

## Вспоминая Беллу Абрамовну

Д. Б. Фукс

Летом 1980-го года я принимал дома двух гостей, с которыми не был до того знаком. Валера Сендеров и Боря Каневский, тогда еще оба на свободе, пришли ко мне договориться о моем участии в предприятии, которое весьма успешно существовало уже два года: параллельные лекции по программе мехмата для молодых людей, несправедливо отвергнутых университетской приемной комиссией. Названия «Народный Университет», «Еврейский Народный Университет» появились позже<sup>1)</sup>, хотя что правда, то правда: большинство жертв экзаменационной и приемной комиссий МГУ согрешили именно в пятом пункте. (Собственно, студенты набора 80-го года, которым я преподавал, были жертвами только косвенно: это был год Олимпиады, и льготные июльские экзамены в Университет и прочие Физтехи и МИФИ были отменены, в результате чего потенциальные жертвы были лишены возможности поступления в запасные институты после провала на мехмате; и они, обходя Университет, шли поступать в Нефтяной институт («Керосинку») или МИИТ (куда «брали») — никто не хотел рисковать отправкой в Афганистан.)

«Профессорский» состав был быстро укомплектован. Команда подобралась стоящая: Алёша Сосинский преподавал алгебру (его сменил впоследствии Боря Фейгин), Андрей Зелевинский вел уроки анализа, а мне досталась аналитическая геометрия и линейная алгебра. Помню первую лекцию Андрея: он написал на доске формулу

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

и сказал, что в этой формуле сосредоточена вся математическая премудрость: интеграл, дифференциал, радикал,  $e$ ,  $\pi$  и бесконечность. Вообще Андрей, не имея опыта ни преподавания анализа, ни занятия оным, прочел блестящий курс; запомнились асимптотические ряды с секторами сходимости, о которых я прежде не имел никакого понятия. Мой курс был более стандартным, хотя функторы я ввел, помню, на третьем или четвертом занятии (я пытался объяснить то, чего не понимаю до сих пор, хотя это и написано во всех учебниках: изоморфизм между конечномерным векторным пространством и его сопряженным зависит

<sup>1)</sup> «Официальное» название существовало: «Курсы повышения квалификации преподавателей ВМШ», но, конечно, не использовалось участниками. — *Ред.*

от базиса, а изоморфизм с вторым сопряженным ни от чего не зависит). Всеми этому предшествовало организационное собрание на квартире у Беллы Субботовской.

О Белле особо. Мы учились с ней на мехмате в одной группе, знали друг друга с 1955 года. Особенно не дружили: дружить с Беллой было нелегко. Нервная, шумная, необыкновенно требовательная ко всем, она не вписывалась ни в какие компании. Наш курс был очень сильным (Серёжа Новиков, Витя Паламонов, Галя Тюрина, Саша Олевский, Володя Зорич, Саша Виноградов — все с нашего курса), мы выпендривались друг перед другом и не подозревали, что угловатая, суетливая Белла была среди лучших математиков курса. Вспоминаются всякие смешные истории. Лето 1957 года. В товарных вагонах несколько сотен университетских студентов отправляются работать на целину. Проводы, все возмущены, и вдруг — кто это?! — так это же Белла, верите или нет, остриженная наголо. С ней мама, Ребекка Евсеевна (отец Беллы погиб на войне). Ну, многих провожали мамы, и меня тоже, но Ребекка Евсеевна не провожала Беллу, она ехала с нами на целину! На каком-то полустанке к нашему вагону подошел сумрачный комсомольский работник: «А почему мама едет?» На это Ребекка Евсеевна достает из сумочки комсомольскую путевку, всё прописано: едет на целину по зову сердца. Работник отвязался. На целине мы оказались в разных местах, я только раз встретился с Беллой и получил от нее выговор за устроенную нами забастовку. Ребята же, которые были с матерью и дочерью Субботовскими в одной бригаде, с упоением рассказывали о приготовленных Ребеккой Евсеевной обедах.

Мы кончили Университет, и наши с Беллой пути разошлись. Позже я узнал, что она была аспиранткой у Лупанова, вышла замуж, родила дочку, опубликовала (под фамилией Мучник) несколько выдающихся работ, защитила диссертацию. Потом — какой-то слом, я не знаю подробностей. Развод с обратной сменой фамилии, болезнь, возвращение к жизни в качестве учителя начальных классов в обыкновенной московской школе. Единственное, что осталось от прежней жизни — это камерный оркестр МГУ, в котором Белла играла на альте до последних дней жизни. В нашем университете Белла никогда не преподавала, ее функции были чисто организационные, таков был ее выбор.

Мы занимались с нашими студентами самоотверженно, писали конспекты своих лекций (их где-то размножали на ксероксе<sup>2)</sup>), устраивали консультации на дому. Ребятам было трудно: черчение, технические дисциплины, всякие сопроматы днем — и математическая заумь вечером. Из наших учеников (а их число порой зашкаливало за 70)<sup>3)</sup> единицы стали математиками: Витя Гинзбург, Алёша Канель, Федя Маликов, Саша Одесский, Андрей Резников, Боря и Миша Шапиро, — кто еще? Но пользу занятия принесли многим, я уверен. Мы меняли место встреч, собирались в школе у Беллы, в Нефтяном институте («Керосинке»), в гуманитарном корпусе и потом на химфаке МГУ. В большинстве случаев

<sup>2)</sup> Копирование, совершенно невозможное по тем временам, удалось организовать Б. И. Каневскому. — *Ред.*

<sup>3)</sup> А на первое занятие пришло 120 студентов! — *Ред.*

наш «семинар» был более или менее легализован (на химфаке я сам ходил за разрешением к замдекана, а в «Керосинке», не могу поручиться, но слышал, кто-то из студентов получил нагоняй от комсомольского бюро за то, что пропускал наши лекции). Белла собирала пятерки и приносила горы бутербродов (потом эти пятерки ей пытались поставить в вину бдящие органы). Да, на одно из первых занятий пришли Боря с Валерой, допросили ребят, кто из них и их одноклассников куда поступал и поступил (они собирали данные для неопровержимого доказательства того, что все и так знали, но многие делали вид, что не знают: антиеврейской дискриминации при приеме в МГУ). Прошел год, и мы перешли на второй курс, а Боря с Валерой взялись тянуть следующий набор. (Валера — преподаватель высочайшего класса, между прочим.) Я переключился на дифференциальную геометрию, Боря Фейгин рассказывал что-то об алгебрах Ли и *D*-модулях, у нас работал семинар. В марте 1982 года в Москву приехали, как теперь говорят, с частным визитом, Джек Милнор, Андре Хефлигер, Боб Макферсон и Дуза Макдуф. Милнор, великий математик и великий лектор, прочел лекцию специально для наших студентов, Алёша Сосинский переводил. Много пришло народа и «нашего», и не нашего, мы были рады всем.

Закончился учебный год — и тут грянул настоящий гром. Постараюсь восстановить последовательность драматических событий.

В июне 1982 года в Лабораторный корпус МГУ, где я работал, зашел Серёжа Львовский (мне тогда не знакомый). Вывел меня на улицу. Новость: арестованы Сендеров и Каневский (и еще студент из их параллели)<sup>4</sup>). Объясняет причину ареста: в апреле распространяли листовки с агитацией против субботников (вообразите себе — субботников!). Оставшиеся листовки не выбросили, а оставили для будущего года (о, Боже!). Их и накрыли при обыске (доносчиков хватало всегда), заодно забрали список их класса в «Народном Университете». Информации о нас, как будто бы, нет, хотя, кто знает...

Встретились с Андреем, условились, что говорить, если вызовут на допрос (не вызвали). Созвонились с Беллой. Решили осенью занятия не возобновлять (мы мечтали о третьем курсе)<sup>5</sup>). Шли тревожные месяцы. И вот, уже в августе (Брежнев у оставалось несколько месяцев жизни), Беллу вызвали в КГБ. После посещения ею КГБ мы встретились (это была наша последняя встреча, мы потом еще раз говорили по телефону). Привожу ее рассказ, как помню.

Утром того дня у нее в квартире звонит телефон, мужской голос: «Белла Абрамовна, я — такой-то (неразборчиво), хочу с Вами встретиться.» Белла его за кого-то другого приняла, ей кто-то должен был позвонить. Я, говорит, очень занята сегодня, буду ездить по разным местам, давайте в метро встретимся, станция «Коломенская», первый вагон к центру. В назначенный час Белла — там. Смотрит — никого. То есть, стоит какой-то широкоплечий человек с бычьей шеей — «явно герой не моего романа», сказала мне Белла. Проходит поезд, другой, Белла ждет, и вдруг — этот человек подходит к ней: «Белла Абрамовна?» Белла — с улыбкой — «так это Вы меня ждете? Мне сей час нужно на

<sup>4</sup>) Сендеров и Гельцер были арестованы 17 июня, Каневский — 21-го. — Ред.

<sup>5</sup>) Занятия, хотя и в другой форме, просуществовали до весны 1983-го. — Ред.

Кузнецкий Мост, поехали вместе.» «Нет, — отвечает, — мы поедem по другому адресу.» И берет Беллу под руку. Поднимаются вверх, там ждет машина. Едут — не на Лубянку, куда-то еще, мне Белла называла адрес, да я не помню. Проводят в кабинет к какому-то молодому человеку в погонах — старший лейтенант или капитан. В Москве, говорит, орудует банда «репетиторов», которые грабят людей под видом подготовки к экзаменам. И бац — сендеровский список на стол. Белла, конечно же, начала с ним кокетничать (неистребимая женская суть!). Ну что Вы, говорит, эти люди уже студенты, мы с ними занимаемся математикой бесплатно (а пятерки? — и бац — еще список, кто пятерки сдал, тоже в сендеровском классе — ну, пятерки для перекуса). Вот и Вы приходите — ведь Вам, наверное, нравится математика. Было ясно, что гэбэшник ей понравился. Поговорили о том, о сем; о математике. Ну, до свидания, вот Вам пропуск (на выход, без него не выпустят), а вот — протокол, подпишите. Белла читает протокол — нет, я этого не говорила, не подпишу. Тот начинает упрашивать, это же формальность, с него спросят; нет, заартачилась (всегда была упрямая). Ну хорошо, не подписывайте, но подумайте еще, и если передумаете, приходите к нам опять, дал имя, телефон внутренний — всё.

Рассказывает мне всё это Белла и вдруг говорит: я решила опять к нему пойти, он же звал. Я: «ни в коем случае не ходи!» Ну, говорит, я с ним еще побеседую, он, вроде бы, всё понимает, это может ребятам (арестованным) на пользу пойти. Попробуй ее отговори!

На другой день — последний звонок от Беллы. Ну что, ходила? Да, но он меня не принял. Сухо так сказал: больше ничего от Вас не надо.

Еще через пару дней<sup>6)</sup> Белла погибла под колесами грузовика в тихом, безлюдном переулке, где и велосипед-то не каждый час проедет. Рассказ очевидца: грузовик вихрем пронесся по переулку, сшиб Беллу, которая была на тротуаре или рядом с тротуаром, и исчез из вида. Беллу доставили прямо в морг. В гробу ее трудно было узнать: изуродованную голову кое-как закрепили в морге пластилином. На похоронах была масса народа, но разговоры об обстоятельствах ее гибели пресекались: не время. Я не знаю, пришло ли время, нашли ли грузовик и его водителя, восстановили ли цепочку событий с той, гэбэшной стороны. «Народный Университет» перестал существовать, а с перестройкой, массовым отъездом и снятием еврейских ограничений при приеме в МГУ перестала существовать и сама проблема. Здесь кончается и мой рассказ.

---

<sup>6)</sup> Ночью 23 сентября 1982 года в возрасте 44 лет. — *Ред.*

## А. М. Виноградов

С Беллой Абрамовной Субботовской мы были «согруппниками» на 1 и 2-м курсах мехмата. Поэтому и знакомы. Много позже наши дети оказались «соклассниками» в матклассе Б. П. Гейдмана в 19-й школе и мы в связи с этим иногда встречались. Однажды Белла Абрамовна с характерной для нее настойчивостью пригласила меня в гости, обещая «очень интересный сюрприз». Когда я пришел, то обнаружил у нее полную квартиру отверженных приемными комиссиями еврейских детей, Сендерова и второкурсника физтеха Книжника. Что делать в такой напасти? Поначалу решили устроить для них матлекторий, что я и сделал на следующей встрече, рассказав по просьбе Сендерова теорему о сжатых отображениях. Не успев, однако, их как следует дожать до конца, я понял, что всё это полный абсурд, тем более, что ясного плана действий ни у кого не было. По некоторому размышлению, я предложил организовать систематический курс математики мехматского уровня для этой группы. Я поговорил с Алексеем Брониславовичем Сосинским, моими учениками Валентином Васильевичем Лычагиным, Иосифом Семеновичем Красильщиком, Алексеем Васильевичем Самохиным и моими тогдашними аспирантами Сергеем Васильевичем Дужиным и Алексеем Вадимовичем Бочаровым. И мы решили попробовать. Независимо от нас физику взялся вести Михаил Самуилович Маринов.

Надо признаться, что в этом деле у меня помимо гуманистического был и чисто «шкурный» интерес, разделяемый и остальными вышеуказанными лицами. Он состоял в том, чтобы прочитать для продвинутой аудитории концептуально элегантный, «единый» курс основ математики, т. е. то, что вряд ли было возможно сделать на мехмате в обозримом будущем. При этом я поставил одно условие: за этим не должно было быть никакой политики. Я считал тогда и тем более считаю теперь, что не мог подвергать риску тех, кого вовлек в это предприятие.

Сие было обещано, и мы начали. В порядке автоиронии я предложил называть содеянное «Народным Университетом Культуры». Так в то время назывались особые учебные заведения, основной целью которых была выдача дипломов о высшем образовании комсомольским и партийным выдвиженцам и другим публичным фигурам той эпохи. И сейчас среди известных политиков можно найти владельцев такого диплома. Это название прижилось, но в сокращенной форме: из него исчезло всякое упоминание о культуре.

Если я правильно помню, то, кроме меня, курсы читали А. Б. Сосинский, И. С. Красильщик и В. В. Лычагин, а остальные вели упражнения. Занятия поначалу происходили на квартире у Беллы Абрамовны, а позже удалось перебраться в Нефтяной институт, который все звали «Керосинкой». Подготовка и чтение лекций отнимало у всех нас порядочно времени, поскольку мы всё делали по новой собственной программе. Нас, однако, хорошо поддерживал горячий чай с бутербродами из «Отдельной» колбасы и чувство, что мы не сидим сложа руки перед лицом творящегося безобразия. И то, и другое было совершенно бесплатно. По-видимому, программы и краткие записки тех наших лекций теперь потерялись окончательно.

Я сейчас точно не помню, но всё это продолжалось тихо и мирно год или полтора. Белла Абрамовна запомнилась своей невероятной активностью и вездесущностью, взяв на себя устройство всех организационных проблем. Как мне кажется, и студенты, и преподаватели получали удовольствие друг от друга. К сожалению, ситуацию вокруг Народного Университета не удалось удержать в рамках разумной внешней аполитичности. Например, когда один из «вражеских голосов» упомянул о «Народном Университете», ко мне стали обращаться обеспокоенные родители наших студентов. Я старался их успокоить, полностью полагаясь на данное мне слово, но, тем не менее, некоторые студенты нас покинули. Впоследствии политические страсти вокруг Народного Университета накалились еще более и наш пакт о нейтралитете рассыпался сам собой. При таких обстоятельствах я считал слишком рискованным как для себя, так и для моих учеников и друзей, которых привлек, дальнейшее в нём участие и почти вся первая профессорско-преподавательская бригада «Народного Университета», «уволилась по собственному желанию». Лишь более отважные Сосинский и Маринов решили остаться.

Мы не рассматривали участие в «Народном Университете», как средство заработать политический капитал и образ борцов с советской властью. Наша цель была совершенно в ином — дать достойное образование достойным того молодым людям, и у меня нет никаких оснований сомневаться в том, что эта же цель была и у Беллы Абрамовны Субботовской.

## А. В. ЗЕЛЕВИНСКИЙ

С Беллой Абрамовной Субботовской меня познакомил Дмитрий Борисович Фукс. Произошло это, по-видимому, летом или ранней осенью 1980-го года. Она предложила мне участвовать в работе созданного ею «Народного Университета», и я помню, что согласился, долго не раздумывая. Рискованность этого предприятия была очевидна (даже мне, при моей тогдашней молодости и легкомыслии), так что столь быстрое согласие было не совсем тривиальным. Причин было две: ощущение «правильности» всей затеи, и чувство абсолютного доверия, которое сразу же вызвала у меня Белла Абрамовна, и которое никогда не покидало меня в течение нашего (к сожалению, недолгого) знакомства и общения.

Несколько слов о подоплеке. В те годы, обстановка глубокого маразма, царившего в советском обществе, была настолько очевидна людям моего круга общения, что и в обсуждениях не нуждалась. Самые людоедские времена советского режима остались позади, официальную идеологию мало кто принимал всерьез, но открытое инакомыслие по-прежнему каралось. Официальный антисемитизм процветал и накладывался на насаждавшиеся на всех уровнях подозрительность и недоверие к интеллигенции и культуре. Поскольку большинство населения сформировалось уже при советской власти, режим казался незыблемым и вечным, а активные диссиденты — донкихотствующими идеалистами (как показало дальнейшее развитие событий, на самом деле, они оказались прозорливее меня и моих друзей).

Однако ближе к делу. В начале восьмидесятых годов малейшего подозрения на еврейское происхождение было достаточно, чтобы человек практически лишился шансов на поступление на мехмат. А заодно, для пушего абсурда, многим сильным выпускникам ведущих математических школ, зачастую даже отличившимся на математических олимпиадах разных уровней, также ставились палки в колёса, независимо от национальности. При этом, хотя в результате основанной на тех же принципах кадровой политики, уровень преподавателей мехмата к тому времени сильно снизился, от прежних времен там всё еще оставалось достаточно много математиков и педагогов высокого класса. Одним из самых важных достоинств мехмата оставалась традиционная система фундаментального математического образования на младших курсах. Не получив доступа к этой системе, для многих из самых способных и всерьез увлеченных математикой ребят дорога к профессии математика была если не полностью перекрыта, то, по крайней мере, сильно усложнена.

Идея Беллы Абрамовны и ее единомышленников была благородна и проста: попытаться хотя бы частично восстановить справедливость, предоставив ребятам, серьезно интересующимся математикой, возможность получить то фундаментальное математическое образование, в котором им было отказано. У меня эта идея не могла не вызвать отклика, не только из очевидных моральных соображений, но и потому, что, будучи евреем и выпускником известной в те годы своим вольнодумством московской математической школы №2, мне было легко отождествить себя с моими будущими студентами (хотя мне повезло, и на моем пути к математике было намного меньше препятствий).

Из организаторов Народного Университета (общепринятого имени, мне кажется, у него не было; из других бытовавших имен, помню Открытый Университет и Еврейский Университет), кроме Беллы Абрамовны, я встречал еще Бориса Каневского и Валерия Сендерова. У меня не вызывало сомнений, что все они, помимо организации наших занятий, занимались и другими «крамольными» вещами. По неписаному соглашению, я никогда не разговаривал с ними на эти темы, полагая (по всей видимости, наивно), что это может послужить защитой в случае интереса к моей особе со стороны КГБ (Комитета Государственной Безопасности; поясню для тех счастливых, которым этот злоеущий акроним уже ничего не говорит): мол, знать ничего не знаю, попросили прочесть пару лекций по математике интересующимся молодым людям, а зачем и почему, понятия не имею. Подозреваю, что подобную «страусиную» позицию разделяли и многие мои коллеги по преподаванию в Народном Университете. Соглашение это соблюдалось с большим тактом со стороны Беллы Абрамовны и Бориса Каневского, с которыми я в основном имел дело (Сендеров, насколько я помню, появлялся на наших занятиях нечасто и особого участия в их организации не принимал; может быть, это относилось только к нашему потоку). Единственным исключением, которое я сейчас могу припомнить, был вечер барда-диссидента Петра Старчика на квартире Беллы Абрамовны, на который она пригласила мою жену и меня вместе с некоторыми студентами и преподавателями Народного Университета. Вечер, кстати, был замечательный; с биографией и творчеством Старчика можно ознакомиться, например, на страничке <http://www.bard.ru/>.

Несколько слов об организации занятий в те два года (1980–81 и 1981–82), когда я преподавал в Народном Университете. Занятия проходили раз в неделю по субботам, в разных местах: чаще всего, в Губкинском нефтяном институте (знаменитой «керосинке»), где обучалось немало наших студентов. Борис Каневский, помимо проведения семинаров по моему курсу анализа, ксерокопировал и раздавал студентам мои конспекты лекций и листочки с задачами (сейчас почти невозможно представить себе, насколько серьезным преступлением советская власть считала несанкционированное использование копировальных устройств; в соответствии с упомянутым выше соглашением, я никогда не спрашивал его, как он получил доступ к копировальной машине, и какие еще печатные материалы он на ней изготовлял). Вся остальная практическая организация работы лежала на плечах Беллы Абрамовны, которая в моих глазах всегда была душой всего предприятия. Она составляла список студентов, вела учет посещаемости, договаривалась о местах занятий, оповещала всех о возможных изменениях в расписании, следила за тем, чтобы занятия начинались и заканчивались вовремя, приносила всё необходимое для занятий (например, мел), и даже делала очень вкусные бутерброды, которые мы все вместе поедали на переменах. Всю эту немалую работу она делала с улыбкой и без видимых усилий; вообще, мне всегда казалось, что одно ее присутствие на занятиях и переменах создавало удивительно приятную, теплую и домашнюю обстановку. Преподаватели были ею освобождены от всех практических забот; при этом, само собой разумелось, что денег за работу никто никаких не получал (точно не знаю, может быть, со студентов собирались небольшие взносы на ксерокопии и тому подобные расходы).

За мои два года работы в Народном Университете, я прочел курс лекций по математическому анализу с элементами функционального анализа. Одновременно геометрию вел Фукс, а алгебру — сначала Алексей Брониславович Сосинский, а затем — мой старый друг и однокашник по школе и университету Борис Фейгин.

Над выбором программы моего курса пришлось призадуматься. С одной стороны, общий замысел состоял в том, чтобы изложить основы математического анализа, не вдаваясь особенно в более продвинутые темы. С другой стороны, большинство наших студентов в основное время обучалось на факультетах прикладной математики в добротных технических вузах, и некоторыми сведениями по анализу уже обладало, особенно на «технологическом» уровне. Поэтому строить курс на основе стандартного мехматского курса для первокурсников мне не хотелось: я боялся, что студенты быстро утратят интерес, решив, что я не сообщаю им ничего нового. Мой выход из этой дилеммы состоял в том, чтобы попытаться подать традиционные идеи в новой упаковке. В качестве такой упаковки, я использовал идеи из нескольких, в основном, французских источников: «Основы современного анализа» Ж. Дьедонне, «Дифференциальное исчисление и дифференциальные формы» А. Картана, и даже «Функции действительного переменного» Н. Бурбаки (да простит меня В. И. Арнольд). При таком подходе, элементы топологии и функционального анализа появляются довольно рано, что дает возможность изложить основы дифференциального и интегрального исчисления, работая с функциями со значениями в банаховых пространствах. Тем самым, даже знакомые стандартные факты получают неожиданное освещение, что дает студентам возможность лучше оценить и прочувствовать логику доказательств. Не мне судить об успехе этой попытки. Во всяком случае, мне казалось, что студенты воспринимали мой курс с интересом и пониманием.

Я горжусь тем, что ряд слушателей моего курса преодолели все препятствия и стали успешными математиками-профессионалами: Алексей Белов-Канель, Аркадий Беренштейн, Виктор Гинзбург (тот, что в Санта Круз), Фёдор Маликов, Андрей Резников, Михаил Шапиро. . . (прошу прощения, если кого-то не упомянул). Надеюсь, что в их успехах есть и мой небольшой вклад; но несравненно бóльшим они обязаны Белле Абрамовне.

Занятия Народного Университета продолжались бесперебойно в течение нескольких лет, пока не наступила безжалостная расправа. Несколько человек, связанных с Народным Университетом, включая Каневского и Сендерова, были арестованы в июне 1982 года. А 23 сентября того же года трагически погибла Белла Абрамовна. Насколько мне известно, обстоятельства ее гибели (убийства?) не выяснены до сих пор. Могу только сказать, что с кем бы я это ни обсуждал, никто из моих друзей и коллег никогда не подвергал ни малейшему сомнению, что ее убийство было организовано КГБ. Зачем? Если власти хотели как можно быстрее и без лишнего шума прикрыть Народный Университет, то избавиться от Беллы Абрамовны, выдав ее смерть за несчастный случай, было простейшим средством этого добиться. Как я уже говорил, на ней всё держалось.

К сожалению, я почти ничего о ней не знал (и мало что узнал в течение нашего недолгого знакомства), кроме того, что она кончала мехмат и была

однокурсницей Фукса. Ее теплота, сердечность и оптимизм сразу же располагали к ней и заставляли чувствовать себя с ней легко и просто. К студентам Народного Университета она относилась по-матерински и, насколько я могу судить, вызывала столь же теплое ответное отношение. Организация Народного Университета потребовала от нее большого мужества и решимости, а поддержание его на плаву требовало постоянных серьезных усилий; однако в ее поведении не было ни следа важности, позы или рисовки. На фоне всеобщей халтуры, воцарившейся в те годы в советском обществе, сам факт четкой и бесперебойной работы Народного Университета, обеспеченной усилиями Беллы Абрамовны, давал студентам (да и преподавателям тоже) важный урок профессионализма и ответственности.

Я благодарен судьбе за знакомство и сотрудничество с этой замечательной женщиной. Для меня она навсегда останется нравственным компасом, а моя работа в Народном Университете — предметом гордости и славных воспоминаний.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ (1 КУРС, 1 СЕМЕСТР, 1980–1981 уч. г.)

1. Язык теории множеств. Множества, функции, отношения.
2. Мощность множеств. Теоремы Кантора – Бернштейна и Кантора. Счетные и несчетные множества.
3. Вещественные числа. Аксиомы и следствия из них. Принцип Архимеда. Теорема о вложенных отрезках.
4. Комплексные числа. Теорема единственности. Геометрическая реализация.
5. Метрические пространства. Примеры и основные конструкции. Расширенная вещественная прямая.
6. Основные понятия теории метрических пространств. Шары, сферы, диаметр, ограниченность. Открытые и замкнутые множества, окрестности, замыкание и внутренность. Точки прикосновения и предельные точки.
7. Непрерывные отображения. Различные определения. Теорема о композиции. Равномерная непрерывность. Гомеоморфизм. Эквивалентные расстояния.
8. Предел отображения по подпространству. Предел последовательности. Предельные точки последовательности.
9. Последовательности Коши. Полные пространства. Геометрическое определение полноты. Примеры.
10. Полнота пространства ограниченных функций. Теорема о пополнении.
11. Предкомпактные пространства. Геометрическое определение. Основные свойства.
12. Компактные пространства. Основные свойства. Эквивалентность трех определений.
13. Последовательность точек на компакте сходится тогда и только тогда, когда она имеет единственную предельную точку. Верхний и нижний пределы числовой последовательности. Их свойства. Критерий сходимости числовой последовательности (совпадение верхнего и нижнего пределов).

14. Теорема о непрерывном образе компакта. Следствия. Теорема Вейерштрасса. Применения: неравенство Коши; основная теорема алгебры.
15. Непрерывность алгебраических операций.
16. Связные пространства. Связные подпространства  $\mathbb{R}$ . Теорема о непрерывном образе связного пространства. Теорема Больцано. Следствия.
17. Критерий связности. Линейно связные пространства. Связность произведения двух связных пространств. Негомеоморфность отрезка и квадрата. Связные компоненты. Открытые подмножества  $\mathbb{R}$ .
18. Монотонные функции. Основные свойства. Корень  $n$ -й степени.
19. Логарифмическая, степенная и показательная функции. Основные свойства.
20. Число  $e$ . Производная логарифма. Иррациональность  $e$ .

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ  
(1 КУРС, 2 СЕМЕСТР, 1980–1981 уч. г.)

- I. Нормированные и банаховы пространства
  1. Определение нормированных и банаховых пространств. Примеры конечномерных нормированных пространств. Неравенства Минковского, Гёльдера, Юнга.
  2. Примеры бесконечномерных банаховых пространств: пространства последовательностей  $(\ell_p, \ell_\infty, c_0)$ , ограниченных функций, ограниченных непрерывных отображений (доказательство его банаховости).
  3. Критерий непрерывности линейного оператора. Пространство непрерывных линейных операторов. Сопряженное пространство.
  4. Изоморфизм нормированных пространств. Описание конечномерных нормированных пространств. Теорема Ф. Рисса: шар в бесконечномерном нормированном пространстве некомпактен.
  5. Прямая сумма нормированных пространств. Теорема Банаха об обратном отображении (без доказательства). Пространство непрерывных полилинейных отображений.
- II. Ряды
  6. Ряды в нормированном пространстве. Критерий Коши. Коммутативная сходимость. Абсолютная сходимость. Критерий абсолютной сходимости. Абсолютно суммируемые семейства. Свойства коммутативности и ассоциативности. Теорема об умножении абсолютно сходящихся рядов.
  7. Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами: признак сравнения, эталонные ряды  $\sum 1/n^\alpha$ . Признаки Коши и Д'Аламбера, их сравнение, вычисление  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}/n$ .
  8. Степенные ряды. Радиус сходимости, формула Коши – Адамара. Нормальная сходимость функционального ряда. Аналитические функции в круге, их непрерывность.
  9. Комплексная экспонента, ее простейшие свойства. Синус и косинус, формула Эйлера.
  10. Условно сходящиеся ряды. Суммирование по частям. Признаки сходимости Дирихле и Лейбница. Теорема Абеля. Следствия из нее.

## III. Дифференциальное исчисление

11. Дифференциальное исчисление для вектор-функций числового аргумента (вещественного или комплексного). Правая и левая производная. Формальные правила дифференцирования: линейность, производная произведения, производная сложной и обратной функции.
12. Теорема о конечных приращениях для всюду дифференцируемых вещественнозначных функций. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши и их следствия. Правило Лопиталя. Применения дифференциального исчисления к доказательству неравенств: неравенство о взвешенном среднем.
13. Теорема о конечных приращениях для вектор-функций. Следствия. Случай функции комплексного аргумента.
14. Теорема о дифференцируемости предела последовательности. Производная аналитической функции.
15. Сюръективность комплексной экспоненты. Число  $\pi$ . Корни  $n$ -й степени из комплексных чисел.

## IV. Примитивные и интегралы

16. Свойство «непрерывности» производной. Определение примитивной. Теорема о примитивной пределе последовательности и ее следствия.
17. Ступенчатые и правильные функции. Характеризация правильных функций. Следствия: операции над правильными функциями, свойства их примитивных.
18. Определение интеграла от правильной функции на отрезке в  $\mathbb{R}$ . Связь с интегралом Римана. Теорема Ньютона–Лейбница. Свойства интегралов: линейность, интегрирование по частям, замена переменной, теорема о среднем.
19. Длина кривой. Натуральный параметр. Натуральный параметр на окружности.
20. Примитивная аналитической функции. Элементарные функции и табличные интегралы. Интегрирование функций  $e^{ax} \cdot (\sin bx)^p \cdot (\cos cx)^q$ . Вычисление  $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ . Формула Валлиса.
21. Разложение рациональных функций на простейшие дроби. Комплексный логарифм. Интегрирование рациональных функций.

## V. Высшие производные

22. Высшие производные. Линейность, формула Лейбница, формула интегрирования по частям  $n$ -го порядка. Приложения: примитивная функции  $e^{ax} \cdot x^n$ , многочлены Лежандра.
23. Выпуклые функции: определение и простейшие свойства. Критерий выпуклости. Геометрический смысл второй производной. Выпуклость  $e^x$  и еще одно доказательство неравенства о взвешенных средних.
24. Формула Тейлора: локальная форма, интегральная форма остаточного члена, оценки остаточного члена. Формула Тейлора для функций комплексного аргумента. Ряд Тейлора. Единственность разложения функции в степенной ряд.
25. Разложение функций  $e^z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$  в ряд Тейлора с оценкой остаточного члена. Биномиальная формула. Разложения  $\ln(1+x)$ ,  $\arctg x$  и  $\arcsin x$ .

## VI. Эйлеровы разложения

26. Эйлерово разложение  $\operatorname{ctg} z$ . Применение к вычислению сумм  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ .
27. Бесконечные произведения. Критерий коммутативной сходимости. Критерии сходимости произведения  $\prod_{n=1}^{\infty} R(n)$ , где  $R(x)$  — рациональная функция.
28. Эйлерово разложение  $\sin z$ . Еще одно доказательство формулы Валлиса.
29. Г-функция: формула Эйлера. Исследование  $\Gamma(x)$  при  $x > 0$ : производные  $\ln \Gamma(x)$ . Константа Эйлера. Вычисление

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{a_1}{n}\right)\left(1 + \frac{a_2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{a_k}{n}\right)}{\left(1 + \frac{b_1}{n}\right)\left(1 + \frac{b_2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{b_k}{n}\right)}.$$

Формула дополнения.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ  
(2 КУРС, 1 СЕМЕСТР, 1981–1982 УЧ. Г.)

- I. Несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметра.
1. Определения и простейшие свойства несобственных интегралов (замена переменной, интегрирование по частям).
  2. Признаки сходимости несобственных интегралов (абсолютная сходимость, принцип сравнения, эталонные функции).
  3. Непрерывность, дифференцирование и интегрирование собственных интегралов, зависящих от параметра.
  4. Равномерная и нормальная сходимость несобственных интегралов по параметру. Непрерывность, дифференцирование и интегрирование несобственных интегралов, зависящих от параметра.
  5. Вычисление интеграла Дирихле  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ .
  6. Эйлеров интеграл для Г-функции. Интеграл Гаусса.
  7. Бета-функция Эйлера. Различные интегральные представления, выражение через Г-функцию.
- II. Локальное исследование функций. Асимптотические разложения.
8. Локальные свойства функций. Слабые отношения сравнения.
  9. Сильные отношения сравнения.
  10. Отношения сравнения между положительными функциями. Порядок функции относительно положительной функции.  $O$ - и  $o$ -символика.
  11. Шкалы сравнения, главные части и асимптотические разложения. Определения, примеры и простейшие свойства.
  12. Сумма, произведение и композиция асимптотических разложений.
  13. Интегрирование сильных и слабых отношений сравнения.
  14. Дифференцирование отношений сравнения.
  15. Главная часть в асимптотическом разложении примитивной. Примеры.

16. Отношения сравнения для рядов с положительными членами.
  17. Числа Бернулли. Формула суммирования Эйлера – Маклорена.
  18. Свойства чисел и многочленов Бернулли.
  19. Оценка остатка в формуле Эйлера – Маклорена. Асимптотика частичной суммы гармонического ряда.
  20. Формула Стирлинга.
- III. Дифференциальное исчисление функций векторного аргумента
21. Дифференцируемость и производная для отображений банаховых пространств. Определение, простейшие свойства, примеры, производная сложной функции.
  22. Функции со значениями в произведении банаховых пространств. Частные производные, матрица Якоби.
  23. Сравнение вещественной и комплексной дифференцируемости. Условия Коши – Римана.
  24. Теорема о конечных приращениях. Дифференцируемость предела последовательности. Непрерывная дифференцируемость функции, имеющей непрерывные частные производные.
  25. Дифференцирование по параметру интеграла с переменными пределами.
  26. Теорема об обратной функции. Принцип сжимающих отображений.
  27. Теорема о неявной функции. Конечномерный случай, теорема о ранге.
  28. Вторая производная. Свойство симметричности, координатное описание.
  29. Высшие производные. Свойства и примеры.
  30. Формула Тейлора.