**, 925—950.
10. Beyer W. A. Hausdorff dimension of level sets of some Rademacher series. — Pacif. J. Math., 1962, **12**, N 1, 35—46.

Поступила в редакцию
23.06.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА, 1983, № 6

УДК 510.225

В. А. Успенский, В. Г. Кановей

ПРОБЛЕМЫ ЛУЗИНА О КОНСТИТУАНТАХ И ИХ СУДЬБА

§ 1. Предпосылки проблем. С момента возникновения теории множеств в центре ее внимания была проблема континуума. В строгом смысле проблема континуума состоит в требовании доказать или опровергнуть континуум-гипотезу (в том или ином ее варианте; см. ниже). При более широком понимании проблема континуума состоит в том, чтобы выяснить, как соотносятся между собой следующие две мощности:

1) мощность континуума действительных чисел, равная $2^{\aleph_0}$ и обозначаемая через $\mathfrak{c}$, и

2) мощность множества всех не более чем счетных порядковых чисел (другими словами, наименьшая из мощностей несчетных вполне упорядоченных множеств), обозначаемая через $\aleph_1$.

Равенство $\mathfrak{c}=\aleph_1$ выражает один из распространенных вариантов континуум-гипотезы. При принятии аксиомы выбора это равенство равносильно основному варианту этой гипотезы, состоящему в предположении, что всякая мощность $\mathfrak{m}$, для которой $\aleph_0 \leqslant \mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{c}$, совпадает либо с $\aleph_0$, либо с $\mathfrak{c}$; мы называем этот вариант основным, поскольку именно так понимали континуум-гипотезу Кантор в 1878 г. ([9], с. 132) и Гильберт в 1900 г. [10]. В то же время многие авторы, например Н. Н. Лузин [5, 6] (в [8] с. 564, 679), П. С. Александров [13, с. 92], называют континуум-гипотезой именно равенство $\mathfrak{c}=\aleph_1$. (О так называемой «второй гипотезе континуума», ныне называемой также гипотезой Лузина, см. в [5, п. 9].)

Гипотетическое равенство $\mathfrak{c}=\aleph_1$ (как и его отрицание $\mathfrak{c}\neq\aleph_1$) отражает лишь один из аспектов вопроса о соотношении между $\mathfrak{c}$ и $\aleph_1$. Другие аспекты, возможно, более глубокие, хотя нередко и ускользающие от внимания математиков, проанализированы Н. Н. Лузиным (как с математической, так и с философской точек зрения) в работах [3,5,6] (в [8] с. 626—629, 553—556, 564—566, 679—680).

Альтернативой к континуум-гипотезе по традиции выступает неравенство $\mathfrak{c}>\aleph_1$, поскольку соотношение $\mathfrak{c} \geqslant \aleph_1$ обычно принимается как не вызывающее сомнений. Однако это соотношение отнюдь не бесспорно. Поясним, в чем тут дело.

Неравенство $\mathfrak{c} \geqslant \aleph_1$ означает, строго говоря, что существует *точечное множество* (множество, состоящее из точек действительной прямой $\mathbf{R}$), имеющее мощность ровно $\aleph_1$. Другими словами, существует ω_1-последовательность попарно-различных точек континуума $\mathbf{R}$. (Через ω_1 обозначается наименьшее несчетное порядковое число. Под ω_1-последовательностью понимается трансфинитная последовательность индексированных множеств, индексами которых служат все порядковые числа, меньшие, чем ω_1.) Вот обычное рассуждение, обосновывающее существование требуемой последовательности (другое доказательство см. в [13], гл. 3, § 4, теорема 20).

«Итак, нужно построить последовательность $\langle x_\nu : \nu<\omega_1 \rangle$ попарно-различных точек $\mathbf{R}$. Положим $x_0=0$ (например). Если $\nu<\omega_1$ и все точки x_μ, где $\mu<\nu$, уже построены, то счетное множество $\{x_\mu : \mu<\nu\}$ не может исчерпать всех точек континуума в силу того, что $\mathfrak{c} > \aleph_0$ по теореме Кантора. Следовательно, мы можем взять точку $x_\nu \in \mathbf{R}$, не совпадающую ни с одной из точек x_μ, где $\mu<\nu$».

Приведенное рассуждение, кажущееся простым и очевидным, при более глубоком анализе перестает быть таковым. В самом деле, по ходу построения точек x_ν нам приходится на каждом шагу выбирать точку x_ν из бесконечного, и даже несчетного, дополнения к множеству $\{x_\mu : \mu<\nu\}$, не имея никакого правила или закона, по которому следует производить такой выбор. В связи с этим, даже если признать аксиому выбора AC, обеспечивающую законность такого рода построений, результирующее множество $\{x_\nu : \nu<\omega_1\}$ будет лишено какой-либо индивидуальности. Если представить себе, что двое математиков отдельно осуществили наше построение, то они в принципе не смогут установить, что в результате получили одно и то же множество (ср. [13], гл. 3, § 4, замечание 3).

На эту трудность в доказательстве неравенства $\mathfrak{c} \geqslant \aleph_1$ указывал еще Лебег в письме к Борелю. Цитируя это письмо, Лузин [2, гл. III] (в [8] с. 173) формулирует (и приписывает Лебегу) следующую проблему:

Можно ли назвать (то есть существует ли «индивидуальный» пример) ω_1-последовательность попарно-различных точек континуума? Другими словами, можно ли указать конкретную совокупность точек континуума, имеющую мощность $\aleph_1$?

Эту проблему естественно называть *проблемой Лебега.* В работе [3] (в [8] с. 628) Лузин трактует ее как ослабленную форму проблемы континуума.

Пытаясь найти подходы к решению этой проблемы, имеющей не только математическое, но и философско-математическое значение, Лузин использовал методы, разработанные дескриптивной теорией множеств. К 30-м годам не было известно способов построения «индивидуальных» совокупностей из $\aleph_1$ точек. Был, однако, известен способ построения индивидуальной совокупности мощности $\aleph_1$, но состоящей не из точек, а из точечных множеств.

Это построение восходит к Лебегу: оно представляет собой побочный результат, извлекаемый из предложенного Лебегом в [11] примера функции, не входящей в классификацию Бэра. Конструкция Лебега излагается Лузиным в [1], п. 1 (в [8] с. 380—381), и, более подробно, в [2], гл. III (в [8] с. 166—169); усовершенствованное изложение см. в [13], с. 75—76. Анализ конструкции Лебега и ее геометрическая интерпретация привели Лузина к понятию решета, сыгравшему ключевую роль в доказательстве многих классических теорем дескриптивной теории множеств.

В подстрочном примечании в [2, с. 178] (перевод этого примечания в [7, с. 178] и [8, с. 150] неполон) Лузин указывает, что в [1] он «ввел в явном виде общее понятие решета..., но в действительности первый частный пример решета имеется у Лебега: это бинарное решето». (Бинарное решето Лебега анализируется Лузиным в [1, пп. 1—3], [2, гл. III], [5, п. 17]; см. [8, с. 380—383, 165—170, 580].) Однако Лебег в своем предисловии к [2] отказывается признать себя автором процедуры решет и отмечает, что «г-н Лузин не вполне счастлив, пока ему не удалось приписать другому своих собственных открытий».

Определение решета в наиболее общем виде дано в гл. III лузинских «Лекций» [2] (в [8] с. 151), где решетом (для построения линейных множеств) названо плоское множество любой природы. Однако для большинства приложений оказывается достаточным рассматривать плоские решета, которые можно накрыть счетным числом горизонтальных прямых. Именно такие решета (счетные прямолинейные решета в терминологии [2, гл. V]; в [8] с. 241) рассматриваются (и называются — как правило, при наложении на них некоторых дополнительных ограничений — просто решетами) в [1, 5, 6] и в других работах Лузина и его последователей.

С этим ограничением мы имеем следующее определение решета. *Решетом* называется всякая система C, состоящая из множеств $C_q \subseteq \mathbf{R}$, занумерованных действительными числами q, составляющими некоторое (свое для каждого решета) не более чем счетное множество $Q \subseteq \subseteq \mathbf{R}$. Множества C_q (*элементы* решета C) удобно представлять расположенными в плоскости на горизонтальных прямых с соответствующими ординатами q.

Часто рассматриваются *открытые* решета (это означает, что каждое множество C_q должно быть открытым в топологии $\mathbf{R}$), но можно рассматривать и решета другой природы, например *замкнутые* или *борелевские*, у которых все элементы C_q суть замкнутые или соответственно борелевские множества. В работе [4], п. 5, Лузин рассматривает решета, составленные из отрезков с рациональными концами, расположенных на горизонтальных прямых с попарно-различными рациональными ординатами; такие решета мы будем называть *простыми*. В мемуаре [1] рассматриваются решета, все элементы которых суть счетные объединения отрезков. Отметим, что в этом мемуаре дано первое систематическое изложение теории решет, и вообще впервые появляется слово «решето» (франц. *crible*, англ. *sieve*).

Всякое решето C определяет разбиение действительной прямой на множества $[C]$ и $[C]_*$ следующим образом. Пусть $x\in\mathbf{R}$. Тогда вертикальное сечение $C/x=\{q:x\in C_q\}$ может либо быть вполне упорядоченным в смысле естественного порядка действительных чисел, либо не быть таковым. В первом случае отнесем x к *внешнему* множеству $[C]$, а во втором — к *внутреннему* множеству $[C]_*$ (внутреннее множество называется также *просеянным* посредством решета C). В свою очередь, каждое из этих множеств разбивается на более простые множества, даваемые следующим определением для каждого порядкового числа $\nu<\omega_1$:

$[C]_\nu=\{x\in[C]:C/x$ имеет порядковый тип $\nu\}$;

$[C]_{*\nu}=\{x\in[C]_*:$ наибольший вполне упорядоченный начальный сегмент множества C/x имеет порядковый тип $\nu\}$.

Множества $[C]_\nu$ называются *внешними конституантами*; они попарно не имеют общих точек и дают $[C]$ в объединении. Множества $[C]_{*\nu}$ — *внутренние конституанты* — также попарно не пересекаются и дают в объединении соответственно множество $[C]_*$.

Если решето C открытое или хотя бы борелевское, то конституанты $[C]_\nu$ и $[C]_{*\nu}$ будут борелевскими множествами, множество $[C]_*$ принадлежит классу *А-множеств* (является проекцией плоского борелевского множества), а множество $[C]$ — классу *СА-множеств* (т. е. дополнений к A-множествам). Верно и обратное: каждое A-множество просеивается некоторым открытым решетом, то есть каждое A-множество (соответственно CA-множество) имеет вид $[C]_*$ (соответственно $[C]$) для подходящего открытого решета C. Эти и другие утверждения, связанные с решетами и конституантами, доказаны в [2]. Вообще, представление A-множеств и CA-множеств с помощью решет позволило придать теории этих множеств чрезвычайно изящный и законченный вид, что и было осуществлено Лузиным в его «Лекциях» [2].

Итак, каждое открытое решето C вполне недвусмысленным способом определяет две «индивидуальные» ω_1-последовательности, составленные каждая из $\aleph_1$ непересекающихся (возможно, пустых) борелевских множеств — ω_1-последовательность внешних конституант и ω_1-последовательность внутренних конституант (в объединении члены обеих последовательностей вместе дают всё пространство $\mathbf{R}$, так что все они не могут быть пустыми).

Особый интерес в этом плане привлекли внешние конституанты в связи с тем, что был найден [2, гл. III] (в [8] с. 164) критерий несчетности числа непустых (следовательно, и попарно-различных, так как конституанты не пересекаются) внешних конституант — неборелевость множества $[C]$. (Для внутренних конституант аналогичный критерий не имеет места: можно указать открытое решето C, такое, что все $[C]_{*\nu}$ непусты, а $[C]_*$ совпадает с $\mathbf{R}$.) Таким образом, если взять неборелевское A-множество, то совокупность непустых внешних конституант просеивающего его открытого решета образует индивидуальный пример системы борелевских точечных множеств, имеющей мощность $\aleph_1$.

§ 2. Постановка проблем. Если бы удалось построить открытое решето C, такое, что каждая конституанта $[C]_\nu$ содержала бы одну и только одну точку, то множество $[C]$ дало бы положительное решение проблемы Лебега. В связи с этим Лузин ставит в работах [5,6] (в [8] с. 553, 672) следующую проблему:

Проблема I. *Существует ли открытое решето C, такое, что каждая конституанта $[C]_\nu$ содержит ровно одну точку?*

Констатировав серьезные трудности на пути к решению этой проблемы (то есть к построению требуемого решета или к доказательству отсутствия таких решет), Лузин в цитированных работах (в [8] с. 554, 672) ставит следующую более слабую (то есть накладывающую менее жесткое требование на решето C) проблему:

Проблема II. *Существует ли неограниченное открытое решето C, такое, что каждая конституанта $[C]_\nu$ не более чем счетна?*

Решето называется *неограниченным*, если число определяемых им непустых внешних конституант несчетно.

Положительное решение проблемы II также привело бы к решению проблемы Лебега, так как объединение в числе $\aleph_1$ непустых не более чем счетных множеств имеет мощность $\aleph_1$. (Лузин указал [5], в [8] с. 555, на одну тонкость в этом рассуждении. Дело в том, что для доказательства утверждения о мощности $\aleph_1$-объединения непустых не более чем счетных множеств нужна, вообще говоря, аксиома выбора. Так что здесь аксиома выбора используется не для построения какого-нибудь специального множества, а для доказательства определенного свойства уже имеющегося множества. Впрочем, современные исследования показали, что в случае, когда объединяемые множества суть конституанты открытого решета, можно обойтись без аксиомы выбора. Об этом см. ниже в п. 3.2.)

Положительное решение проблемы II привело бы к решению еще одной фундаментальной проблемы дескриптивной теории множеств — проблемы существования несчетного CA-множества без совершенного ядра (то есть не имеющего непустых совершенных подмножеств). Известно, что в случае, если решето C открытое (или даже, вообще, борелевское), его внешнее множество $[C]$ (являющееся в этом случае CA-множеством) имеет совершенное ядро тогда и только тогда, когда хотя бы одна из внешних конституант несчетна (см. [2, гл. III]; в [8] с. 171). Поэтому для построения несчетного CA-множества без совершенного ядра было бы достаточно построить решето, удовлетворяющее требованиям проблемы II.

Отметим важное различие в постановке проблем I и II: требования проблемы I включают непустоту *каждой* конституанты $[C]_\nu$ в то время, как проблема II требует лишь, чтобы число непустых конституант было несчетным. Как будет показано ниже, это различие определяющим образом влияет на то, как решаются проблемы I и II. Мы сформулируем сейчас проблему, находящуюся как бы между проблемами I и II.

Проблема Ia. *Существует ли неограниченное открытое решето C, такое, что каждая конституанта $[C]_\nu$ содержит не более одной точки?*

Заметив ([5], п. 1; в [8] с. 555), что «при современном состоянии науки мы не имеем ни малейших указаний на вероятность решения проблемы II в том или ином направлении», Лузин еще более ослабляет требования к решету C, надеясь на этом пути нащупать природу трудностей, связанных с исследованием конституант. Особое значение имеет следующая проблема, поставленная в [2,5,6] и в ряде других работ Лузина 30-х годов (в [8] с. 173, 555, 672 и др.):

Проблема III. *Существует ли неограниченное открытое решето C, такое, что конституанты $[C]_\nu$ образуют ограниченную по рангу совокупность?*

Ранг борелевского множества X определяется как наименьшая возможная (конечная или счетная трансфинитная) длина построения X из интервалов с помощью борелевских операций. Точнее говоря, *рангом* множества X называется наименьшее число $\alpha<\omega_1$, такое, что X принадлежит классу K_α борелевской иерархии Валле-Пуссена (см. [2], гл. II; в [8] с. 52). Совокупность, состоящая из борелевских множеств, *ограничена по рангу,* когда для некоторого $\beta<\omega_1$ все принадлежащие рассматриваемой совокупности множества имеют ранг, меньший, чем β. (Отметим, что Лузин употреблял слово «класс» вместо «ранг».)

Положительное решение проблемы III было бы интересно, с одной стороны, самим механизмом доказательства, который мог бы дать ключ к положительному решению проблем I и II. С другой стороны, положительное решение проблемы III привело бы к решению поставленной Лузиным в [2, гл. III] и носящей более общий и фундаментальный характер *ограниченной* ⟨restreint⟩ *проблемы Лебега* (см. [8], с. 624; в русском переводе [2] в [8] на с. 172—173 эта проблема названа «узкой проблемой Лебега»):

Существует ли «индивидуальный» пример ограниченной по рангу совокупности, состоящей из $\aleph_1$ борелевских множеств?

В работе [3] (в [8] с. 629) эта проблема названа еще более слабой (по сравнению с проблемой Лебега, см. выше § 1) формой проблемы континуума.

Однако как не было известно способов построить «индивидуальный» пример совокупности из $\aleph_1$ точек, так и не существовало путей для выполнения более слабой задачи построения «индивидуального» примера ограниченной по рангу совокупности из $\aleph_1$ борелевских множеств. Ничего не дали в этом плане и последовательности конституант. Проведенное Лузиным [5, 6] (в [8] с. 559 и 675) исследование одного класса открытых решет (имеются в виду решета, получаемые пеановской сверткой так называемых пространственных универсальных решет), неограниченность (то есть несчетность числа непустых внешних конституант) которых была установлена в 30-е годы, показало, что последовательность внешних конституант таких решет не является ограниченной по рангу.

Наконец, Лузин [5,6] (в [8] с. 556, 673) ставит следующую проблему с еще более слабым требованием к решету:

Проблема IV. *Существует ли неограниченное открытое решето C, такое, что конституанты $[C]_\nu$ можно заключить в попарно-непересекающиеся борелевские множества, образующие ограниченную по рангу совокупность?*

(Здесь, отметим, не требуется, чтобы последовательность множеств-отделителей была задана каким-либо «эффективным» построением. Требуется лишь, чтобы для каждой конституанты существовало отделяющее множество.)

Однако и такое ослабление не привело к положительному результату. Как показано в [5,6], всякое решето C, принадлежащее классу решет, упомянутому только что в связи с ограниченной проблемой Лебега, обладает тем свойством, что его конституанты нельзя заключить в попарно-непересекающиеся борелевские множества, образующие ограниченную по рангу совокупность.

Руководствуясь той же идеей перехода от последовательности точек к последовательности борелевских множеств ограниченного ранга, но в связи с равенством $\mathfrak{c} = \aleph_1$, а не с неравенством $\mathfrak{c} \geqslant \aleph_1$, Лузин [2,4] (в [8] с. 173, где «restreint» переведено словом «узкая», и с. 654) пришел к постановке следующей *ограниченной* ⟨*restreint*⟩ *проблемы континуума:*

Можно ли разбить (то есть предъявить «индивидуальное» разбиение) действительную прямую $\mathbf{R}$ *на* $\aleph_1$ *непустых борелевских множеств ограниченного ранга?*

(Авторы взяли на себя смелость ввести в формулировку этой проблемы требование «индивидуальности» разбиения, отсутствующее в явном виде в текстах [2] и [4], но несомненно, подразумевавшееся Лузиным. Вообще, Лузин понимал слова «построить», «найти» как «предъявить индивидуальный пример»: см. [4], п. 2, в [8] с. 643—644; ср. также [5], п. 9, в [8] с. 564—566.)

Применительно к решетам ограниченная проблема континуума трансформируется в следующую «основную проблему теории аналитических совокупностей» Лузина ([4]; в [8] с. 658):

Проблема V. *Существует ли простое* (то есть составленное из отрезков с рациональными концами, которые помещены на рациональных расстояниях от оси абсцисс; см. § 1) *решето С, такое, что среди конституант* $[C]_\nu$ *и* $[C]_{*\nu}$ *имеется несчетное число непустых и все эти конституанты образуют ограниченную по рангу совокупность?*

Конституанты $[C]_\nu$ и $[C]_{*\nu}$, даваемые таким решетом, как раз и составили бы искомое разбиение континуума на $\aleph_1$ непустых борелевских множеств ограниченного ранга, которое имеет вполне «индивидуальный» характер.

Чистое доказательство существования разбиения $\mathbf{R}$ на $\aleph_1$ непустых борелевских множеств ограниченного ранга было дано Хаусдорфом [12] с помощью аксиомы выбора. Однако из выкладок [12] невозможно извлечь «индивидуальный» пример такого разбиения подобно тому, как из простого рассуждения, проведенного в начале § 1, невозможно извлечь «индивидуальное» точечное множество мощности $\aleph_1$.

Прежде чем перейти к изложению результатов, связанных с поставленными проблемами, несколько слов об их формулировках и нумерации.

Нумерация лузинских проблем I, II, III, IV взята нами из работ [5,6] и соответствует убывающей силе требований, предъявляемых к решету этими проблемами. Проблема, занумерованная римской цифрой V, поставлена в работе [4] и не снабжена там никаким номером. Мы сочли возможным присвоить этой проблеме номер V.

Проблемы I—IV поставлены Лузиным в [5,6] для открытых решет, а проблема V поставлена им в [4] для простых решет. В некоторых других работах Лузина проблема III упоминается в связи с решетами, составленными из счетных объединений отрезков (см., например, [8], с. 624). Однако можно показать, что все упомянутые типы решет равноправны по отношению к проблемам II, III, IV, V, а также по отношению к проблеме Ia. Точнее говоря, если существует решето C, удовлетворяющее требованиям одной из названных проблем, за исключением требования открытости или простоты, и составленное из счетных объединений отрезков (возможно, имеющих общие точки; к этому типу решет, заметим, относятся как открытые, так и простые решета), то, во-первых, существует *простое* решето C', удовлетворяющее требованиям той же проблемы, и, во-вторых, существует решето C'', составленное из удаленных на рациональные расстояния от оси абсцисс *интервалов* с рациональными концами и удовлетворяющее тем же требованиям. Эти решета C' и C'' получаются посредством не очень сложной перестройки исходного решета C.

Все проблемы, о которых шла речь, естественно рассматривать как разные аспекты общей проблемы соотношения мощностей $\aleph_1$ и $\mathfrak{c}$, или, лучше сказать, проблемы *представления* кардинала $\aleph_1$ в континууме. В сущности, две простейшие несчетные мощности $\aleph_1$ и $\mathfrak{c}$ получаются из счетной мощности $\aleph_0$ с помощью конструкций, между которыми столь мало общего, что вряд ли можно было бы ожидать не только построения «индивидуального» взаимно-однозначного соответствия между счетными порядковыми числами и точками $\mathbf{R}$ (это ясно осознавал Лузин; см. [5], п. 9; в [8] с. 565), но и построения «индивидуального» точечного множества мощности $\aleph_1$. С другой стороны, как мы видели выше, при обсуждении ограниченной проблемы Лебега, операция решета дает возможность строить неограниченные по рангу последовательности из $\aleph_1$ попарно-различных борелевских множеств.

Где лежит грань между этими явлениями? Как вообще соотносятся между собой поставленные проблемы, и в частности проблемы I, II, III, IV, V, имеющие точную математическую постановку? И наконец, а скорее, в первую очередь, каково решение этих проблем? Более или менее исчерпывающий ответ на эти вопросы удалось получить только в последние годы с помощью методов аксиоматической теории множеств.

§ 3. Судьба проблем. Первый (если не считать теоремы Лузина об эквивалентности проблемы II и проблемы существования несчетных CA-множеств без совершенного ядра) результат, касающийся поставленных проблем, получен П. С. Новиковым ([15]; в [17] с. 72—73): если существует решето, удовлетворяющее требованиям проблемы II, то существует и решето, удовлетворяющее требованиям проблемы Ia. Таким образом, проблемы Ia и II оказались эквивалентными. Этот результат, однако, никак не давал решение самим названным проблемам.

3.1. Невозможность отрицательного решения проблемы континуума, проблемы Лебега, ограниченной проблемы континуума, ограниченной проблемы Лебега и проблем Ia, II, III, IV. Дальнейший прогресс в исследовании этих проблем был связан с аппаратом конструктивных множеств Гёделя [14]. Грубо говоря, *конструктивными* называются множества, которые можно получить в ходе прямых трансфинитных построений $\langle x_\nu : \nu$ — порядковое число$\rangle$, где закон, предписывающий построение каждого x_ν по уже построенным множествам x_μ, предусматривает лишь просмотр самих этих x_μ для $\mu<\nu$ (но, скажем, не множеств, являющихся подмножествами каких-либо x_μ). Класс L всех конструктивных множеств является моделью аксиоматической теории множеств Цермело — Френкеля с аксиомой выбора [14]; эта теория обозначается аббревиатурой ZFC. Утверждение о том, что каждое множество конструктивно, называется *аксиомой конструктивности* и записывается через $V=L$ (поскольку через V принято обозначать класс всех множеств). Аксиома конструктивности не противоречит [14] аксиомам ZFC, и поэтому всякое ее следствие также не противоречит ZFC. В частности, континуум-гипотеза $\mathfrak{c}=\aleph_1$, являющаяся [14] следствием аксиомы $V=L$, не противоречит аксиомам ZFC.

Принято считать, что система ZFC непротиворечива и адекватно формализует все известные приемы математических рассуждений. Поэтому из указанного только что результата Гёделя следует вывод, что с помощью стандартных математических средств мы никогда не сможем *опровергнуть* континуум-гипотезу. (Это, однако, вовсе не значит, что континуум-гипотеза *доказана*. Невозможность опровержения не приводит автоматически к доказанности.)

Глубокое исследование конструктивного универсума L с точки зрения проблем дескриптивной теории множеств провел П. С. Новиков [16]. Оказалось, что из аксиомы конструктивности следует существование «индивидуального» взаимно-однозначного соответствия между счетными порядковыми числами и точками $\mathbf{R}$. Точнее говоря, без всяких дополнительных аксиом, обычными теоретико-множественными средствами строится «индивидуальное» взаимно-однозначное соответствие между счетными порядковыми числами и *конструктивными* точками $\mathbf{R}$. (Каждая точка из $\mathbf{R}$ отождествляется с соответствующим сечением в множестве рациональных чисел и тем самым рассматривается как множество. Поэтому мы можем говорить о конструктивности точек $\mathbf{R}$.) Аксиома конструктивности нужна только для того, чтобы доказать, что это соответствие вовлекает *все вообще* точки $\mathbf{R}$. Итак, аксиома конструктивности влечет положительное решение не только проблемы континуума, но и сформулированных выше проблемы Лебега, ограниченной проблемы Лебега и ограниченной проблемы континуума, и ни для одной из этих проблем нельзя получить *отрицательное* решение традиционными математическими средствами.

В той же работе [16] показано, что из аксиомы $V=L$ вытекает существование несчетного CA-множества без совершенного ядра. Построенный в [16] пример такого множества без труда трансформируется во вполне определенное открытое решето, удовлетворяющее требованиям проблемы II. (Фактически построение такого решета и доказательство не более чем счетности каждой внешней конституанты не требуют предположения $V=L$. Аксиома конструктивности используется лишь для доказательства неограниченности этого решета, то есть несчетности числа определяемых им непустых внешних конституант.) Таким образом, аксиома конструктивности влечет положительное решение проблемы II, а тем самым и проблем Ia, III, IV. В соответствии со сказанным выше отсюда следует вывод, что ни одну из этих проблем нельзя решить в *отрицательном* плане: нельзя доказать отсутствие решет требуемого вида, использовав лишь аксиомы ZFC, то есть обычные математические способы рассуждений.

3.2. Невозможность положительного решения проблемы континуума, проблемы Лебега и проблем Ia и II. С разработкой в начале 60-х годов метода вынуждения [18] стало возможным получать противоположные по направлению результаты. В статье [18] (см. также книги [19,25]) построена модель теории ZFC, в которой $\mathfrak{c}>\aleph_1$. (Это построение сводится, в сущности, к тому, что мы присоединяем к некоторой исходной счетной модели теории ZFC набор новых действительных чисел так, что этих добавленных чисел оказывается в полученном расширении больше, чем счетных порядковых чисел. Однако возникающие при этом трудности оказались столь серьезными, что их не удавалось преодолеть более двадцати лет после выхода работы [14].) Таким образом, было установлено, что континуум-гипотезу нельзя не только опровергнуть [14], но и доказать.

Метод вынуждения стал основным аппаратом многих замечательных исследований, образовавших новое заметное направление в математике, в том числе и связанных с рассматриваемыми проблемами. В частности, Леви [23] и Соловей [22] построили (в предположении существования недостижимого кардинала) и исследовали две очень интересные модели теоретико-множественных аксиом. В первой из этих моделей истинны все аксиомы ZFC (включая аксиому выбора!) и верна континуум-гипотеза $\mathfrak{c}=\aleph_1$, но вместе с тем:

1) нет ни одного «индивидуального» взаимно-однозначного соответствия между счетными порядковыми числами и точками $\mathbf{R}$ и

2) нет ни одной «индивидуальной» последовательности из $\aleph_1$ попарно-различных точек $\mathbf{R}$, а также

3) нет «индивидуальных» несчетных множеств действительных чисел без совершенного ядра.

В этих результатах «индивидуальность» понимается в строгом и весьма широком смысле — как возможность определить данный объект теоретико-множественной формулой, содержащей в качестве параметров порядковые числа, причем не обязательно счетные, и точки $\mathbf{R}$. В частности, всякое CA-множество является «индивидуальным» в этом смысле (причем даже может быть определено формулой, содержащей в качестве параметров лишь точки $\mathbf{R}$, но не порядковые числа); поэтому в первой модели Леви—Соловея:

4) нет несчетных CA-множеств без совершенного ядра.

Эти результаты показали, что проблему Лебега, проблему существования несчетного CA-множества без совершенного ядра и эквивалентные ей проблемы II и Ia нельзя решить не только в отрицательном плане (как это следует из результатов Новикова), но и в *положительном*. Таким образом, названные проблемы оказались *неразрешимыми* в ZFC, то есть с помощью стандартных математических рассуждений.

Вместе с тем в работах [20, 21, 24] установлено, что утверждение о существовании несчетного CA-множества без совершенного ядра и утверждение о существовании решета, удовлетворяющего требованиям проблемы II, эквивалентны следующему утверждению, имеющему более прозрачную теоретико-множественную природу:

($*$) существует точка $z\in\mathbf{R}$, такая, что множество $L[z]\cap\mathbf{R}$ несчетно (и все эти утверждения согласно сказанному ранее неразрешимы в ZFC). Через $L[z]$ обозначается класс всех множеств, конструктивных относительно z, то есть получающихся в ходе трансфинитных построений, где на каждом шагу можно апеллировать к z.

В сущности, в [21, 24] доказано следующее утверждение: если открытое решето C в некотором естественном смысле эффективно кодируется точкой $z\in\mathbf{R}$ и если CA-множество $[C]$ не содержит совершенного ядра, то $[C]\subseteq L[z]$, то есть каждая точка множества $[C]$ (понимаемая как множество; см. выше п. 3.1) принадлежит $L[z]$. Стало быть, в этом случае множество $[C]$ можно вполне упорядочить (каждый класс $L[z]$, где $z\in\mathbf{R}$, допускает «каноническое» полное упорядочение; см. [25, с. 44, доказательство леммы 39]). Отсюда следует, что при вычислении мощности такого множества (равной $\aleph_1$, если число непустых конституант $[C]_\nu$ несчетно; см. рассуждения после формулировки проблемы II в § 2) нет нужды прибегать к аксиоме выбора.

Вторая из моделей, построенных в работах Леви [23] и Соловея [22], позволяет взглянуть на рассматриваемые вопросы с несколько иной точки зрения. В этой модели выполняются все аксиомы ZF (теория Цермело — Френкеля без аксиомы выбора AC), но аксиома AC в полном объеме не выполняется. Вместо нее выполняется аксиома зависимого выбора DC — специальная форма аксиомы выбора, достаточная для доказательства так называемой счетной аксиомы выбора (то есть аксиомы, утверждающей существование функции выбора для счетных семейств непустых множеств), а также таких важных следствий аксиомы АС, как теорема о мощности счетного объединения счетных множеств, теорема о существовании счетного подмножества в каждом бесконечном (то есть не равномощном никакому собственному начальному сегменту натурального ряда) множестве, счетная аддитивность меры Лебега и др. Эта модель интересна тем, что в ней неравенство $\mathfrak{c} \geqslant \aleph_1$ не имеет места, то есть континуум **R** не содержит подмножеств мощности ровно $\aleph_1$. Таким образом, неравенство $\mathfrak{c} \geqslant \aleph_1$ нельзя доказать, не прибегая к несчетным формам аксиомы выбора.

Вообще, в ходе исследования обеих моделей Леви—Соловея удалось установить следующее. Для определенного списка свойств точечных множеств, реализующихся на множествах, даваемых трансфинитными построениями с помощью аксиомы выбора, в первой модели нет «индивидуальных» точечных множеств, обладающих каким-либо свойством из этого списка, а во второй модели нет вообще никаких точечных множеств с указанными свойствами. В этот список входят, в частности, такие «отрицательные» свойства точечных множеств, как неизмеримость по Лебегу и свойство быть несчетным множеством, не содержащим совершенных подмножеств.

3.3. Невозможность положительного решения ограниченной проблемы континуума, ограниченной проблемы Лебега и проблем III и IV. Изучение ω_1-последовательностей борелевских множеств ограниченного ранга начато недавно небольшой заметкой Стерна [26]. Оказалось ([26]; см. также [27], теоремы 23.3(б) и 25.1(б)), что в первой модели Леви—Соловея нет «индивидуальных» ограниченных по рангу ω_1-последовательностей попарно-различных борелевских множеств, а во второй модели (где верна *DC*, но не *AC*) нет вообще никаких ограниченных по рангу ω_1-последовательностей попарно-различных борелевских множеств. Таким образом, ограниченная проблема континуума и ограниченная проблема Лебега не могут иметь и положительного решения.

Относительно связанных с решетами проблем III и IV удалось выяснить [28, теорема 1.3], что они эквивалентны проблеме II (в том смысле, что из существования решета, удовлетворяющего требованиям проблемы IV, вытекает существование решета, удовлетворяющего более сильным требованиям проблемы II) и, следовательно, не могут иметь положительного решения.

Таким образом, мы видим, что ограниченная проблема континуума, ограниченная проблема Лебега, а также связанные с решетами проблемы III и IV *неразрешимы* в классическом смысле. В этой связи нельзя не удивиться силе математической интуиции Н. Н. Лузина, который задолго до появления современных теоретико-множественных методов фактически предсказал этот результат. «Возьмем в качестве образца проблему II... — пишет Лузин в [5, п. 6] (в [8] с. 560). — Наша точки зрения состоит в том, что проблемы такого рода заставляют отказаться от традиционного взгляда на смысл слов: решение проблемы».

3.4. Необходимость использования аксиомы существования недостижимого кардинала при установлении невозможности положительного решения проблемы Лебега, ограниченной проблемы Лебега, ограниченной проблемы континуума и проблем Ia, II, III, IV. В связи с построением моделей Леви—Соловея и основанными на этом доказательствами невозможности положительного решения названных проблем (см. пп. 3.2 и 3.3) необходимо указать на одно принципиальное обстоятельство. Во всех рассмотрениях в рамках аксиоматической теории множеств, которые касаются невозможности доказательства или опровержения тех или иных теоретико-множественных утверждений, молчаливо предполагается непротиворечивость теории ZFC (или, что в силу результатов Гёделя [14] эквивалентно, непротиворечивость теории ZF). При построении же моделей Леви—Соловея используется более сильная гипотеза о непротиворечивости теории ZFC+«существует недостижимый кардинал».

Аксиома существования недостижимого кардинала не входит в список аксиом ZFC; ее относят к так называемым «высшим аксиомам теории множеств», или к аксиомам больших кардиналов. «Общая тенденция, — пишет в книге [19, гл. II, § 7] П. Коэн, один из крупнейших специалистов по аксиоматической теории множеств, — состоит в принятии этой аксиомы в качестве истинной, или по крайней мере совместимой с ZF» (с. 155—156 русского перевода [19]; можно показать, что из совместимости обсуждаемой аксиомы с ZF следует ее совместимость и с теорией ZFC).

Аксиома существования недостижимого кардинала — обозначим ее аббревиатурой IC (от иноязычного *inaccessible cardinal*) — недоказуема в ZFC (см. [19], гл. II, § 7). Более того (и это как раз существенно при обсуждении доказательств непротиворечивости, основанных на моделях Леви—Соловея), утверждение о непротиворечивости теории ZFC+IC невозможно вывести (в ZFC) из гипотезы о непротиворечивости самой теории ZFC. Доказательство этого важного положения основано на одной фундаментальной логической теореме и на одном теоретико-множественном факте.

Фундаментальная логическая теорема, которую мы имеем в виду, — это обобщенная теорема Гёделя о неполноте (см. [19], гл. I, § 10), утверждающая, для весьма широкого класса аксиоматических теорий (к нему принадлежат, в частности, все теории, полученные путем добавления к ZFC произвольного конечного списка теоретико-множественных аксиом), что если теория T из этого класса непротиворечива, то в T невозможно доказать утверждение $\mathrm{Consis}\,T$, некоторым формальным образом выражающее непротиворечивость теории T.

А упомянутый нами теоретико-множественный факт состоит в том, что из существования недостижимого кардинала вытекает существование модели для теории ZFC (см. [25], гл. 13, теорема 21). Другими словами, в теории ZFC+IC выводится Consis ZFC.

Если теперь допустим, что существует доказательство непротиворечивости теории ZFC+IC, проведенное в ZFC+Consis ZFC, то согласно упомянутому теоретико-множественному факту мы получили бы доказательство утверждения

$$\mathrm{Consis}\,(\mathrm{ZFC}+\mathrm{Consis}\,\mathrm{ZFC})$$

в теории ZFC+Consis ZFC. Но это невозможно в силу обобщенной теоремы Гёделя о неполноте.

В свете всего сказанного определенный интерес представляет вопрос о том, можно ли установить невозможность положительного решения проблем, вынесенных в заголовок настоящего пункта, не прибегая к гипотезе о непротиворечивости теории ZFC+IC. И ответ на этот вопрос — отрицательный.

Дело в том, что если у нас имеется модель M аксиом ZFC, в которой хотя бы одна из этих проблем имеет отрицательное решение, то в такой модели обязательно имеет отрицательное решение проблема Ia. (Это утверждение очевидно для всех проблем, названных в заголовке настоящего пункта, — если «индивидуальность» понимать так, как указано в п. 3.2, — кроме ограниченной проблемы континуума, для которой оно проверено одним из авторов настоящей статьи с помощью анализа конструкции, предложенной Хаусдорфом в [12].) Следовательно, согласно сказанному в начале § 3 и после формулировки проблемы II в § 2, в модели M истинно, что всякое несчетное CA-множество содержит совершенное ядро. Но тогда конструктивный универсум L^M модели M выполняет все аксиомы ZFC и аксиому существования недостижимого кардинала (см. [27], теорема 15.11 (импликация 15.1→15.4) и замечание на с. 319—320).

Проведенное рассуждение показывает, что если хотя бы для одной из обсуждаемых здесь проблем мы могли бы доказать средствами теории ZFC+Consis ZFC невозможность положительного решения этой проблемы в ZFC, то тем самым было бы получено доказательство утверждения Consis(ZFC+IC) в теории ZFC+Consis ZFC. Но это, как уже показано, невозможно.

3.5. Отрицательное решение проблем I и V. Проблема I оказывается разрешимой, причем в отрицательном направлении. Именно: нет открытых решет C, таких, что каждая конституанта $[C]_\nu$ содержит ровно одну точку. Более того, если все внешние конституанты открытого или даже борелевского решета непусты, то они составляют неограниченную по рангу совокупность и их даже нельзя заключить в попарно-непересекающиеся борелевские множества, образующие ограниченную по рангу совокупность [28, теорема 1.4]. Таким образом, мы видим, что замена требования неограниченности решета (то есть непустоты несчетного числа внешних конституант) более сильным требованием непустоты *всех* внешних конституант совершенно меняет статус проблем II, III, IV: они становятся разрешимыми в отрицательном плане.

Проблема V также оказывается разрешимой, но по другой причине. Дело в том, что свойства внутренних конституант по отношению к рассматриваемым вопросам во многом отличны от свойств внешних конституант. Если мы сформулируем аналоги проблем Ia, II, III, IV для внутренних конституант, то уже сможем дать определенный ответ на поставленные вопросы: решет требуемого вида не существует. В частности, если открытое или даже борелевское решето C таково, что число непустых внутренних конституант $[C]_{*\nu}$ несчетно, то конституанты $[C]_{*\nu}$ образуют неограниченную по рангу последовательность и эти конституанты нельзя заключить в попарно-непересекающиеся борелевские множества, составляющие ограниченную по рангу последовательность ([28], теорема 1.1).

Чтобы вывести отсюда отрицательное решение проблемы V, достаточно для произвольного открытого решета C показать, что из несчетности числа непустых внешних конституант $[C]_\nu$ следует несчетность числа непустых внутренних конституант $[C]_{*\nu}$. Но если число непустых $[C]_\nu$ несчетно, то по указанному в конце § 1 критерию множество $[C]$ не будет борелевским. Следовательно, и его дополнение $[C]_*$ — также неборелевское множество. Значит, ввиду борелевости конституант и согласно равенству $[C]_*=\bigcup\limits_{\nu<\omega_1}[C]_{*\nu}$ число непустых внутренних конституант $[C]_{*\nu}$ также несчетно.

Как видно, проблемы I и V попадают в очень короткий список проблем дескриптивной теории, оставленных нерешенными в рамках «классической» дескриптивной теории множеств, но оказавшихся тем не менее разрешимыми. Впрочем, их решение, то есть доказательство отсутствия решет требуемого вида, далеко выходит за рамки тех методов, которыми пользовались специалисты по дескриптивной теории во времена Лузина, и включает аппарат конструктивности, метод вынуждения и некоторые другие современные теоретико-множественные достижения. Отмеченную выше эквивалентность проблем II, III, IV также удалось доказать пока только с привлечением аппарата конструктивности и метода вынуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lusin N. Sur les ensembles analytiques. — Fund. math., 1927, **10**, 1—95. Русский перевод: Об аналитических множествах. — В кн. [8], с. 380—459.
2. Lusin N. Sur les ensembles analytiques et leurs applications. Paris, 1930, 328 p. Русский перевод: Лекции об аналитических множествах и их приложениях. — В кн. [8], с. 9—269. Сокращенный русский перевод — в кн. [7], с. 19—322.
3. Lusin N. Sur les classes des constituantes des complémentaires analytiques. — Ann. Scuola norm. super. Pisa, ser. 2, 1933, **2**, fasc. 3, 269—282. Русский перевод: О классах конституант аналитических дополнений. — В кн. [8], с. 627—641.
4. Лузин Н. Н. О стационарных последовательностях. — Тр. Физ.-матем. ин-та АН СССР. Отд. матем., 1934, **5**, 125—147. В кн. [8], с. 642—661.
5. Лузин Н. Н. О некоторых новых результатах дескриптивной теории функций. М.—Л., 1935, 86 с. В кн. [8], с. 552—616.
6. Lusin N. Sur les ensembles analytiques nuls. — Fund. math., 1935, **25**, 109—131. Русский перевод: О пустых аналитических множествах. — В кн. [8], с. 662—682.
7. Лузин Н. Н. Лекции об аналитических множествах и их приложениях. М., 1953, 359 с.
8. Лузин Н. Н. Собр. соч., т. 2. М., 1958, 744 с.
9. Cantor G. Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. — In: Cantor G. Gesammelte Abhandlungen. Berlin, 1932, S. 119—133.
10. Hilbert D. Gesammelte Abhandlungen, Bd 3. Berlin, 1935, S. 290—329. Русский перевод — в кн.: Проблемы Гильберта. М., 1969.
11. Lebesgue H. Sur les fonctions représentables analytiquement. — J. math. pures et appl., ser. 6, 1905, **1**, fasc. 2, 139—216.
12. Hausdorff F. Summen von $\aleph_1$ Mengen. — Fund. math., 1936, **26**, 241—255.
13. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М., 1977, 367 с.
14. Gödel K. The consistency of the axiom of choice and the generalised continuum hypothesis with the axioms of set theory. — Ann. Math. Studies, 1940, N 3, 7+69 p. Русский перевод: Гёдель К. Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств. — Успехи матем. наук, 1948, **3**, вып. 1, 96—149.
15. Новиков П. С. О взаимоотношении второго класса проективных множеств и проекций униформных аналитических дополнений. — Изв. АН СССР. Сер. матем., 1937, **1**, № 2, 231—252. В кн. [17], с. 64—77.
16. Новиков П. С. О непротиворечивости некоторых положений дескриптивной теории множеств. — Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1951, 38, 279—316. В кн. [17], с. 170—202.
17. Новиков П. С. Избранные труды. Теория множеств и функций. Математическая логика и алгебра. М., 1979, 396 с.
18. Cohen P. J. The independence of the continuum hypothesis. — Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1963, **50**, N 6, 1143—1148; **51**, N 1, 105—110. Русский перевод: Коэн П. Дж. Независимость континуум-гипотезы. — Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1965, **9**, № 4, 142—155.
19. Cohen P. J. Set theory and the continuum hypothesis. N. Y., 1966. Русский перевод: Коэн П. Дж. Теория множеств и континуум-гипотеза. М., 1969, 347 с.
20. Любецкий В. А. Некоторые следствия гипотезы о несчетности множества конструктивных действительных чисел. — Докл. АН СССР, 1968, **182**, № 4, 758—759.
21. Solovay R. M. On the cardinality of Σ_2^1 sets of reals.—In: Foundations of mathematics. Berlin et al., 1969, p. 58—73.
22. Solovay R. M. A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable. — Ann. Math., 1970, **92**, N 1, 1—56.

23. Levy A. Definability in axiomatic set theory II. — In: Mathematical logic and foundations of set theory. Amst. — L., 1970, p. 129—145.
24. Mansfield R. Perfect subsets of definable sets of real numbers. — Pacif. J. Math., 1970, **35**, N 2, 451—457.
25. Jech T. Lectures in set theory with particular emphasis on the method of forcing. — Lect. Notes Math., 1971, N 217. Русский перевод: Йех Т. Теория множеств и метод форсинга. М., 1973, 148 с.
26. Stern J. Suites transfinies d'ensembles boréliens. — C. r. Acad. sci. **A**, 1979, **288**, N 10, 527—529.
27. Кановей В. Г. Проективная иерархия Н. Н. Лузина: современное состояние теории. — В кн.: Справочная книга по математической логике. Часть II. Теория множеств. М., 1982, с. 275—364.
28. Кановей В. Г. О структуре конституант Π_1^1-множеств. — Сиб. матем. ж., 1983, **24**, № 3, 58—83.

Поступила в редакцию
18.03.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА, 1983, № 6

УДК 519.3:513.834

А. Т. Фоменко

ОБ АБСОЛЮТНЫХ МИНИМУМАХ ФУНКЦИОНАЛА ОБЪЕМА И ФУНКЦИОНАЛА ДИРИХЛЕ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

1. В главах «О последовательностях измеримых функций» и «О строении измеримых функций» работы [1] Н. Н. Лузин предложил методы изучения множеств, представимых в виде $\{x : \omega(x)=1\}$, где $\omega(x)=\underline{\lim}\,\psi_n(x)$, а $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ... — последовательность характеристических функций, или функций плотности, измеримых множеств E_1, E_2, ... на вещественной оси. Он рассмотрел, в частности, вопрос о связи $\lim\limits_{(n)} \mathrm{mes} E_n$ с $\mathrm{mes} \lim\limits_{(n)} E_n$. Идеи, сформулированные в [1], трансформировались сегодня в один из конструктивных методов построения глобально минимальных поверхностей. Этот метод заключается в том, что последовательность поверхностей, объемы которых сходятся к минимуму, заменяется последовательностью их функций плотности, после чего доказывается существование предельной функции плотности, область положительности которой и является искомой минимальной поверхностью [2, 3].

Во многих задачах геометрии, многомерного комплексного анализа возникает вопрос о вычислении абсолютного минимума функционала объема или функционала Дирихле на классах отображений одного риманова многообразия в другое. Мы сформулируем два варианта этой задачи — компактный и некомпактный, а также приведем ее решение для некоторых важных случаев. Напомним определения упомянутых функционалов. В качестве объектов X, для которых они определены, мы будем рассматривать многомерные «поверхности», вложенные в объемлющее ориентируемое гладкое риманово многообразие M (компактное или некомпактное). Поверхностями будем называть либо k-мерные подмногообразия в M, либо k-мерные измеримые (по Хаусдорфу) компактные подмножества в M. В качестве значения $\mathrm{vol}_k X$ функционала объема vol_k на поверхности X будем рассматривать соответственно либо обычный риманов объем подмногообразия X, либо k-мерную хаусдорфову меру X (см. [4]). Экстремалями функционала объема являются минимальные поверхности.

Функционал Дирихле $D[f]$ определен на бесконечномерном пространстве гладких (кусочно-гладких) отображений f гладкого компакт-