I. A. Ikromov, A. R. Safarov, Uniform estimates for oscillatory integrals with smooth phase, *Chebyshevskii Sb.*, 2024, Volume 25, Issue 1, 42–51

DOI: 10.22405/2226-8383-2024-25-1-42-51

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 1.

УДК 517.518.5 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-42-51

О равномерных оценках осцилляторных интегралов с гладкой фазой

И. А. Икромов, А. Р. Сафаров

Икромов Исроил Акрамович — Институт математики им. В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (г. Ташкент, Узбекистан), Самаркандский государственный университет (г.Самарканд, Узбекистан).
e-mail: ikromov1@rambler.ru
Сафаров Акбар Рахманович — Институт математики им. В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (г. Ташкент, Узбекистан), Самаркандский государственный университет (г.Самарканд, Узбекистан).
e-mail: safarov-akbar@mail.ru

Аннотация

Мы рассмотрим задачу о равномерных оценках осцилляторных интегралов с гладкой фазовой функцией, имеющей особенность типа D_∞. Оценка является точной и является аналогом оценок результата В. Н. Карпушкина.

Ключевые слова: фаза, деформация, особенность.

Библиография: 10 названий.

Для цитирования:
И. А. Икромов, А. Р. Сафаров. О равномерных оценках осцилляторных интегралов с гладкой фазой // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 1, с. 42–51.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 1.

UDC 517.518.5 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-42-51

Uniform estimates for oscillatory integrals with smooth phase

I. A. Ikromov, A. R. Safarov

Ikromov Isroil Akramovich — V. I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan (Tashkent, Uzbekistan), Samarkand State University (Samarkand, Uzbekistan).
e-mail: ikromov1@rambler.ru
Safarov Akbar Rakhmanovich — V. I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan (Tashkent, Uzbekistan), Samarkand State University (Samarkand, Uzbekistan).
e-mail: safarov-akbar@mail.ru

Abstract

We consider the problem on uniform estimates for an oscillatory integrals with the smooth phase functions having singularities D_∞. The estimate is sharp and analogy to estimates of the work of V. N. Karpushkin.

Keywords: phase, deformation, singularity.

Bibliography: 10 titles.

For citation:
I. A. Ikromov, A. R. Safarov, 2024, "Uniform estimates for oscillatory integrals with smooth phase", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 1, pp. 42–51.

1. Введение

Определение 1. *Осцилляторным интегралом с гладкой вещественно-значной фазой f и амплитудой a называется интеграл вида:*

$$J(\lambda, f, a) = \int_{\mathbb{R}^n} a(x) e^{i\lambda f(x)} dx$$

где $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Пусть $U \subset V \subset \mathbb{R}^2-$ограниченные окрестности начала координат, $\overline{U}(\overline{V})$ замыкание $U(V)$. Допустим, что функция $f : \overline{V} \to \mathbb{R}$ (где $f \in C^N\left(\overline{V}\right)$, $(N \geqslant 8)$) имеет следующий вид:

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2 + g(x_1, x_2), \tag{1}$$

где $g \in C^N(V)$, такая, что $D^\alpha g(0,0) = 0$ для всех $\alpha_1 + \alpha_2 \leqslant 3$, здесь D^α означает $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}$, $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2) \in Z_+^2-$мультииндекс, $Z_+ = \{0\} \cup \mathbb{N}$ неотрицательные целые числа.

Определение 2. *Пусть $f \in C^N\left(\bar{V}\right)$, где $N \geq 0$ некоторое неотрицательное целое число. Деформацией функции f называется $f + F$, где $f \in C^N\left(\bar{V}\right)$ (см.[7]).*

Пусть $\vartheta_{C^8(\overline{V})}(\varepsilon) := \{F \in C^8\left(\overline{V}\right), \|F\|_{C^8(\overline{V})} < \varepsilon\}$. Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. *Пусть $f \in C^8(\overline{V})$ имеет вид (1). Тогда найдутся положительные числа ε, C и окрестность $U \subset V$ начала координат, такие, что для произвольных функций $a \in C_0^1(U)$ и $F \in \vartheta_{C^8(\overline{V})}(\varepsilon)$ справедлива следующая оценка:*

$$\left| \int_U e^{i\lambda(f+F)} a(x)\, dx \right| \leqslant \frac{C \|a\|_{C^1}}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}.$$

1) Теорема является аналогом более общей теоремы В.Н.Карпушкина [7] (а также см.[2]) для достаточно гладких функций.

2) Если $g \equiv 0$, то оценка, полученная в теореме, неулучшаема.

3) Для некоторых g функция f может иметь особенность типа D_k. В этом случае из результатов Дюстермаата [5] можно вывести более точную оценку.

4) Инвариантные оценки с полиномиальной фазой рассмотрены в работах [10]-[15].

2. Некоторые вспомогательные утверждения

Сначала мы приведем несколько простых вспомогательных определений.

Определение 3. *[1] Рассмотрим арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$ с фиксированными координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Функция $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ называется квазиоднородной функцией степени d с показателями $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, если при любом $\lambda > 0$ имеем $f(\lambda^{\alpha_1}x_1, \lambda^{\alpha_2}x_2, \ldots, \lambda^{\alpha_n}x_n) = \lambda^d f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Показатели α_s называются весами переменных x_s.*

Следующая лемма доказана в работе [6].

Лемма 1. *Пусть $f-$ гладкая функция в окрестности начала координат , $\mathbb{R}^2$ $c > 0$ и α_1, α_2 $(0 < \alpha_1 \leq \alpha_2)$ – фиксированные рациональные числа и $m \geq 1$ - натуральное число, причем $\alpha_1 m > c$. Тогда включение*

$$M(f) \subset \{(t_1, t_2) : \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 \geq c\}$$

справедливо тогда и только тогда, когда существует полином $f_\pi(x_1, x_2)$ удовлетворяющий условию

$$M(f_\pi) \subset \{(t_1, t_2) : \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 \geq c\}$$

и гладкие функции $a_{jk}(x_1, x_2)$ такие, что справедливо равенство:

$$f(x_1, x_2) = f_\pi(x_1, x_2) + \sum_{j+k=m} x_1^j x_2^k a_{jk}(x_1, x_2),$$

здесь $f_\pi(x_1, x_2)-$ называется главной частью функции $f(x_1, x_2)$ относительно веса (α_1, α_2) и $M(\cdot)-$ называется носителем Тейлора разложения функции f в ряд в точке 0.

Пусть $C^\infty(V)$ – множество бесконечно дифференцируемых функций, определенных в V, где V некоторая окрестность начала координат $\mathbb{R}^n$. Очевидно, что это множество образует коммутативное кольцо относительно обычного умножения и сложения функций. Пусть $f \in C^\infty(V)$ данная функция с критической точкой в нуле, т.е. $\nabla f(0) = 0$. Рассмотрим подмножество

$$I_{\nabla f} := \{h \in C^\infty(V) : h(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} h_k(x),\, h_k \in C^\infty(V)\}.$$

Это множество является подкольцом $C^\infty(V)$. Причем очевидно, что для любого $g \in C^\infty(V)$ выполняется соотношение $gI_{\nabla f} \subset I_{\nabla f}$. Иными словами, $I_{\nabla f}$ является идеалом ("идеальным"подкольцом) кольца $C^\infty(V)$. Этот идеал называется идеалом порожденный частными производными $\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}$, или градиентным идеалом кольца $C^\infty(V)$ и обозначается через $I_{\nabla f} =< \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} >$.

Пусть функция $f(x_1, x_2)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$1)\frac{\partial^{|\alpha|} f(0,0)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} = 0, |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \leqslant 2.$$

2) допустим, множество корней уравнения $f_3(x_1, x_2) = 0$ на S_1 (где f_3 отрезок Тейлора функции f порядка 3 и S_1 единичная окружность в $\mathbb{R}^2$ с центром в начале координат) состоит из одного простого и двукратного корня.

Тогда функция f, линейным преобразованием, приводится к виду $f(x(u)) = u_1 u_2^2 + + g_1(u_1, u_2)$, где $g_1(u_1, u_2)$ - некоторая функция удовлетворяющая условию $D^\alpha g_1(0,0) = 0$, при всех $|\alpha| \leqslant 3$, аналогичное утверждение доказано для однородных многочленов третьей степени в работе [1] (стр.147). Главная часть относительно веса $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ функции f обозначается через f_π. Таким образом, без ограничение общности, мы можем считать, что $f_\pi(x_1,x_2)=x_1x_2^2$.

Следуя [7] обозначим через E_d линейное пространство полиномов степени меньше d относительно веса $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ и $I_{\nabla f_\pi}$ градиентный идеал функции f_π.

Определение 4. *Координатное подпространство $B\subset E_1$ называется нижним версальным, если $(I_{\nabla f_\pi}\bigcap E_1)\oplus B=E_1$ (т.е. $I_{\nabla f_\pi}\bigcap E_1\bigcap B=0$, $(I_{\nabla f_\pi}\bigcap E_1)+B=E_1$)).*

Легко показать, что $B=\left\langle 1,x_1,x_2,x_1^2\right\rangle$ является версальным подпространством B для функции $f_\pi\left(x_1,x_2\right)=x_1x_2^2$.

Пусть $\sum\limits_{\frac{m_1}{3}+\frac{m_2}{3}<d} s_mx^m$ отрезок ряда Тейлора в точке 0 функции F. Положим $\pi_d(F)=$ $=\sum s_mx^m$, где $0\le\frac{m_1}{3}+\frac{m_2}{3}<d$. Таким образом, π_1 определяет отображение пространства $C^N\left(V\right)$ на пространство E_d, где $d\leqslant\frac{N}{3}$.

Следующее предложение о возможности гладко выбрать замену координат является аналогом теоремы версальности. Аналогом деформации функции f является $f+F$, где $F\in\vartheta_{C^8\left(\overline{V}\right)}(\varepsilon)$ (деформация с бесконечным числом параметров). Аналогом версальной деформации f является $f+F$, где $F\in\vartheta_{C^8\left(\overline{V}\right)}(\varepsilon)$, $\pi_1F\in B$. Здесь $B-$нижнее версальное подпространство [1].

Лемма 2. *Пусть $z\in C^8(\overline{V})$ некоторая вектор-функция. Функция $(f+F)(y+z(y))$ записывается в виде*

$$(f+F)(y+z(y))=f(0)+F(0)+\alpha_{10}(z)y_1+\alpha_{01}(z)y_2+$$

$$+\alpha_{20}(z)y_1^2+\alpha_{11}(z)y_1y_2+\alpha_{02}(z)y_2^2+\sum_{i_1+i_2=3}\alpha_{i_1i_2}(z)y_1^{i_1}y_2^{i_2}+y_1y_2^2,$$

где $\alpha_{10},\alpha_{01},\alpha_{20}-$функционалы от F и $\alpha_{i_1i_2}:C^3(U)\to C^3(V)$ операторы причем $2\le i_1+i_2=3$, выполняется $\|\alpha_{i_1i_2}\|_{C^2}\le C\varepsilon$, при условии $F\in\vartheta_{C^8\left(\overline{V}\right)}(\varepsilon)$.

Доказательство. Представим функцию $f+F$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}&f+F=s_{10}x_1+s_{01}x_2+s_{20}x_1^2+2s_{11}x_1x_2+s_{02}x_2^2+s_{30}(x_1,x_2)x_1^3+\\&+s_{21}(x_1,x_2)x_1^2x_2+(1+s_{12}(x_1,x_2))x_1x_2^2+s_{03}(x_1,x_2)x_2^3,\end{aligned}$$

где $s_{10}=\frac{\partial F(0,0)}{\partial x_1}$, $s_{01}=\frac{\partial F(0,0)}{\partial x_2}$, $s_{20}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2F(0,0)}{\partial x_1^2}$, $s_{11}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2F(0,0)}{\partial x_1\partial x_2}$,
$s_{02}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2F(0,0)}{\partial x_2^2}$, $s_{k_1k_2}(x_1,x_2):=s_{k_1k_2}=\frac{3!}{k_1!k_2!}\int_0^1(1-u)^2\frac{\partial^3(F+g)(ux_1,ux_2)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}}du$, $k_1+k_2=3$.

Сделаем замену $x_1-z_1(y_1,y_2)=y_1$, $x_2-z_2(y_1,y_2)=y_2$ и используем следующие разложения

$$z_1(y)=z_1^0+a_{10}y_1+a_{01}y_2+a_{20}y_1^2+a_{11}y_1y_2+a_{02}y_2^2+r_1(y)$$

и

$$z_2(y)=z_2^0+b_{10}y_1+b_{01}y_2+b_{20}y_1^2+b_{11}y_1y_2+b_{02}y_2^2+r_2(y),$$

где $z_1^0=z_1(0,0)$, $a_{10}=\frac{\partial z_1(0,0)}{\partial y_1}$, $a_{01}=\frac{\partial z_1(0,0)}{\partial y_2}$, $a_{20}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2z_1(0,0)}{\partial y_1^2}$, $a_{02}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2z_1(0,0)}{\partial y_2^2}$, $a_{11}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2z_1(0,0)}{\partial y_1\partial y_2}$, $z_2^0=z_2(0,0)$, $b_{10}=\frac{\partial z_2(0,0)}{\partial y_1}$, $b_{01}=\frac{\partial z_2(0,0)}{\partial y_2}$, $b_{20}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2z_2(0,0)}{\partial y_1^2}$, $b_{02}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2z_2(0,0)}{\partial y_2^2}$, $b_{11}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2z_2(0,0)}{\partial y_1\partial y_2}$,
$r_i(y):=\frac{3!}{k_1!k_2!}\int_0^1(1-u)^2\frac{\partial^3z_i(uy_1,uy_2)}{\partial y_1^{k_1}\partial y_2^{k_2}}du$, $k_1+k_2=3$, $i=1,2$.

Разложим функцию $(F+g)(y+z(y))$ по формуле Тейлора в точке $(y_1,y_2)=(0,0)$

Тогда получим

$$(F+g)(y+z(y)) = \alpha_{00}(z) + \alpha_{10}(z)y_1 + \alpha_{01}(z)y_2 +$$

$$+\alpha_{20}(z)y_1^2 + \alpha_{11}(z)y_1y_2 + \alpha_{02}(z)y_2^2 + \sum_{i_1+i_2=3} \alpha_{i_1i_2}(z)y_1^{i_1}y_2^{i_2} + y_1y_2^2,$$

где $\alpha_{00}(z) = f(0) + F(0), \alpha_{10}(z), \alpha_{01}(z), \alpha_{20}(z)$ некоторые функционалы от z и $\alpha_{02}(z)$, $\alpha_{11}(z) : C^3(U) \to C^3(V)$ операторы имеющие вид:

$$\alpha_{02}(z) = z_1 + \tilde{\Phi}_1(z, F), \ \ \alpha_{11}(z) = 2z_2 + \tilde{\Phi}_2(z, F),$$

здесь $\tilde{\Phi}_j : C^3(U) \to C^3(V)$ некоторые гладкие операторы, удовлетворяющие условиям $\tilde{\Phi}_j(z, 0) \equiv 0, \ (j = 1, 2)$. □

Предложение 1. *Существует положительное число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\|F\|_{C^4(\overline{V})} < \varepsilon$ найдется такое отображение $(z_1, z_2) := (z_1(F), z_2(F)) \in C^4\left(U \to \mathbb{R}^2\right)$, определенное в некоторой окрестности U, для которого справедливо следующее равенство*

$$\pi_1\left(f\left(y_1 + z_1, y_2 + z_2\right) + F\left(y_1 + z_1, y_2 + z_2\right)\right) = \tilde{c}_0(F) + \tilde{c}_1(F)y_1 + \tilde{c}_2(F)y_2 + \tilde{c}_3(F)y_1^2,$$

где $\pi_1(\cdot)-$ проектирование пространства $C^4(V)$ на пространство E_1.

Теперь рассмотрим следующие функциональные уравнения относительно (z_1, z_2) :

$$\Phi_1(y, F, z) := \alpha_{11}(z) = 0, \Phi_2(y, F, z) := \alpha_{02}(z) = 0. \qquad (2)$$

Приведем вспомогательную лемму.

Лемма 3. *Для непрерывных операторов $\Phi_1(y, F, z)$, $\Phi_2(y, F, z)$ в пространстве $U_1 \times \times C^4(V_1) \times U_2$ существует частная производная по z и они дифференцируемы по Фреше в точке 0, где $U_1 \subset \mathbb{R}^2$, $U_2 \subset \mathbb{R}^2$.*

Доказательство. Ради определенности, покажем существование частных производных по z и дифференцируемость оператора $\Phi_1(y, F, z)$, для функции $\Phi_2(y, F, z)$ доказательство совершенно аналогично.

Так как функция $F \in C^8\left(\bar{V}\right)$ то отсюда вытекает дифференцируемость оператора $\Phi_1(y, F, z)$.

Существование производных отображения $\Phi_2(y, F, z)$ рассматривается аналогично. □

Лемма 4. *Операторы $\Phi_1(y, F, z)$, $\Phi_2(y, F, z)$ удовлетворяют следующим условиям: 1)$\Phi_1(y, 0, 0) \equiv 0, \ \Phi_2(y, 0, 0) \equiv 0$. 2) $\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_2} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_2} \end{vmatrix} \neq 0$.*

Доказательство. Из явного вида операторов Φ_1, Φ_2 вытекает выполнения соотношения 1)$\Phi_1(y, 0, 0) \equiv 0, \ \Phi_2(y, 0, 0) \equiv 0$. Очевидно, что $\left|\frac{\partial \Phi_1(0)}{\partial z_1}\frac{\partial \Phi_2(0)}{\partial z_2} - \frac{\partial \Phi_1(0)}{\partial z_2}\frac{\partial \Phi_2(0)}{\partial z_1}\right| = 2 \neq 0$ и следовательно выполнено второе утверждение. Лемма 4 доказана.

Перейдем к доказательству Предложения 1. Так как операторы $\Phi_1(y, F, z)$ и $\Phi_2(y, F, z)$, согласно лемм 2 и 3, удовлетворяют условиям теоремы о неявных отображениях, то, согласно этой теореме, найдется решение $z_1 = z_1\left(y_1, y_2, F(y)\right)$, $z_2 = z_2\left(y_1, y_2, F(y)\right)$ уравнения (2) и они являются гладкими функциями, в зависимости от гладкости отображения F. □ Замечание 1. Отметим, что если $F \in C^{3+k}$ и $f \in C^{3+k}$ то $z(y) \in C^k$.

3. О разбиении единицы

Осцилляторный интеграл оценивается с помощью разбиения единицы.

Пусть $k = \left(\frac{k_1}{3}, \frac{k_2}{3}\right)$ и $\tau > 0$ фиксированное число. Рассмотрим отображение $\delta_\tau^k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ определенное формулой:

$$\delta_\tau(x) = (\tau x_1, \tau x_2)\,.$$

Введем функцию $\beta(x)$, удовлетворяющую условиям:
1) $\beta \in C^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$,
2) $0 \leqslant \beta(x) \leqslant 1$ для любого $x \in \mathbb{R}^2$,
3) $\beta(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } |x| \leqslant 1, \\ 0, & \text{при } |\delta_{2^{-1}}(x)| \geqslant 1 \end{cases}$

Существование такой функции доказано в [3] (а также [8]).
Пусть

$$\chi(x) = \beta(x) - \beta(\delta_2(x)).$$

Основные свойства функции $\chi(x)$содержатся в следующей лемме.

Лемма 5. *Функция $\chi(x)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1. *Для произвольного фиксированного x справедливо равенство*

$$\beta(\delta_{2^{-\nu_0}}(x)) + \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} \chi\left(\delta_{2^{-\nu}}(x)\right) = 1.$$

2. *Для произвольного $x \neq 0$ существует $\nu_0 = \nu_0(x)$ такое, что при любом $\nu \notin [\nu_0, \nu_0 + 4]$*

$$\chi\left(\delta_{2^\nu}(x)\right) = 0.$$

3. *Для произвольного ν_0 существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\chi\left(\delta_{2^\nu}(x)\right) = 0$ при любом $\nu < \nu_0$ и $|x| \geqslant \varepsilon$.*

Лемма 5 доказана в работе [8].

Лемма 6. *Функция $\chi(x)$ удовлетворяет следующим условиям: 1) Для произвольного фиксированного $x \neq 0$ справедливо равенство*

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \chi\left(\delta_{2^\nu}(x)\right) = 1.$$

2) Существует $N = N(\tau)$ такое, что для произвольного $x \neq 0$ существует $\nu_0 = \nu_0(x)$ такое, что при любом $\nu \in [\nu_0, \nu_0 + N]$

$$\chi\left(\delta_{2^\nu}(x)\right) = 0.$$

3) Для произвольного ν_0 существует ε такое, что

$$\chi\left(\delta_{2^\nu}(x)\right) = 0$$

при любом $\nu < \nu_0$ и $|x| \geqslant \varepsilon$.

4. Доказательство основного результата

Так как функция имеет вид $f(x_1,x_2)=x_1x_2^2+g(x_1,x_2)$, то применяя предложение 1 для $f+F$ и получим

$$f+F=s_{10}y_1+s_{01}y_2+s_{20}y_1^2+y_1y_2^2+s_{30}y_1^3+s_{21}y_1^2y_2+s_{12}y_1y_2^2+s_{03}y_2^3+R_4(y_1,y_2)\,, \tag{3}$$

где $R_4(y_1,y_2)$ остаточный член. Теперь оценим интеграл J. Сначала введем «квазирасстояние» $\rho=|s_{10}|^{\frac{3}{2}}+|s_{01}|^{\frac{3}{2}}+|s_{20}|^3$ и в интеграле (1) с фазовой функцией (3) сделаем замену переменных $y_1=\rho^{\frac{1}{3}}\tau_1$, $y_2=\rho^{\frac{1}{3}}\tau_2$. Тогда получим:

$$J(\lambda)=\rho^{\frac{2}{3}}\int_{R^2}a\left(\rho^{\frac{1}{3}}\tau_1,\rho^{\frac{1}{3}}\tau_2\right)e^{i\lambda\rho\Phi}d\tau,$$

где $\Phi=\frac{s_{10}}{\rho^{\frac{2}{3}}}\tau_1+\frac{s_{01}}{\rho^{\frac{2}{3}}}\tau_2+\frac{s_{20}}{\rho^{\frac{1}{3}}}\tau_1^2+\tau_1\tau_2^2+s_{30}\tau_1^3+s_{21}\tau_1^2z_2+s_{12}\tau_1\tau_2^2+s_{03}\tau_2^3+\frac{1}{\rho}R_4\left(\rho^{\frac{1}{3}}\tau_1,\rho^{\frac{1}{3}}\tau_2\right)$. Применим лемму 5, т.е. разбиение единицы, для интеграла $J(\lambda)$ и получим разложение в следующем виде:

$$J(\lambda)=J_0(\lambda)+\sum_{k=k_0}^{\infty}J_k(\lambda)\,,$$

где

$$J_k(\lambda)=\rho^{\frac{2}{3}}\int_{\mathbb{R}^2}a\left(\rho^{\frac{1}{3}}\tau_1,\rho^{\frac{1}{3}}\tau_2\right)\chi\left(2^{-\frac{k}{3}}\tau_1,2^{-\frac{k}{3}}\tau_2\right)e^{i\lambda\rho\Phi}d\tau,$$

$$J_0(\lambda)=\rho^{\frac{2}{3}}\int_{\mathbb{R}^2}a\left(\rho^{\frac{1}{3}}\tau_1,\rho^{\frac{1}{3}}\tau_2\right)\beta_0(\delta_{2^{-k_0}}(x))e^{i\lambda\rho\Phi}d\tau.$$

Сначала оценим интеграл $J_k(\lambda)$. В этом интеграле $J_k(\lambda)$ сделаем замену переменных $2^{-\frac{k}{3}}\tau_1=t_1$, $2^{-\frac{k}{3}}\tau_2=t_2$ и получим

$$J_k(\lambda)=2^{\frac{2k}{3}}\rho^{\frac{2}{3}}\int_{\mathbb{R}^2}a\left(2^{\frac{k}{3}}\rho^{\frac{1}{3}}t_1,2^{\frac{k}{3}}\rho^{\frac{1}{3}}t_2\right)\chi(t_1,t_2)\,e^{i\lambda 2^k\rho\Phi_k(t,s,\rho)}dt,$$

где фазовая функция имеет вид

$$\begin{aligned}\Phi_k(t,s,\rho)&=2^{-\frac{2k}{3}}\sigma_{10}t_1+2^{-\frac{2k}{3}}\sigma_{01}t_2+2^{-\frac{k}{3}}\sigma_{20}t_1^2+t_1t_2^2+\\&+s_{30}t_1^3+s_{21}t_1^2t_2+s_{12}t_1t_2^2+s_{03}t_2^3+2^{-k}\frac{1}{\rho}R_4\left(2^{\frac{k}{3}}\rho^{\frac{1}{3}}t_1,2^{\frac{k}{3}}\rho^{\frac{1}{3}}t_2\right)\,,\end{aligned}$$

здесь $\sigma_{10}=\frac{s_{10}}{\rho^{\frac{2}{3}}}$, $\sigma_{01}=\frac{s_{01}}{\rho^{\frac{2}{3}}}$, $\sigma_{20}=\frac{s_{20}}{\rho^{\frac{1}{3}}}$, $R_4\left(2^{\frac{k}{3}}\rho^{\frac{1}{3}}t_1,2^{\frac{k}{3}}\rho^{\frac{1}{3}}t_2\right)=\frac{2^{\frac{4k}{3}}\rho^{\frac{4}{3}}}{6}(s_{40}t_1^4+s_{31}t_1^3t_2+s_{22}t_1^2t_2^2+$
$+s_{13}t_1t_2^3+s_{04}t_2^4)$,
где $s_{40}(t,s,\rho)=\frac{1}{6}\int_0^1(1-u)^3\frac{\partial^4\Phi_k(ut,s,\rho)}{\partial t_1^4}du$, $s_{31}(t,s,\rho)=\frac{1}{6}\int_0^1(1-u)^3\frac{\partial^4\Phi_k(ut,s,\rho)}{\partial t_1^3\partial t_2}du$, $s_{22}(t,s,\rho)=$
$=\frac{1}{6}\int_0^1(1-u)^3\frac{\partial^4\Phi_k(ut,s,\rho)}{\partial t_1^2\partial t_2^2}du$, $s_{13}(t,s,\rho)=\frac{1}{6}\int_0^1(1-u)^3\frac{\partial^4\Phi_k(ut,s,\rho)}{\partial t_1\partial t_2^3}du$, $s_{04}(t,s,\rho)=$
$=\frac{1}{6}\int_0^1(1-u)^3\frac{\partial^4\Phi_k(ut,s,\rho)}{\partial t_2^4}du$.

Мы можем считать (в зависимости от носителя амплитуды χ_0, по лемме 5), что число k_0 достаточно большое.

Сначала рассмотрим случай, когда нет осцилляции. Пусть $\left|2^k\lambda\rho\right|\leqslant L$, где L большое фиксированное число. Тогда из тривиальной оценки интеграла получим:

$$|J_k|\leqslant\frac{2^{\frac{2k}{3}}\rho^{\frac{2}{3}}A}{|2^k\lambda\rho|^{\frac{1}{2}}}=\frac{2^{\frac{k}{6}}\rho^{\frac{1}{6}}A}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}. \tag{4}$$

Пусть теперь $\left|2^k\lambda\rho\right| > L$ и $k > k_0$ достаточно большое число. Тогда, по условию, Φ_k может быть рассмотрена как малая деформация функции $\tau_1\tau_2^2$, причем $(\tau_1,\tau_2) \in D :=\mathrm{supp}(\chi) = \{\frac{1}{2} \le |\tau| \le 2\}$. Очевидно, что если $\tau^0 \in D$ фиксированная точка и $\tau_2^0 \neq 0$, то эта точка не является критической. Если χ^0 срезающая функция (т.е. функция носитель которой находится в достаточно малой окрестности этой точки), то интеграл

$$J_k^{\chi^0}(\lambda) := 2^{\frac{2k}{3}}\rho^{\frac{2}{3}} \int_{R^2} a\left(2^{\frac{k}{3}}\rho^{\frac{1}{3}}t_1, 2^{\frac{k}{3}}\rho^{\frac{1}{3}}t_2\right)\chi(t_1,t_2)\, e^{i\lambda 2^k\rho\Phi_k(t,s,\rho)}\chi^0(t)dt,$$

тривиально оценивается интегрированием по частям и имеет место неравенство (4).

Если $\tau_2^0 = 0$, то $\tau_1^0 \neq 0$. В этом случае, используя лемму Ван дер Корпута [4] (более общее утверждение содержит в [9]), снова имеем оценку вида (4).

Так как на носителе амплитуды $2^{\frac{k}{3}}\rho^{\frac{1}{3}} < 1$, то

$$\frac{1}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}} \sum_{\left|2^k\lambda\rho\right|\leqslant 1} |J_k| \leqslant \frac{c}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}} \sum_{2^k\rho\leqslant 1} 2^{\frac{k}{6}}\rho^{\frac{1}{6}} \leqslant \frac{c}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}.$$

Теперь рассмотрим оценку интеграла $J_0(\lambda)$. Рассмотрим следующие случаи для параметров σ.

Введем квазисферу $\rho(\sigma) := \{|\sigma_{10}|^{\frac{2}{3}} + |\sigma_{01}|^{\frac{2}{3}} + |\sigma_{20}|^{\frac{1}{3}} = 1\}$ и рассмотрим фазовую функцию

$$\begin{aligned}&\Phi_0(\tau,\sigma,\rho) = \sigma_{10}\tau_1 + \sigma_{01}\tau_2 + \sigma_{20}\tau_1^2 + \tau_1\tau_2^2 + s_{30}\tau_1^3 + s_{21}\tau_1^2\tau_2 + s_{12}\tau_1\tau_2^2\\ &+ s_{03}\tau_2^3 + \frac{1}{\rho}\frac{\rho^{\frac{4}{3}}}{6}(s_{40}\tau_1^4 + s_{31}\tau_1^3\tau_2 + s_{22}\tau_1^2\tau_2^2 + s_{13}\tau_1\tau_2^3 + s_{04}\tau_2^4).\end{aligned}$$

Отметим, что на квазисфере $c_1 \le |\sigma| \leqslant c_2$, где c_1, c_2-фиксированные положительные числа. Таким образом пространство параметров и $\mathrm{supp}(\beta(\delta_{2^{-k_0}}(\cdot)))$ компактные множества. Пусть, $\sigma = \sigma^0$, $\left|\sigma^0\right| = c$ фиксированный вектор и $\tau = \tau^0$ фиксированная точка. Тогда $\Phi_0(\tau,\sigma,\rho)$- достаточно малая гладкая деформация следующей функции

$$\Phi = \sigma_{10}^0\tau_1 + \sigma_{01}^0\tau_2 + \sigma_{20}^0\tau_1^2 + \tau_1\tau_2^2.$$

Если $\frac{\partial\Phi\left(\tau_1^0,\tau_2^0\right)}{\partial\tau_1} \neq 0$ или $\frac{\partial\Phi\left(\tau_1^0,\tau_2^0\right)}{\partial\tau_2} \neq 0$, то при $|\sigma-\sigma_0| < \varepsilon$ $|s_{30}|+|s_{21}|+|s_{12}|+|s_{03}| < \varepsilon$ справедлива следующая оценка: $|\nabla\Phi_0(\tau,\sigma,s)| > \delta > 0$
для некоторого положительного числа δ.

Применяя формулу интегрирования по частям для интеграла J_0^χ, получим:

$$|J_0^\chi| \leqslant \frac{c\,\|a\|_{C^1}}{|\lambda|^{\frac{2}{3}}}, \tag{5}$$

где

$$J_0^\chi(\lambda) = \int_{R^2}\chi(\tau)\,a(\tau_1,\tau_2)\,\chi_0(\tau_1,\tau_2)\,e^{i\lambda\rho\Phi_0(\tau,\sigma,s)}d\tau \tag{6}$$

и $\chi-$гладкая функция сосредоточенная в достаточно малой окрестности точки τ^0. Достаточно рассмотреть случай когда τ^0-критическая точка.

Так как τ^0- критическая точка, то справедливо следующее равенство:

$$\sigma_{10}^0 + 2\sigma_{20}^0\tau_1^0 + 2(\tau_2^0)^2 = 0, \sigma_{01}^0 + 2\tau_1^0\tau_2^0 = 0.$$

Для функции Φ в точке $\left(\tau_1^0,\tau_2^0\right)$ матрица Гессе имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 2\sigma_{20}^0 & 2\tau_2^0 \\ 2\tau_2^0 & 2\tau_1^0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что это ненулевая матрица, так как если $\sigma_{20}^0 = 0$, то либо $\sigma_{10}^0 \neq 0$, либо $\sigma_{01}^0 \neq 0$, следовательно $\tau_1^0 \neq 0$ или $\tau_2^0 \neq 0$.

Таким образом, ранг матрицы Гессе $\begin{pmatrix} 2\sigma_{20}^0 & 2\tau_2^0 \\ 2\tau_2^0 & 2\tau_1^0 \end{pmatrix}$ не меньше единицы. Если ранг матрицы равен единице, то, применяя лемму Морса по параметрам, для интеграла J_0 получим следующую оценку

$$|J_0| \leqslant \frac{c\, \|a\|_{C^1}\, \rho^{\frac{1}{6}}}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}.$$

Наконец, суммируя полученные оценки придем к доказательству теоремы 1. Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и вольновых фронтов // М.:Наука. 1982.

2. Варченко А.Н. Многогранник Ньютона и оценки осциллирующих интегралов // Функц. анализ и его прил., Т.10, вып 5. 1976. С. 13-38.

3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики // М.:Наука. 1981.

4. Van der Korput. K.G. Zur Methode der stationaren phase// Compositio Math. V.1. 1934. P. 15-38.

5. Duistermaat J. Oscillatory integrals Lagrange immersions and unifoldings of singularities // Comm. Pure.Appl.Math. - 1974. - V.27, № 2. - P.207-281.

6. Ikromov I.A., Muller D. On adapted coordinate systems // Trans. Amer. Math. Soc., 363(2011), no. 6, P. 2821-2848.

7. В.Н.Карпушкин. Равномерные оценки осциллирующих интегралов с параболической или гиперболической фазой // Труды Семинара имени И.Г.Петровского. вып.9. 1983. С. 3-39.

8. Sogge C.D., Fourier integrals in Classical Analysis // Cambridge university press, Cambridge, 1993. P.105.

9. Carbery A., Christ M., and Wright J. Multidimensional Van der Korput lemma and sublevel set estimates // Journal of AMS, V.12. 1999. P.981-1015.

10. Ruzhansky M., Safarov A. R., Khasanov G. A. Uniform estimates for oscillatory integrals with homogeneous polynomial phases of degree 4 // Analysis and Mathematical Physics, **12(130)**, (2022).

11. Сафаров А. Инвариантные оценки двумерных осцилляторных интегралов // Математические заметки. Т.104, вып 2. 2018. С. 289-300.

12. Safarov A. On the L^p-bound for trigonometric integrals // Analysis mathematica **45**, 2019,153-176 p.

13. Safarov A. On invariant estimates for oscillatory integrals with polynomial phase // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. **9** (2016), P.102–107.

14. Safarov A. On a problem of restriction of Fourier transform on a hypersurface // Russian Mathematics, 63 (4), 2019, P.57-63.

15. Safarov A. R. Estimates for Mittag-–Leffler Functions with Smooth Phase Depending on Two Variables // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., **15(4)** (2022), P.459-–466.

REFERENCES

1. Arnold, V.I. & Gusein-Zade, S.M.& Varchenko, A.N. 1985. "Singularities of Differentiable Maps", *Birkhauser, Boston Basel, Stuttgart.*

2. Varchenko, A.N. 1976. "Newton polyhedra and estimation of oscillating integrals", *Functional Analysis and Its Applications* vol. 10, pp. 175—196.

3. Vladimirov, V.S. 1981. "Mathematic physics equation", *M.:Nauka.* (Russian).

4. Van der Korput, 1934. "K.G. Zur Methode der stationaren phase", *Compositio Math.* V.1., pp. 15–38.

5. Duistermaat, J., 1974. "Oscillatory integrals Lagrange immersions and unifoldings of singularities", *Comm. Pure.Appl.Math.*, Vol. 27, № 2, pp. 207–281.

6. Ikromov, I.A. & Muller, D. 2011. "On adapted coordinate systems", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol.363, no. 6, pp. 2821-2848.

7. Karpushkin, V.N. 1983, "Uniform estimates for oscillatory integrals with parabolic or hyperbolic phase", *Proceedings of the I.G.Petrovsky Seminar.* Vol.9. pp. 3-39.(Russian)

8. Sogge, C.D. 1993. "Fourier integrals in Classical Analysis", *Cambridge, Cambridge university press,* P. 105.

9. Carbery, A., Christ, M., and Wright, J., 1999. " Multidimensional Van der Korput lemma and sublevel set estimates", *Journal of AMS,* V.12. pp. 981–1015.

10. Ruzhansky, M., Safarov, A. R., Khasanov, G. A., 2022. "Uniform estimates for oscillatory integrals with homogeneous polynomial phases of degree 4", *Analysis and Mathematical Physics*, **12(130)**.

11. Safarov, A., 2018. "Invariant estimates for double oscillatory integrals", *Mathematical Notes,* 104:2, pp. 293—302.

12. Safarov, A., 2019. On the L^p-bound for trigonometric integrals. *Analysis mathematica*, **45**, pp. 153–176.

13. Safarov, A., 2016. "On invariant estimates for oscillatory integrals with polynomial phase", *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.* **9** (2016), pp. 102–107.

14. Safarov, A., 2019. "On a problem of restriction of Fourier transform on a hypersurface", *Russian Mathematics*, 63 (4), pp. 57–63.

15. Safarov, A. R., 2022. "Estimates for Mittag-–Leffler Functions with Smooth Phase Depending on Two Variables, *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, **15(4)**, pp. 459-–466.

Получено: 26.07.2023
Принято в печать: 21.03.2024