МАТЕМАТИКА

Челябинский физико-математический журнал. 2016. Т. 1, вып. 1. С. 6–15.

УДК 511.6

ВЫЧИСЛЕНИЕ КВАНТОВЫХ ФАКТОРИАЛОВ И К НИМ ОБРАТНЫХ

Р. Ж. Алеев[1,2,a], **И. Р. Мухамадеева**[1,b]

[1] *Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия*
[2] *Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), Челябинск, Россия*
[a] *aleev@csu.ru;* [b] *verite.faux@gmail.com*

В работе представлен метод вычисления квантовых факториалов, лежащих в основе инвариантов Тураева — Виро. В качестве следствия получается алгебраическая целостность этих инвариантов для простых чисел.

Ключевые слова: *инварианты Тураева — Виро, квантовые факториалы, целые алгебраические числа.*

Введение

Согласно [1], в основе инвариантов Тураева — Виро лежат так называемые квантовые факториалы, которые строятся с помощью комплексных корней из 1. Задачи, связанные с корнями из 1, несмотря на кажущуюся простоту, привлекали внимание многих математиков, укажем, к примеру, Милнора [2] и Басса [3]. Поэтому изучение квантовых факториалов само по себе имеет определённый интерес. Также вполне возможно, что оно сможет помочь в задачах, связанных с вычислением инвариантов Тураева — Виро.

В книге Тураева [4, p. vii] отмечается, что доказана целостность инвариантов (инварианты — целые алгебраические числа). Здесь мы получаем целостность квантовых инвариантов и обратных к ним для простых чисел. Это, конечно, более слабый результат. Однако стоит отметить, что наши рассуждения вполне элементарны, и получены формулы, удобные для вычислений. Поэтому результаты данной работы, несомненно, имеют определённое значение.

Авторы выражают благодарность С. В. Матвееву и В. Г. Тураеву за интерес, проявленный к этой работе.

1. Предварительные сведения

Для симметрических многочленов от x и y положим $\sigma = \sigma_1 = x+y$, $\tau = \sigma_2 = xy$. Также для любого натурального n пусть $s_n = x^n + y^n$.

Предложение 1. *Пусть p — целая часть $k/2$ (наибольшее целое число, не превосходящее $k/2$). Тогда*

$$s_k = \sigma^k + \sum_{m=1}^{p} (-1)^m \left(C_{k-m}^{m} + C_{k-m-1}^{m-1}\right) \sigma^{k-2m} \tau^m.$$

Более точно, имеем для чётного $k=2j$ и нечётного $k=2j+1$ соответственно:

$$s_{2j}=\sigma^{2j}+\sum_{n=0}^{j-1}(-1)^{j-n}\left(C_{j+n}^{j-n}+C_{j+n-1}^{j-n-1}\right)\sigma^{2n}\tau^{j-n},$$

$$s_{2j+1}=\sigma^{2j+1}\sum_{n=0}^{j-1}(-1)^{j-n}\left(C_{j+1+n}^{j-n}+C_{j+n}^{j-n-1}\right)\sigma^{2n+1}\tau^{j-n}.$$

Доказательство. По формуле Варинга [5, с. 18] имеем

$$\frac{1}{k}s_k=\sum_{m=0}^{p}\frac{(-1)^m(k-m-1)!}{m!(k-2m)!}\sigma^{k-2m}\tau^m.$$

Перепишем формулу Варинга следующим образом. Умножим обе её части на k, затем дроби в сумме умножим и разделим на $k-m$ и получим

$$s_k=\sigma^k+k\sum_{m=1}^{p}\frac{(-1)^m(k-m-1)!}{m!(k-2m)!}\sigma^{k-2m}\tau^m=\sigma^k+k\sum_{m=1}^{p}\frac{(-1)^m(k-m)!}{(k-m)m!(k-2m)!}\sigma^{k-2m}\tau^m=$$

$$=\sigma^k+k\sum_{m=1}^{p}\frac{(-1)^m}{k-m}C_{k-m}^{m}\sigma^{k-2m}\tau^m.$$

Здесь $\frac{(k-m)!}{m!(k-2m)!}=C_{k-m}^m$ — биномиальный коэффициент. Далее

$$\frac{k}{k-m}\cdot C_{k-m}^m=\frac{(k-m)+m}{k-m}\cdot\frac{(k-m)!}{m!(k-2m)!}=\left(1+\frac{m}{k-m}\right)\frac{(k-m)!}{m!(k-2m)!}=$$

$$=\frac{(k-m)!}{m!(k-2m)!}+\frac{(k-m-1)!}{(m-1)!(k-2m)!}=C_{k-m}^m+C_{k-m-1}^{m-1}.$$

Для чётного $k=2j$

$$s_{2j}=\sigma^{2j}+\sum_{m=1}^{j}(-1)^m\left(C_{2j-m}^{m}+C_{2j-m-1}^{m-1}\right)\sigma^{2j-2m}\tau^m.$$

Положим $n=j-m$ и получим

$$s_{2j}=\sigma^{2j}+\sum_{n=0}^{j-1}(-1)^{j-n}\left(C_{j+n}^{j-n}+C_{j+n-1}^{j-n-1}\right)\sigma^{2n}\tau^{j-n}.$$

Для нечётного $k=2j+1$ доказательство проводится аналогично. □

Положим для натурального k

$$t_{2k+1}=s_{2k+1}+\cdots+s_3+\sigma=\sum_{j=0}^{k}s_{2j+1},\quad t_{2k}=s_{2k}+\cdots+s_2+1=\sum_{i=1}^{k}s_{2i}+1.$$

Лемма 1. 1) *Для любого нечётного $2k+1\geqslant 1$*

$$t_{2k+1}=\sum_{j=0}^{k}\sigma^{2j+1}+\sum_{n=0}^{k-1}\sigma^{2n+1}\sum_{l=1}^{k-n}(-1)^l\left(C_{l+1+2n}^{l}+C_{l+2n}^{l-1}\right)\tau^l.$$

2) *Для любого чётного* $2k \geqslant 2$

$$t_{2k} = \sum_{j=0}^{k} \sigma^{2j} + \sum_{n=0}^{k-1} \sigma^{2n} \sum_{l=1}^{k-n} (-1)^l \left(C_{l+2n}^{l} + C_{l-1+2n}^{l-1} \right) \tau^l.$$

Доказательство. Рассмотрим нечётное $2k+1 \geqslant 1$. По предложению 1, для любого натурального j

$$s_{2j+1} = \sigma^{2j+1} + \sum_{n=0}^{j-1} (-1)^{j-n} \left(C_{j+1+n}^{j-n} + C_{j+n}^{j-n-1} \right) \sigma^{2n+1} \tau^{j-n}.$$

Поэтому

$$t_{2k+1} = \sum_{j=0}^{k} s_{2j+1} = \sum_{j=0}^{k} (\sigma^{2j+1} + \sum_{n=0}^{j-1} (-1)^{j-n} \left(C_{j+1+n}^{j-n} + C_{j+n}^{j-n-1} \right) \sigma^{2n+1} \tau^{j-n}) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \sigma^{2j+1} + \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=0}^{j-1} (-1)^{j-n} \left(C_{j+1+n}^{j-n} + C_{j+n}^{j-n-1} \right) \sigma^{2n+1} \tau^{j-n}.$$

Далее

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{n=0}^{j-1} (-1)^{j-n} \left(C_{j+1+n}^{j-n} + C_{j+n}^{j-n-1} \right) \sigma^{2n+1} \tau^{j-n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{k-1} \sigma^{2n+1} \sum_{j=n+1}^{k} (-1)^{j-n} \left(C_{j+1+n}^{j-n} + C_{j+n}^{j-n-1} \right) \tau^{j-n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{k-1} \sigma^{2n+1} \sum_{l=1}^{k-n} (-1)^l \left(C_{l+1+2n}^{l} + C_{l+2n}^{l-1} \right) \tau^l.$$

Чётный случай $2k \geqslant 2$ рассматривается аналогично. □

Теперь вместо степенных сумм из $\mathbb{Z}[x, y]$ будем рассматривать их образы в кольце многочленов Лорана $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ над $\mathbb{Z}$ (замена y на x^{-1}). В данном случае $\tau = 1$.

Предложение 2. 1) *Для любого нечётного* $2k+1 \geqslant 1$

$$t_{2k+1} = \sum_{j=0}^{k} s_{2j+1} = \sigma^{2k+1} + \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^{k-n} C_{k+n+1}^{2n+1} \sigma^{2n+1}.$$

2) *Для любого чётного* $2k \geqslant 2$

$$t_{2k} = \sum_{i=1}^{k} s_{2i} + 1 = \sigma^{2k} + \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^{k-n} C_{k+n}^{2n} \sigma^{2n}.$$

Доказательство. Докажем только второе утверждение, первое доказывается аналогично. Так как в нашем случае $\tau = 1$, то для любого чётного $2k \geqslant 2$ по лемме 1

$$t_{2k} = \sum_{j=0}^{k} \sigma^{2j} + \sum_{n=0}^{k-1} \sigma^{2n} \sum_{l=1}^{k-n} (-1)^l \left(C_{l+2n}^{l} + C_{l-1+2n}^{l-1} \right).$$

Обозначим
$$a_n = \sum_{l=1}^{k-n} (-1)^l \left(C_{l+2n}^{l} + C_{l-1+2n}^{l-1} \right).$$
Для $n = 0$ имеем
$$a_0 = \sum_{l=1}^{k} (-1)^l \left(C_l^l + C_{l-1}^{l-1} \right) = 2\sum_{l=1}^{k} (-1)^l = 2\frac{(-1)^{k+1}+1}{-2} = -(-1)^{k+1} - 1 = (-1)^k - 1,$$
что и требуется. Далее считаем, что $n > 0$.

Пусть $k-n$ чётно. В этом случае
$$a_n = \sum_{l=1}^{k-n} (-1)^l \left(C_{l+2n}^{l} + C_{l-1+2n}^{l-1} \right) = \sum_{p=1}^{\frac{k-n}{2}} (C_{2p+2n}^{2p} + C_{2p-1+2n}^{2p-1} - C_{2p-1+2n}^{2p-1} - C_{2p-2+2n}^{l-1}) =$$
$$= \sum_{p=1}^{\frac{k-n}{2}} \left(C_{2p+2n}^{2p} - C_{2p-2+2n}^{2p-2} \right).$$
Получается знакочередующаяся сумма, все средние члены сократятся, и останутся только крайние. Поэтому
$$a_n = C_{2\frac{k-n}{2}+2n}^{2\frac{k-n}{2}} - C_{2n}^{0} = C_{k-n+2n}^{k-n} - 1 = C_{k+n}^{2n} - 1.$$

Пусть $k-n$ нечётно. Теперь
$$a_n = \sum_{l=1}^{k-n} (-1)^l \left(C_{l+2n}^{l} + C_{l-1+2n}^{l-1} \right) = -C_{k+n}^{k-n} - C_{k-1+n}^{k-1-n} + \sum_{l=1}^{k-1-n} (-1)^l \left(C_{l+2n}^{l} + C_{l-1+2n}^{l-1} \right).$$
Так как $k-1-n$ чётно, то, продолжая знак равенства, получим
$$-C_{k+n}^{k-n} - C_{k-1+n}^{k-1-n} + C_{k-1+n}^{2n} - 1 = -C_{k+n}^{2n} - C_{k-1+n}^{2n} + C_{k-1+n}^{2n} - 1 = -C_{k+n}^{2n} - 1.$$

Таким образом,
$$t_{2k} = \sum_{j=0}^{k} \sigma^{2j} + \sum_{n=0}^{k-1} ((-1)^{k-n}(C_{k+n+1}^{2n} - 1)\sigma^{2n} = \sigma^{2k} + \sum_{n=0}^{k-1} ((-1)^{k-n}(C_{k+n}^{2n} - 1 + 1)\sigma^{2n} =$$
$$= \sigma^{2k} + \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^{k-n} C_{k+n}^{2n} \sigma^{2n},$$
что и требовалось доказать. □

2. Квантовые факториалы

Пусть r и n — натуральные числа, q — корень из 1 степени $2r$ с условием, что q^2 — первообразный корень степени r. Тогда квантовый факториал
$$[n]! = 1 \cdot \frac{q^2 - q^{-2}}{q - q^{-1}} \cdots \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}.$$

Теорема 1. *Любой квантовый факториал является значением на $q+q^{-1}$ подходящего многочлена с целыми коэффициентами и потому является целым алгебраическим числом.*

Доказательство. Произвольный множитель квантового факториала

$$\frac{q^n-q^{-n}}{q-q^{-1}}=q^{n-1}+q^{n-3}+\cdots+q^{-(n-1)}$$

является симметрическим многочленом от $\{q,q^{-1}\}$. Поэтому $[n]!=f(q,q^{-1})$ для подходящего симметрического многочлена $f\in\mathbb{Z}[x,y]$. По основной теореме о симметрических многочленах существует такой многочлен g с целыми коэффициентами, что $f=g(q+q^{-1},qq^{-1})=g(q+q^{-1},1)$. Поэтому получаем многочлен с целыми коэффициентами от $q+q^{-1}$. □

В дальнейшем, без особых замечаний, будем считать r простым нечётным числом. Более точно, если хотим указать зависимость от q, то пишем $[n]!=[n(q)]!$.

Лемма 2. *Пусть r — простое число, q — корень из 1 степени $2r$ и q^2 — примитивный корень из 1 степени r. Тогда выполняется одно из следующих двух утверждений:*

1) *q — примитивный корень степени $2r$;*

2) *q — непримитивный корень степени $2r$, $-q$ является примитивным корнем степени $2r$.*

Доказательство. Очевидно, что $\sqrt[2r]{1}=\langle -1\rangle\times\langle q^2\rangle$. Так как r — простое нечётное число, то все числа $q^2,\dots,q^{2(r-1)}$ будут примитивными корнями степени r, а все корни из 1 степени $2r$ будут иметь вид $\pm 1,\pm q^2,\dots,\pm q^{2(r-1)}$. Отсюда следует, что числа $-q^2,\dots,-q^{2(r-1)}$ являются примитивными корнями из 1 степени $2r$.

Поэтому либо $q\in\{q^2,\dots,q^{2(r-1)}\}$, и тогда q — непримитивный корень степени $2r$, а $-q$ есть примитивный корень степени $2r$, либо $q\in\{-q^2,\dots,-q^{2(r-1)}\}$ и q — примитивный корень степени $2r$. □

Укажем связь квантовых факториалов для q и $-q$.

Лемма 3. *Имеет место равенство $[n(-q)]!=(-1)^p[n(q)]!$, где p — целая часть $n/2$.*

Доказательство. Для любого n

$$\frac{(-q)^n-(-q)^{-n}}{(-q)-(-q)^{-1}}=\frac{(-1)^n(q^n-q^{-n})}{(-1)(q-q^{-1})}=(-1)^{n-1}\left(\frac{q^n-q^{-n}}{q-q^{-1}}\right)=\begin{cases}-\frac{q^n-q^{-n}}{q-q^{-1}} & \text{при чётном } n;\\ \frac{q^n-q^{-n}}{q-q^{-1}} & \text{при нечётном } n.\end{cases}$$

Поэтому

$$[(2n+1)(-q)]!=1\cdot(-1)\frac{q^2-q^{-1}}{q-q^{-1}}\cdot\frac{q^3-q^{-1}}{q-q^{-1}}\dots(-1)\frac{q^{2n}-q^{2n}}{q-q^{-1}}\cdot\frac{q^{2n+1}-q^{-2n-1}}{q-q^{-1}}=$$

$$=(-1)^n[(2n+1)(q)]!.$$

Аналогично $[(2n)(-q)]!=(-1)^n[(2n)(q)]!$. □

Поэтому для определённости можем всегда считать, что q — непримитивный корень степени $2r$, в частности $q^r = 1$. Таким образом, будем придерживаться следующих соглашений:

1) *r — простое нечётное число.*
2) *$q \neq 1$ — корень из единицы степени r.*

Рассмотрим степенные суммы $\sigma = s_1 = q + q^{-1}$, $s_2 = q^2 + q^{-2}, \ldots$

Лемма 4. 1) *Для любого $k \geqslant 2$ справедливо равенство*

$$\frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}} = s_{k-1} + \frac{q^{k-2} - q^{-k+2}}{q - q^{-1}}.$$

2) *Для любого чётного $2k \geqslant 2$ имеем*

$$\frac{q^{2k} - q^{-2k}}{q - q^{-1}} = s_{2k-1} + \cdots + s_3 + \sigma = t_{2k-1}.$$

3) *Для любого нечётного $2k+1 \geqslant 3$*

$$\frac{q^{2k+1} - q^{-2k-1}}{q - q^{-1}} = s_{2k} + \cdots + s_2 + 1 = t_{2k}.$$

Доказательство. Первое утверждение проверяется непосредственно, а остальные следуют из него по индукции. □

Предложение 3. *Пусть $f(x,y) \in \mathbb{Z}[x,y]$ — произвольный симметрический многочлен с целыми коэффициентами от x и y. Тогда существует такой многочлен $g \in \mathbb{Z}[t]$ с целыми коэффициентами степени не выше $\dfrac{r-3}{2}$, что $f(q, q^{-1}) = g(\sigma)$.*

Доказательство. По основной теореме о симметрических многочленах существует такой многочлен h с целыми коэффициентами, что $f(x,y) = h(x+y, xy)$. Отсюда

$$f(q, q^{-1}) = h(q + q^{-1} = \sigma, qq^{-1} = 1) = g(\sigma),$$

и всё доказано, кроме утверждения о степени.

Заметим, что

$$1 + \sum_{i=1}^{\frac{r-1}{2}} s_i = 1 + \sum_{i=1}^{\frac{r-1}{2}} (q^i + q^{-i}) = \sum_{i=0}^{r-1} q^i = \frac{1-q^r}{1-q} = 0.$$

Поэтому $s_{\frac{r-1}{2}}$ выражается через $1, s_1, \ldots, s_{\frac{r-3}{2}}$. А теперь по предложению 1 $\sigma^{\frac{r-1}{2}}$ выражается через $1, \sigma, \ldots, \sigma^{\frac{r-3}{2}}$, и доказательство завершается стандартным приёмом понижения степени. □

Приведём некоторые полезные сведения из [6]. Пусть $\mathbb{Z}[q] = \{f(q) \mid f \in \mathbb{Z}[x]\}$ — множество значений на q всех многочленов с целыми коэффициентами. Одной из основных конструкций на $\mathbb{Z}[q]$ является *норма* N, которая может быть определена как

$$N(f(q)) = \prod_{i=1}^{r-1} f(q^i).$$

Если $f(q) \in \mathbb{Z}[q]$, то $N(f(q)) \in \mathbb{Z}$. Хорошо известно, что норма сохраняет операцию умножения (мультипликативность нормы) и элемент из $\mathbb{Z}[q]$ имеет обратный в $\mathbb{Z}[q]$ тогда и только тогда, когда его норма равна ± 1.

Лемма 5. *Для любого* $n \in \{1, \dots, r-1\}$ *выполняется равенство* $N(q^n - q^{-n}) = r$.

Доказательство. В силу мультипликативности нормы

$$N(q^n - q^{-n}) = N\left((-1)(q^{-n})(1 - q^{2n})\right) = N(-1) \cdot N(q^{-n}) \cdot N(1 - q^{2n}).$$

Найдём нормы каждого из сомножителей.

1) Ясно, что $N(-1) = (-1)^{r-1} = 1$, так как r нечётно.

2) Так как $-n$ и r взаимно просты, то $\{-n, 2(-n), \dots, (r-1)(-n)\}$ — приведённая система вычетов по модулю r согласно [7]. Поэтому

$$N(q^{-n}) = \prod_{i=1}^{r-1} q^i = q^{\frac{r(r-1)}{2}} = (q^r)^{\frac{r-1}{2}} = 1.$$

3) Так как $-2n$ и r взаимно просты, то $\{-2n, 2(-2n), \dots, (r-1)(-2n)\}$ — также приведённая система вычетов по модулю r и

$$N(1 - q^{2n}) = \prod_{i=1}^{r-1} (1 - q^i).$$

В силу [6] $\varphi(x) = x^{r-1} + x^{r-2} + \dots + x + 1 = \prod_{i=1}^{r-1}(x - q^i)$. Отсюда

$$N(1 - q^{2n}) = \prod_{i=1}^{r-1} (1 - q^i) = \varphi(1) = r.$$

$\square$

Лемма 6. *Имеют место равенства*

$$(q - q^{-1})^{-1} = \frac{-q}{r} \sum_{i=0}^{r-2} (r - 1 - i) q^{2i},$$

$$\left((q - q^{-1})^2\right)^{-1} = (\sigma^2 - 4)^{-1} = \frac{q^2}{r^2} \left(\sum_{i=0}^{r-2} (r - 1 - i) q^{2i} \right)^2.$$

Доказательство. Пусть $\alpha \in \{q, \dots, q^{r-1}\}$. Тогда по теореме Безу $x - \alpha$ делит $x^{r-1} + \dots + x + 1$. По схеме Горнера частное равно

$$x^{r-2} + (1 + \alpha) x^{r-3} + \dots + (1 + \alpha + \dots + \alpha^i) x^{r-2-i} +$$

$$\dots + (1 + \alpha + \dots + \alpha^{r-3}) x + (1 + \alpha + \dots + \alpha^{r-2}).$$

При $x = 1$ получаем

$$r = (1 - \alpha) \sum_{i=0}^{r-2} (1 + \dots + \alpha^i) = (1 - \alpha) \sum_{i=0}^{r-2} \sum_{j=0}^{i} \alpha^j = \sum_{i=0}^{r-2} (r - 1 - i) \alpha^i.$$

Для $\alpha = q^2$ имеем

$$r = (1-q^2)\sum_{i=0}^{r-2}(r-1-i)q^{2i} = (-q^{-1})(1-q^2)(-q)\sum_{i=0}^{r-2}(r-1-i)q^{2i} =$$

$$= (q-q^{-1})(-q)\sum_{i=0}^{r-2}(r-1-i)q^{2i}.$$

Отсюда

$$(q-q^{-1})^{-1} = \frac{-q}{r}\sum_{i=0}^{r-2}(r-1-i)q^{2i},$$

$$\left((q-q^{-1})^2\right)^{-1} = (\sigma^2-4)^{-1} = \frac{q^2}{r^2}\left(\sum_{i=0}^{r-2}(r-1-i)q^{2i}\right)^2.$$

□

Теорема 2. *Для любого $n \in \{1,\dots,r-1\}$ квантовый факториал $[n]!$ является значением на $\sigma = q+q^{-1}$ подходящего многочлена с целыми коэффициентами степени не выше $\dfrac{r-3}{2}$ и $[n]! = \prod_{i=2}^{n} t_{i-1}$, где*

для $i = 2k+2$ $\quad t_{2k+1} = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} s_{2j+1} = \sigma^{2k+1} + \sum_{n=0}^{k-1}(-1)^{k-n}C_{k+n+1}^{2n+1}\sigma^{2n+1};$

для $i = 2k+1$ $\quad t_{2k} = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} s_{2i} + 1 = \sigma^{2k} + \sum_{n=0}^{k-1}(-1)^{k-n}C_{k+n}^{2n}\sigma^{2n}.$

Доказательство. Утверждение следует из теоремы 1, предложения 3 и леммы 1.

□

Теорема 3. 1) *Для любого $n \geqslant r$ $[n]! = 0$.*

2) *Для любого $n \in \{1,\dots,r-1\}$ квантовый факториал $[n]!$ — обратимое целое алгебраическое число. Поэтому обратное к квантовому факториалу будет целым алгебраическим числом и, более того, является значением на $\sigma = q+q^{-1}$ подходящего многочлена с целыми коэффициентами степени не выше $\dfrac{r-3}{2}$.*

3) $[r-1]! = \dfrac{r}{(\sigma^2-4)^{\frac{r-1}{2}}}$.

4) *Для любого $n \in \{1,\dots,r-1\}$* $(-1)^n[n]![(r-1)-n]! = \dfrac{r}{(\sigma^2-4)^{\frac{r-1}{2}}}$.

5) *Для любого $n \in \{1,\dots,r-1\}$* $([n]!)^{-1} = \dfrac{(\sigma^2-4)^{\frac{r-1}{2}}}{r}\cdot(-1)^n[(r-1)-n]!$.

Доказательство. 1. При $n \geqslant r$ квантовый факториал содержит множитель

$$\frac{q^r-q^{-r}}{q-q^{-1}} = \frac{1-1}{q-q^{-1}} = 0.$$

2. По лемме 5 норма каждого сомножителя квантового факториала равна

$$N\left(\frac{q^i-q^{-i}}{q-q^{-1}}\right) = \frac{N(q^i-q^{-i})}{N(q-q^{-1})} = \frac{r}{r} = 1.$$

В силу мультипликативности нормы квантовый факториал $[n]!$ — обратимое целое алгебраическое число. Поэтому обратное к квантовому факториалу будет целым алгебраическим числом и, более того, благодаря предложению 3 является значением на $\sigma = q + q^{-1}$ подходящего многочлена с целыми коэффициентами степени не выше $\frac{r-3}{2}$.

3. В самом деле, по лемме 5

$$[r-1]! = \prod_{i=1}^{r-1} \frac{q^i - q^{-i}}{q - q^{-1}} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{r-1}(q^i - q^{-i})}{(q-q^{-1})^{r-1}} = \frac{N(q-q^{-1})}{(q-q^{-1})^{r-1}} = \frac{r}{(\sigma^2-4)^{\frac{r-1}{2}}},$$

так как $(q-q^{-1})^2 = q^2 + q^{-2} - 2 = (q+q^{-1})^2 - 4 = \sigma^2 - 4$.

4. Так как для любого натурального i $(q^i - q^{-i}) + (q^{r-i} - q^{-r+i}) = 0$, то для любого $n \in \{1, \ldots, r-1\}$

$$\frac{r}{(\sigma^2-4)^{\frac{r-1}{2}}} = [r-1]! = \prod_{i=1}^{(r-1)-n} \frac{q^i - q^{-i}}{q-q^{-1}} \cdot \prod_{i=r-n}^{r-1} \frac{q^i - q^{-i}}{q-q^{-1}} =$$

$$= [(r-1)-n]! \prod_{i=r-n}^{r-1} (-1) \frac{q^{r-i} - q^{-r+i}}{q-q^{-1}}.$$

Положим $j = r - i$ и, продолжая равенство, получим

$$[(r-1)-n]! \prod_{j=1}^{n} (-1) \frac{q^j - q^{-j}}{q-q^{-1}} = (-1)^n [n]! [(r-1)-n]!.$$

5. Сразу следует из утверждения 4 данной теоремы. □

Замечание. По лемме 6 можно найти значение выражения $r(\sigma^2-4)^{-\frac{r-1}{2}}$.

Список литературы

1. **Матвеев, С. В.** Алгоритмическая топология и классификация трёхмерных многообразий / С. В. Матвеев. — М. : МЦНМО, 2007. — 456 с.
2. **Milnor, J.** Whitehead torsion / J. Milnor // Bull. Amer. Math. Soc. — 1966. — Vol. 72. — P. 358–426.
3. **Bass, H.** The Dirichlet unit theorem, induced characters and Whitehead groups of finite groups / H. Bass // Topology. — 1998. — Vol. 4, no. 4. — P. 391–410.
4. **Turaev, V. G.** Quantum invariants of knots and 3-manifolds / V. G. Turaev. — 2nd revised ed. — Berlin : Walter de Gruyter, 2010. — 591 p.
5. **Болтянский, В. Г.** Симметрия в алгебре / В. Г. Болтянский, Н. Я. Виленкин. — М. : Наука, 1967. — 284 с.
6. **Айерлэнд, К.** Классическое введение в современную теорию чисел / К. Айерлэнд, М. Роузен. — М. : Мир, 1987. — 418 с.
7. **Виноградов, И. М.** Основы теории чисел / И. М. Виноградов. — М.-Л.. : Гостехиздат, 1952. — 180 с.

Поступила в редакцию 11.10.2014
После переработки 01.02.2016

Сведения об авторах

Алеев Рифхат Жалялович, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры компьютерной топологии и алгебры, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; профессор кафедры системного программирования, Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: aleev@csu.ru.

Мухамадеева Ирина Равилевна, студентка математического факультета, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: verite.faux@gmail.com.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2016. Vol. 1, iss. 1. P. 6–15.

COMPUTATION OF QUANTUM FACTORIALS AND THEIR INVERSES

R. Zh. Aleev[1,2,a], **I. R. Mukhamadeeva**[1,b]

[1] *Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia*
[2] *South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk, Russia*
[a] *aleev@csu.ru;* [b] *verite.faux@gmail.com*

In this paper we present a method for the computation of quantum factorials those are the base of Turaev — Viro invariants. As a corollary, we obtain the integrality of the invariants for the primes.

Keywords: *Turaev — Viro invariants, quantum factorials, algebraic integers.*

References

1. **Matveev S.V.** *Algoritmicheskaya topologiya i klassifikatsiya tryokhmernykh mnogoobraziy* [Algorithmic topology and classification of three-dimensional manyfolds]. Moscow, MTNMO Publ., 2007. 456 p. (In Russ.).
2. **Milnor J.** Whitehead torsion. *Bulletin of American Mathematical Society*, 1966, vol. 72, pp. 358–426.
3. **Bass H.** The Dirichlet unit theorem, induced characters and Whitehead groups of finite groups. *Topology*, 1998, vol. 4, no. 4, pp. 391–410.
4. **Turaev V.G.** *Quantum invariants of knots and 3-manifolds.* 2nd revised ed. Berlin, Walter de Gruyter, 2010. 591 p.
5. **Boltyanskiy V.G., Vilenkin N.Ya.** *Simmetriya v algebre* [Symmetry in algebra]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 284 p. (In Russ.).
6. **Ireland K., Rosen M.** *A Classical Introduction to Modern Number Theory.* New York, Springer Science+Business Media, 1982. 389 p.
7. **Vinogradov I.M.** *Osnovy teorii chisel* [Fundamentals of the number theory]. Moscow — Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1952. 180 p. (In Russ.).

Article received 11.10.2014
Corrections received 01.02.2016