Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. А. Воблый, Новая формула для числа помеченных последовательно-параллельных 2-связных графов,
Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 2020, том 182, 10–13

https://www.mathnet.ru/into666

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.90
17 июля 2025 г., 02:51:02

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 182 (2020). С. 10–13
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-182-10-13

УДК 519.175.3

НОВАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ЧИСЛА ПОМЕЧЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО-ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ 2-СВЯЗНЫХ ГРАФОВ

© 2020 г. **В. А. ВОБЛЫЙ**

Аннотация. Последовательно-параллельный граф — это граф, не содержащий в качестве минора полный граф с 4 вершинами. Получена явная более простая формула для числа помеченных последовательно-параллельных 2-связных графов с заданным числом вершин.

***Ключевые слова*:** перечисление, помеченный граф, последовательно-параллельный граф, 2-связный граф, явная формула.

A NEW FORMULA FOR THE NUMBER OF LABELED SERIES-PARALLEL GRAPHS

© 2020 **V. A. VOBLYI**

Abstract. A series-parallel graph is a graph that does not contain a complete graph with 4 vertices as a minor. A new explicit simpler formula for the number of labeled series-parallel 2-connected graphs with a given number of vertices is obtained.

***Keywords and phrases*:** enumeration, labeled graph, series-parallel graph, 2-connected graph, explicit formula.

***AMS Subject Classification*:** 05C30

Определение 1. Граф называется *последовательно-параллельным*, если он не содержит подразбиения полного графа K_4 (см. [6]).

Последовательно-параллельные графы используются при построении надежных коммуникационных сетей (см. [7]).

В [6] была найдена асимптотика для чисел помеченных связных и 2-связных последовательно-параллельных графов с большим количеством вершин. В [1] перечислены помеченные последовательно-параллельные связные и 2-связные графы по числу вершин. Числа помеченных последовательно-параллельных трициклических и тетрациклических блоков с заданным числом вершин найдены в [4] и [2], соответственно. В [3] доказана явная формула для числа помеченных последовательно-параллельных k-циклических блоков с заданным числом вершин.

Пусть B_n — число помеченных 2-связных последовательно-параллельных графов с n вершинами. В [1] получена формула

$$B_n = (n-1)!\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{n+i+1}\frac{(-2)^j}{i!}\left[(j+1)^i\left(\binom{n-1}{i+2}\binom{n+i}{j}-2\binom{n}{i+2}\binom{n+i-1}{j}\right)+\right.$$
$$\left.+\,j^i\left(\frac{1}{2}\binom{n-3}{i}\binom{n+i+1}{j}-\binom{n-2}{i}\binom{n+i}{j}\right)\right]. \quad (1)$$

В заметке получена явная более простая формула для числа помеченных последовательно-параллельных 2-связных графов с заданным числом вершин.

Теорема 1. *Число B_n помеченных последовательно-параллельных 2-связных графов с n вершинами при $n \geqslant 3$ равно*

$$B_n = (n-1)! \sum_{i=0}^{n-3} \sum_{j=0}^{n+i} \frac{(-2)^{j-1}}{(i+1)!} \binom{n-3}{i} \left[\binom{n+i}{j} j^i + 2i \binom{n+i-1}{j} (j+1)^{i-1} \right];$$

здесь полагается $\binom{n}{m} = 0$ при $0 \leqslant n < m$ и $0^0 = 1$.

Доказательство. Пусть $b_{n,m}$ — число помеченных последовательно-параллельных 2-связных графов с n вершинами и m ребрами,

$$B(x,y) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,m} y^m \frac{x^n}{n!}, \quad B(x) = \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}, \quad B'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

— соответствующие производящие функции. Известны следующие соотношения (см. [6]):

$$\frac{\partial B(x,y)}{\partial y} = \frac{x^2(1+D(x,y))}{2(1+y)}, \quad \ln\left(\frac{1+D(x,y)}{1+y}\right) = \frac{xD^2(x,y)}{1+xD(x,y)}.$$

Пусть $t = \ln((1+D)/(1+y))$; тогда получим

$$D = (1+y)e^t - 1, \quad x = \frac{t}{D(D-t)} = \frac{t}{((1+y)e^t - 1)((1+y)e^t - t - 1)}.$$

В [1] найдено соотношение

$$\frac{\partial B(x,y)}{\partial x} = \frac{xD(2-xD^2)}{2(1+xD)}.$$

Очевидно, имеем

$$D_0 = D(x,1) = 2e^t - 1, \quad x = \frac{t}{D_0(D_0-t)} = \frac{t}{(2e^t-1)(2e^t-t-1)},$$

$$B'(x) = \left[\frac{\partial B(x,y)}{\partial x}\right]_{y=1} = \frac{xD_0(2-xD_0^2)}{2(1+xD_0)} = \frac{x}{2}(2D_0 - 2t - tD_0),$$

$$B'(x) = \frac{x}{2} f(t), \quad f(t) = 4e^t - 2te^t - t - 2, \quad f'(t) = 2e^t - 1 - 2te^t.$$

Известна формула для коэффициентов разложения аналитической функции $f(t)$ в ряд по степеням другой аналитической функции $w(t)$ (ряд Бурмана—Лагранжа; (см. [5, с. 418-419]):

$$f(t) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n w^n(t), \quad d_n = \frac{1}{n}[t^{-1}] \frac{f'(t)}{w^n(t)}, \quad n \geqslant 1.$$

В нашем случае имеем

$$f(t) = 4e^t - 2te^t - t - 2, \quad x = \frac{t}{(2e^t-1)(2e^t-t-1)} = w(t),$$

$$d_n = \frac{1}{n}[t^{-1}](2e^t - 1 - 2te^t)(2e^t-1)^n(2e^t-t-1)^n t^{-n}, \quad B'(x) = x + \frac{x}{2}\sum_{p=1}^{\infty} d_p x^p,$$

$$B_n = (n-1)![x^{-1}]B'(x)x^{-n} = \frac{(n-1)!}{2}[x^{-1}]\sum_{p=1}^{\infty} d_p x^{p+1-n} = \frac{(n-1)!}{2} d_{n-2}, \quad n \geqslant 3,$$

$$B_n = \frac{(n-1)!}{2(n-2)}[t^{-1}](2e^t - 1 - 2te^t)(2e^t-1)^{n-2}(2e^t-t-1)^{n-2}t^{2-n}.$$

Введем обозначение $N = \dfrac{(n-1)!}{2(n-2)}$. С помощью формулы бинома Ньютона и разложения в ряд для экспоненты получим

$$B_n = N[t^{-1}](2e^t-1)^{n-1}(2e^t-t-1)^{n-2}t^{2-n} - N[t^{-1}]2te^t(2e^t-1)^{n-2}(2e^t-t-1)^{n-2}t^{2-n} =$$

$$= N[t^{-1}]\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-2}{i}(2e^t-1)^{n+i-1}(-t)^{n-2-i}t^{2-n} -$$

$$- N[t^{-1}]2te^t\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-2}{i}(2e^t-1)^{n+i-2}(-t)^{n-2-i}t^{2-n} =$$

$$= N[t^{-1}]\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-2}{i}(-1)^{n-i}\sum_{j=0}^{n+i-1}\binom{n+i-1}{j}2^je^{jt}(-1)^{n+i-1-j}t^{-i} -$$

$$- N[t^{-1}]\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-2}{i}(-1)^{n-i}\sum_{j=0}^{n+i-2}\binom{n+i-2}{j}2^{j+1}e^{(j+1)t}(-1)^{n+i-2-j}t^{1-i} =$$

$$= N[t^{-1}]\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{n+i-1}\binom{n-2}{i}(-1)^{j+1}\binom{n+i-1}{j}2^j\sum_{p=0}^{\infty}\frac{j^pt^{p-i}}{p!} -$$

$$- N[t^{-1}]\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{n+i-2}\binom{n-2}{i}(-1)^{j}\binom{n+i-2}{j}2^{j+1}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(j+1)^pt^{p+1-i}}{p!} =$$

$$= N\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=0}^{n+i-1}\binom{n-2}{i}(-1)^{j+1}\binom{n+i-1}{j}2^j\frac{j^{i-1}}{(i-1)!} -$$

$$- N\sum_{i=2}^{n-2}\sum_{j=0}^{n+i-2}\binom{n-2}{i}(-1)^{j}\binom{n+i-2}{j}2^{j+1}\frac{(j+1)^{i-2}}{(i-2)!}. \qquad (2)$$

Так как во втором слагаемом при $i=1$ факториал в знаменателе обращает слагаемое в нуль, а при $j=n+i-1$ обращается в нуль второй биномиальный коэффициент, имеем

$$B_n = \frac{(n-1)!}{2(n-2)}\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=0}^{n+i-1}\binom{n-2}{i}(-1)^{j+1}2^j\left[\frac{j^{i-1}}{(i-1)!}\binom{n+i-1}{j} + 2\binom{n+i-2}{j}2^{j+1}\frac{(j+1)^{i-2}}{(i-2)!}\right].$$

Учитывая тождество для биномиальных коэффициентов

$$\frac{1}{n-2}\binom{n-2}{i} = \frac{1}{i}\binom{n-3}{i-1},$$

найдем

$$B_n = (n-1)!\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=0}^{n+i-1}\binom{n-3}{i-1}\frac{(-2)^{j-1}}{i!}\left[j^{i-1}\binom{n+i-1}{j} + 2(i-1)\binom{n+i-2}{j}2^{j+1}(j+1)^{i-2}\right].$$

После замены переменной $i' = i-1$ и переобозначения $i' \to i$ получим утверждение теоремы. □

Таблица 1

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
B_n	1	9	152	3810	126402	5210576	256469544	14666168250	955097348870

В таблице 1 представлены числа B_n, вычисленные с помощью теоремы 1 и пакета программ Maple. Они совпадают с числами, вычисленными по формуле (1) работы [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воблый В. А.* Второе соотношение Риддела и следствия из него// Дискр. анал. иссл. опер. — 2019. — *26*, № 1. — С. 20–32.
2. *Воблый В. А.* Число помеченных последовательно-параллельных тетрациклических блоков// Прикл. дискр. мат. — 2020. — № 47. — С. 57–61.
3. *Воблый В. А.* Явная формула для числа помеченных последовательно-параллельных k-циклических блоков// Мат. заметки. — 2020. — *108*, № 4. — С. 622–624.
4. *Воблый В. А., Мелешко А. М.* О числе помеченных последовательно-параллельных трициклических блоков// Мат. XV Междунар. конф. «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия. Современные проблемы и приложения» (Тула, 28-31 мая 2018 г.). — Тула: ТПГУ. — С. 168–170.
5. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1965.
6. *Bodirsky M., Gimenez O., Kang M., Noy M.* Enumeration and limit laws of series-parallel graphs// Eur. J. Combin. — 2007. — *28*, № 8. — P. 2091–2105.
7. *Radhavan S.* Low-connectivity network design on series-parallel graphs// Networks. — 2004. — *43*, № 3. — P. 163–176.

Воблый Виталий Антониевич
Всероссийский институт научной и технической информации, Москва
E-mail: `vitvobl@yandex.ru`