Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. Н. Земляков, Элективный курс «Математический анализ реальности». Дифференциальные уравнения как математические модели реальных процессов Методический и методологический комментарий. Часть 3,
Матем. обр., 2004, выпуск 3, 17–72

https://www.mathnet.ru/mo383

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.170
14 декабря 2025 г., 08:34:53

Элективный курс «Математический анализ реальности». Дифференциальные уравнения как математические модели реальных процессов. Методический и методологический комментарий

А. Н. Земляков

Начинаем печатать главы из учебно-методического пособия А. Н. Землякова «Элективный курс «Математический анализ реальности». Дифференциальные уравнения как математические модели реальных процессов», предназначенного для классов с углубленным изучением математики. В настоящем номере мы публикуем методический и методологический комментарий, часть 3, а также главу 2.

Раздел 3. КОММЕНТАРИИ К КУРСУ

Часть I. НЕПРЕРЫВНЫЕ ПРОЦЕССЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Тема 1. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ МОДЕЛИ (глава 1; 4[6] ч)

Общие замечания и рекомендации по теме 1

Это вводная тема, главная цель изучения которой — показать, что такое эволюционирующие системы и математические модели их эволюции. Эволюция понимается в широком смысле — так, что обычное механическое движение считается частным случаем эволюции. Более того, системы, описываемые одним числовым параметром $x = x(t)$, можно наглядно представлять себе как движение воображаемой точки $M_t = M(x(t))$ по конфигурационной оси Ox.

Главное *новое* содержание темы: запись законов эволюции как *дифференциальных уравнений* — считается, что в тех или иных предположениях мы можем получить информацию о *скорости* изменения параметров системы. Скорость — это производная, так и получается, что для систем с *одной степенью свободы*, т. е. описываемой одним параметром, закон эволюции принимает вид $x'(t) = V$, где чаще всего $V = V(x)$ ("*от времени законы природы не зависят*". Дифференциальное уравнение и является *математической моделью* рассматриваемой системы, и

школьникам нужно сразу объяснить обычный ход исследований: сначала "создание" (формулирование, запись) модели, более-менее (т. е. при абстрагировании от некоторых черт рассматриваемой ситуации) адекватно отражающей изучаемый процесс или явление. Потом *математический анализ* этой модели, т. е. исследование получающегося дифференциального уравнения. В идеале — отыскание *всех* его решений и исследование их свойств или, как говорят, поведения. Если явное отыскание решений проваливается, то следует попытка описания свойств (неизвестных) решений, исходя непосредственно из дифференциального уравнения (как это делается, хорошо видно на примере заданий к главе 3, в которых сначала устанавливаются *априорные* свойства решений линейного дифференциального уравнения $y' = ky$, исходя только из этого уравнения, а уже потом, в данном случае, отыскание явного вида решений — экспонент).

В § 1.1 рассматривается только один пример с полным исследованием — *свободное движение* материальной точки вдоль прямой, описываемое уравнением Ньютона $x'' = 0$ или соответствующей *цепочкой* (системой) двух эволюционных уравнений $x' = v$, $v' = 0$. На нем показывается, что однозначное задание решений дифференциальных уравнений обеспечивается заданием *начальных условий* (в данном случае двух — начальных координаты и скорости). На это важное обстоятельство и существенное понятие *начальных условий* следует обратить особое внимание.

Естественно, ведя речь о дифференциальных уравнениях, нужно быть уверенным в том, что школьники достаточно хорошо и свободно владеют основным понятием дифференциального исчисления — производной. Поэтому конкретным примерам эволюционных моделей в § 1.1 предшествуют пункты, в которых напоминаются наглядно-кинематический и геометрический смыслы производной. Если школьники хорошо подготовлены, эти пункты можно просто конспективно прокомментировать, а остановиться на понятии *линейного приближения* — главного чисто математического понятия в этой главе. Оно потребуется при обсуждении примеров "псевдоупругой" силы в конце § 1.2.

Приводимые без исследования примеры популяционных моделей (Мальтуса, логистическая или Ферхюльста, квадратичная) должны быть доведены до понимания — в них показывается, как именно получаются дифференциальные уравнения. Если не хватит времени на разбор модели биоценоза из последнего пункта, это не страшно — к ней мы возвращаемся и полностью, на качественном уровне, ее исследуем в конце главы.

В § 1.1 объясняется еще одна важная с точки зрения и математики, и механики (кинематики) конструкция: *производная векторнозначной функции*, описывающей движение материальной точки в плоскости или в пространстве. Вот на эти пункты (1.1.6–7) при необходимости можно выделить дополнительное занятие (пару уроков), тем более, что на данные вопросы приведено *весьма значительное* число упражнений и задач. Для школьников материал только относительно нов — нечто в этом роде объясняется в курсе физики. Нужно дать строго математическое разъяснение и по возможности довести до всеобщего понимания приводимый кинематический вывод формул для производных косинуса и синуса (см. далее комментарии к § 1.1) — они будут нужны в примере гармонического осциллятора из

§ 1.2.

В § 1.2 три фундаментальных "физико-математических" понятия или концепта.

1) Второй закон Ньютона (для одномерных систем) как дифференциальное уравнение, описывающее поведение *динамической системы* (напомним, что в учебном пособии понятие динамической системы трактуется в традиционном смысле, как системы классической механики — или динамики).

2) Фазовая плоскость (для одномерных систем), т. е. плоскость в осях "координата–скорость", Oxv, точки которой полностью описывают состояние движущейся по прямой материальной точки (для описания состояния и будущего движения точки знание одной координаты недостаточно — нужно знать еще и скорость).

3) Закон сохранения энергии (для консервативных одномерных систем), который в данном случае задает геометрически фазовые траектории. Разумеется, рассматривать эти концепты рекомендуется только в тех рамках, которые очерчены в учебном пособии.

§ 1.1. Дифференциальные уравнения и эволюционные модели

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
1.1.0	"Введение в параграф" (предварительные замечания)	!	
1.1.1	Смысл производной: скорость изменения величины	↑↓	
1.1.2	Касательная и геометрический смысл производной	↑	**У**
1.1.3	Понятие линейного приближения	!↓ +	**У**
1.1.4	Движение по прямой	!!	
1.1.5	Одномерные эволюционные модели	!!	
1.1.6	Производные и скорости в механике (кинематике)	!!	***У**
1.1.7	Геометрический (кинематический) смысл вектора скорости	!!↓	*
1.1.8	Двумерная эволюционная модель Вольтерры–Лотки	↓ +	

Обозначения колонок таблицы:

"П.П." = пункт параграфа;

"Спец." = "спецификация" пункта (см. ниже);

"Прим." = примечания.

Смысл значков в "спецификации":

"!!" — очень важный пункт, на который следует обратить особое внимание;

"!" — важный пункт;

"↓" — пункт, который существенно потребуется в дальнейшем;

"↑" — пункт, материал которого должен быть знаком по основному/профильному курсу;

"+" — пункт, который достаточно кратко прокомментировать и оставить для самостоятельной проработки;

"×" — пункт, который стоит целиком оставить для самостоятельной проработки;

"∼" — пункт, который можно "пропустить", оставить для ознакомления по желанию учащихся.

В колонке "Примечания" звездочками помечен "сравнительный уровень сложности", буквой "Д" — дополнительный материал, буквой "У" — материал, который *можно* подкрепить упражнениями, через "У!" — материал, который *желательно* подкрепить упражнениями.

Повторение определения производной из п. 1.1.1 можно сразу же связать с важнейшим в приложениях понятием *линейного приближения* из п. 1.1.3, а потом обратиться и к касательной (этот-то материал должен быть уже хорошо знаком школьникам). В чем важность линейных приближений? — Отнюдь не только в приближенных вычислениях. Именно теорема о линейном приближении, фактически доказанная в п. 1.1.3 (*функция* ***дифференцируема*** *в точке тогда и только тогда, когда она* ***имеет линейное приближение*** *в этой точке* или *в окрестности этой точки*), позволяет многие задачи (и законы!) физики считать *примерно линейными.*

Для более четкого освоения понятия линейного приближения полезно прорешать со школьниками несколько упражнений на эту тематику (мы в таких случаях ссылаемся на раздел "Упражнения к главе" из учебного пособия и в дальнейшем эту ссылку-упоминание будем опускать).

В пункте 1.1.5 особое внимание следует обратить на понятие *конфигурационного пространства* — в данном случае прямой, по которой перемещается точка $x = x(t)$, *изображающая* значение рассматриваемого параметра в момент времени t. Получается, что произвольные эволюционирующие одномерные системы могут быть связаны с кинематическим образом, интерпретируются как движение воображаемой точки.

Введенное американским физиком и математиком *Уиллардом Гиббсом* (1839–1903), понятие конфигурационного пространства помогает более наглядному пониманию эволюции систем, описываемых произвольным числом параметров: вместо того, чтобы следить за одновременным изменением многих параметров, мы следим за воображаемым "движением" одной точки в *многомерном* конфигурационном пространстве (его размерность равна числу рассматриваемых параметров; например, движение пары точек в обычном трехмерном пространстве отвечает движению *одной* точки в шестимерном пространстве). Это весьма удобно и помогает работать в таких случаях и геометрической (многомерной!) интуиции.

Принципиально важны для дальнейшего пп. 1.1.6–7, в которых устанавливается эквивалентность *векторного* и *координатного* подходов к описанию движений материальной точки в плоскости или в пространстве. Хотя мы рекомендуем использовать для лучшего понимания упражнения, эта часть параграфа может быть дана и только в ознакомительном плане: когда данный материал реально потребуется, к нему можно возвратиться.

Теорема 1 из п. 1.1.6 доказывается красиво и просто, но это кажущаяся простота. Дайте доказательство для самостоятельного разбора, а потом попросите школьников воспроизвести его. Конечно, теорема 1 обсуждается для того, чтобы вывести из нее следствие 1 о покоординатном дифференцировании векторнозначных функций. Как раз это следствие закрепляется в упражнениях. Это следствие в совокупности с геометрическим смыслом производной векторнозначной функции

из п. 1.1.7 дает возможность привести красивейший пример 6, в котором почти из "ничего" получаются формулы дифференцирования косинуса и синуса.

Следует отметить, что *совсем строгое* доказательство этих формул рассматриваемым методом требует доказательства того, что *предел отношения длины дуги окружности к длине ее хорды стремится к единице, когда длина дуги стремится к нулю* — иначе получается рассогласование между угловой скоростью и модулем скорости движения по траектории. Конечно, это утверждение эквивалентно выводу *замечательного предела*

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1,$$

который приводится даже в основном курсе. Но процитируем по этому поводу американского математика и физика *Лебовица*: "*Нестрого не означает неверно, равно как строго не значит уместно или интересно*"! Только в таких случаях нужно четко указывать на появившийся в рассуждениях пробел — например, на использование, в рассматриваемом случае, "интуитивно ясных" положений.

Последний пункт и пример Вольтерры-Лотки можно оставить для самостоятельной проработки учащимися (для ознакомления). Здесь же при обсуждении есть повод поговорить о конфигурационных пространствах различных эволюционирующих систем.

§ 1.2. Представление о динамических системах

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
1.2.0	"Введение в параграф" (предварительные замечания)	!	
1.2.1	Система уравнений Ньютона. Фазовая плоскость	!!↓	
1.2.2	Равноускоренное движение и свободное падение	!!↓	
1.2.3	Двумерная динамическая система (пример)	↑!	
1.2.4	Консервативные одномерные системы. Модель "шарик в желобе"	!!↓	
1.2.5	Пример консервативной системы: шарик на пружинке	!↓	*

В п. 1.2.1 вводится второе важнейшее, наряду с конфигурационным пространством, понятие классической механики: *фазовое пространство*, т. е. пространство координат и скоростей. Оно поясняется на примере *фазовой плоскости* — и сразу же в п. 1.2.2 следует конкретный пример *фазового портрета*. Ненавязчиво всплывает *закон сохранения полной механической энергии* в простейшем случае движения по вертикали в постоянном однородном поле притяжения. Укажем, что, несмотря на простоту содержания первых двух пунктов, оно играет фундаментальную роль при изучении одномерных динамических систем (тема/глава 5).

В п. 1.2.3 разбирается с точки зрения математики (вернее, *классической механики*, по сути со времен *Ньютона* являющейся областью математики) известный школьникам из курса физики пример. Этот разбор целесообразно показать школьникам, указав на полезные "соображения сохранения энергии".

Ответ к заданию: конечно, траектория в фазовом пространстве будет *параболой*, лежащей в плоскости, задаваемой в трехмерном пространстве $Oxzv_z$ уравнением $gx + v_1v_z = v_1v_2$.

Два последних пункта 1.2.4–5 содержат интересный и, возможно, несколько неожиданный материал. Сначала объясняется универсальная при анализе одномерного движения материальной точки в консервативном силовом поле *модель* "шарик в желобе". Конечно, хорошо бы ее изготовить реально (желоб с изменяющимся, но достаточно прочным профилем можно, например, поместить между двумя параллельными прозрачными пластинами). Но если модели нет, не беда: и на картинке все достаточно понятно.

В п. 1.2.5 мы начинаем с *закона Гука*, а заканчиваем как бы его "развенчиванием", с помощью весьма уместной ссылки на *линейное приближение*: около положения равновесия якобы *всегда* получается закон Гука! Да, это так, но суть открытия Гука в том, что линейный закон упругости остается справедливым и при *относительно больших* отклонениях от положения равновесия.

Комментарии и указания к упражнениям и задачам

Как и к остальным главам учебного пособия, к этой главе дано избыточное число задач — с тем, чтобы ученику и учителю было из чего выбрать. Непосредственно к материалу главы относятся задачи на касательные и линейные приближения, а также на задание и вычисление производных векторнозначных функций. Они, большей частью, не нуждаются в комментариях (некоторые указания и комментарии даны в самом разделе "Упражнения"). Ситуацией вводной темы стоит воспользоваться для того, чтобы как следует повторить вычисления производных и с производными. Мы полагаем, что стандартные в школе (да и вузе) вычисления и приложения производных, а это преимущественно исследование функций, построение графиков, отыскание экстремумов и наибольших/наименьших значений, менее всего подходят для эффективного повторения. Поэтому мы остановимся на задачах более-менее не "избитой" в основном школьном курсе тематики.

Задача 9(1). Требуется найти кратчайшее расстояние от точек параболы $y = x^2 - 8x + 16$ до прямой $y = -2x + 1$.

Решение. Найдем сначала касательную к параболе, параллельную прямой $y = -2x + 1$, то есть имеющую угловой коэффициент $k = -2$. Приравнивая производную $y' = 2x - 8$ минус двум, отыскиваем точку касания:

$$2x - 8 = -2, \quad x = x_0 = 3; \quad y_0 = y(3) = 9 - 24 + 16 = 1.$$

Поэтому уравнение касательной имеет вид

$$y = 1 - 2(x - 3) = -2x + 7.$$

Теперь заметим, что любая точка параболы N лежит от прямой $y = -2x + 1$ дальше, чем точка касания $M(3, 1)$ — см. рисунок 1. Итак, кратчайшее расстояние от параболы по прямой есть длина перпендикуляра MH. Проще

найти длину перпендикуляра AC (рис. 1) — полагая $|AC| = |MH| = x$ и записывая для прямоугольного треугольника ABC теорему Пифагора:

$$x^2 + (2x)^2 = |AB|^2 = 36$$

$$(|AC| = x, \quad |AB| = 7 - 1 = 6, \quad |BC| = |AC| \operatorname{tg} \angle A = 2x; \quad \operatorname{tg} \angle A = 2,$$

что следует из равенства выделенных на рисунке углов), — находим:

$$5x^2 = 36 \Longrightarrow x = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

Ответ: $\dfrac{6}{\sqrt{5}}$.

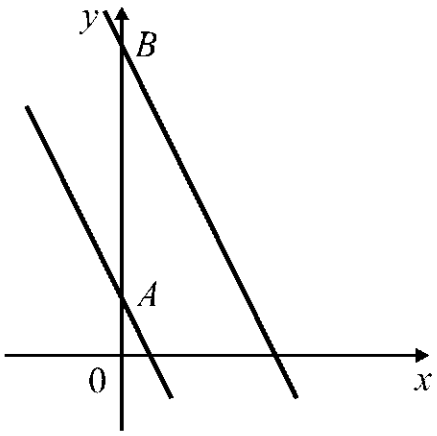

Рис.1

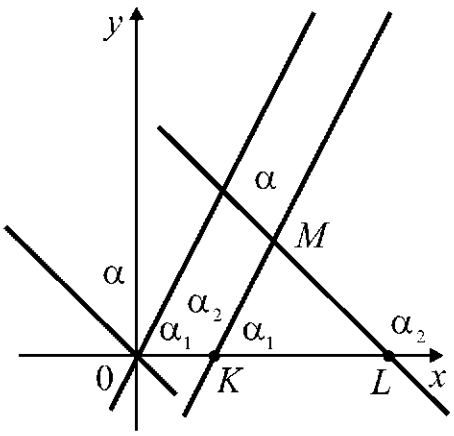

Рис.2

Задача 23. В п. 1 требуется найти угол между прямыми $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$.

Решение. Поскольку известны угловые коэффициенты прямых, то есть тангенсы углов, образуемых прямыми с положительной полуосью Ox, то естественно отыскивать как раз *тангенс* угла между прямыми. Заметим, что при переносе обеих прямых в начало координат получаем соответственно параллельные исходным прямые $y = k_1x$ и $y = k_2x$, пересекающиеся под тем же углом $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ ($\operatorname{tg} \alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = k_2$), что и данные прямые (рис. 2; то же самое соотношение $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ можно получить и без переноса — из теоремы о внешнем угле треугольника KLM $\alpha_2 = \alpha + \alpha_1$). Теперь можно найти $\operatorname{tg} \alpha$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

Если угол α острый, то есть $\operatorname{tg} \alpha > 0$, то задача решена (только в конкретных случаях необходимо учитывать ориентацию — "направление отсчета" — углов; в нашем случае — рис. 2 — мы считали, что углы α_1 и α_2 отсчитываются в положительном направлении от оси Ox к данным прямым, причем $\alpha_2 > \alpha_1$). Если же

угол α окажется тупым, то, согласно определению, углом φ между прямыми будет смежный к α угол $\varphi = \pi - \alpha$. Тогда $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha = |\operatorname{tg}\alpha|$. Так или иначе, в том и другом случаях для тангенса *угла между прямыми* справедлива формула

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

Но, кроме того, может случиться, что $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$; это соответствует тому, что $\cos\alpha = \cos(\alpha_2 - \alpha_1) = 0$, или $1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 = 1 + k_1 k_2 = 0$. Тем самым мы получили **условие перпендикулярности прямых**, т. е. решили и п. 2 задачи:

Прямые $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k_1 k_2 = -1$.

Важное "утилитарное", т. е. применимое к решению других задач, в том числе и конкурсных, имеют **предложения из задач 15–16**. Докажем их.

Предложение 1 (о касательных к параболам; задача 15). *Не вертикальная прямая $y = kx + d$ является касательной к параболе $y = ax^2 + bx + c$ тогда и только тогда, когда она имеет* ***единственную*** *общую точку с этой параболой, то есть уравнение*

$$ax^2 + bx + c = kx + d \qquad (*)$$

имеет единственное решение (иначе говоря, дискриминант уравнения $(*)$ равен нулю).

Доказательство. Если прямая имеет с параболой общую точку $(x_0; y_0)$, то $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$ и ее уравнение записывается в виде

$$y = ax_0^2 + bx_0 + c + k(x - x_0).$$

Подставляя эту формулу в правую часть соотношения $(*)$, приходим к квадратному уравнению:

$$ax^2 + bx + c = ax_0^2 + bx_0 + c + k(x - x_0) \iff$$

$$\iff a(x^2 - x_0^2) + b(x - x_0) - k(x - x_0) = 0 \iff (x - x_0)(ax + ax_0 + b - k) = 0.$$

Из последней записи видно, что второй корень получившегося уравнения совпадает с x_0 тогда и только тогда, когда

$$ax_0 + ax_0 + b - k = 0 \iff k = 2ax_0 + b = y'(x_0),$$

т. е. когда рассматриваемая прямая является касательной, что и требовалось установить.

Замечание. Вертикальные прямые $x = x_0$ координатной плоскости также, как и касательные, имеют с параболой $y = ax^2 + bx + c$ только одну общую точку, но, конечно, касательными к этой параболе не являются.

Предложение 2 (о касательных к гиперболам; задача 16). *Не вертикальная и не горизонтальная прямая $y = kx + b$, $k \neq 0$, является касательной к гиперболе $y = \frac{c}{x}$ тогда и только тогда, когда она имеет* ***единственную*** *общую точку с этой гиперболой, то есть уравнение*

$$\frac{c}{x} = kx + d$$

имеет единственное решение.

Доказательство. Если прямая имеет с гиперболой общую точку $(x_0; y_0)$, то $y_0 = \dfrac{c}{x_0}$, уравнение прямой

$$y = \frac{c}{x_0} + k(x - x_0),$$

и уравнение для абсцисс общих точек

$$\frac{c}{x} = \frac{c}{x_0} + k(x - x_0) \iff c\frac{x - x_0}{x_0 x} + k(x - x_0) = 0 \iff$$

$$\iff (x - x_0)\left(\frac{c}{x_0 x} + k\right) = 0 \iff \frac{1}{x_0 x}(x - x_0)(c + kx_0 x) = 0.$$

Второй корень последнего уравнения совпадает с x_0 тогда и только тогда, когда

$$c + kx_0 \cdot x_0 = 0 \iff k = -\frac{c}{x_0^2} = y'(x_0),$$

т. е. когда рассматриваемая прямая является касательной к гиперболе, что и требовалось доказать.

Замечание. Для гипербол из рассмотрения следует исключить не только вертикальные, но и горизонтальные прямые, т. е. случай, когда угловой коэффициент $k = 0$. Эти прямые имеют с гиперболой не более одной общей точки (ни одной точки с гиперболой не имеют ее асимптоты), но никоим образом касательными к гиперболе не являются. *Вопрос*: где в доказательстве предложения 2 использовано, что $k \neq 0$?

Касательные к параболам и гиперболам имеют еще примечательные свойства, которые дают способ их *точного построения* (циркулем и линейкой). Их предлагается открыть в задачах 18 и 22.

Задача 18. Требуется найти точку пересечения касательной к параболе $y = ax^2$ в точке $x = z$ с осью абсцисс.

Решение. Уравнение касательной имеет вид

$$y = az^2 + 2az(x - z) = 2azx - az^2 = 2az\left(x - \frac{z}{2}\right),$$

так что касательная пересекает ось абсцисс в середине отрезка между точками $O(0; 0)$ и $Z(z; 0)$. Отсюда получается такой способ точного геометрического построения касательной к параболе: делим отрезок OZ пополам и через эту середину и точку графика $M(z; az^2)$ проводим прямую.

Задача 22. Требуется установить, что касательная к гиперболе $xy = a^2$ образует с осями координат треугольник постоянной площади, причем точка касания является серединой гипотенузы этого треугольника.

Решение. Записываем уравнение касательной к гиперболе в какой-то точке $z \neq 0$:

$$y = -\frac{a^2}{z^2}(x - z) + \frac{a^2}{z} = -\frac{a^2}{z^2}x + \frac{2a^2}{z} = -\frac{a^2}{z^2}(x - 2z).$$

Отсюда понятно, что касательная пересекает оси координат в точках

$$(x_0; 0) = (2z; 0), \qquad (0; y_0) = \left(0; \frac{2a^2}{z}\right).$$

Катеты указанного треугольника равны x_0, y_0, и его площадь

$$S = \frac{1}{2}x_0 y_0 = \frac{1}{2} \cdot 2z \cdot \frac{2a^2}{z} = 2a^2$$

не зависит от выбора точки z, что и требовалось установить.

Из тех же формул для катетов получаем, что они вдвое длиннее соответствующих координат точки касания, поэтому точка касания есть середина гипотенузы.

Чтобы построить касательную, проходящую через данную точку $M(z; y)$ гиперболы, удваиваем ее абсциссу и строим точку $N(2z; 0$ на оси абсцисс. Согласно доказанному, прямая MN и будет искомой касательной.

Представляют интерес изящные задачи 19–21 про свойства хорд и касательных к параболе. Они просты и довольно естественны, и вместо них решим задачу, приводящую к довольно неожиданному ответу.

Задача 28. Требуется найти множество точек, из которых парабола $y = ax^2$ видна под прямым углом.

Решение. Пусть $M(x_0; y_0)$ — точка искомого множества (как сейчас снова стало модно, можно и по старинке говорить о "*геометрического места точек*"). Из нее (в случае, когда эта точка лежит по "внешнюю" сторону параболы) можно провести *две* касательные к параболе $y = ax^2$. Чтобы найти их угловые коэффициенты $k_{1,2}$, запишем общее уравнение прямой, проходящей через точку M, т. е. линейную функцию $y = y_0 + k(x - x_0)$. Как мы видели в задаче 15, условие касания состоит в *единственности* общих точек этой прямой и данной параболы. Уравнение для абсцисс общих точек, таким образом, должно иметь *нулевой дискриминант*:

$$y_0 + k(x - x_0) = ax^2 \iff ax^2 - kx - (y_0 - kx_0) = 0,$$

$$D_x = k^2 + 4a(y_0 - kx_0) = k^2 - 4ax_0k + 4ay_0.$$

Получилось квадратное уравнение относительно k. Решив его, мы найдем значения $k = k_{1,2}$ и можем выписать уравнение касательных. Однако, они нам не нужны — условие перпендикулярности касательных записывается через произведение угловых коэффициентов: согласно задаче 23, оно имеет вид $k_1k_2 = -1$. *По*

теореме Виета произведение k_1k_2 равно свободному члену квадратного трехчлена $D_x = D_x(k)$, т. е. $4ay_0$. Значит, если парабола видна из точки $M(x_0; y_0)$ под прямым углом, то $4ay_0 = -1$, т. е. точка M лежит на горизонтальной прямой $y_0 = -\frac{1}{4a}$. Рассуждения в обратную сторону показывают, что и наоборот, из любой точки указанной прямой парабола "видна под прямым углом", т. е. проведенные через нее касательные перпендикулярны. Таким образом, искомое множество (ГМТ) есть прямая, перпендикулярная оси (оси симметрии $x = 0$) параболы.

Эта прямая называется *директрисой* параболы (от лат. directrix — направляющая). Можно предложить учащимся исследовательскую задачу: отыскать точку F во внутренней области параболы такую, что парабола может быть описана как геометрическое место точек, равноудаленных от F и от директрисы. Эта точка — *фокус* параболы (лат. focus — очаг), и, соответственно названию, обладает тем свойством, что исходящие из нее лучи после отражения от параболы все идут параллельно оси параболы. Конечно, и наоборот: пучок параллельных оси лучей после отражения от параболического зеркала соберется в фокусе (вроде бы этим свойством, называемым *оптическим свойством параболы*, воспользовался *Архимед* — сжег таким сходящимся после отражения пучком (почти параллельных) солнечных лучей вражеский флот!). Оптическое свойство вплотную примыкает к данной тематике, и его доказательство — еще одна интересная тема исследования[1].

Тема 2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ (глава 2; 8[10] ч)

Общие замечания и рекомендации по теме 2

Рассмотрение и исследование решений дифференциальных уравнений естественно начать с основного уравнения *интегрального исчисления*. В этой теме и проводится последовательная линия на изложение интегрального исчисления на языке дифференциальных уравнений. В каком-то смысле мы здесь следуем программе *Исаака Ньютона*, полагавшего дифференциальные уравнения ключевым объектом, понятием математического анализа (недаром в письме *Лейбницу* он зашифровал слова "*Полезно решать дифференциальные уравнения*!).

Сначала, в § 2.1, в параллель с известным к тому времени школьникам языком первообразных[2] вводится язык дифференциальных уравнений: понятия решения, начального условия, устанавливается теорема единственности решений на промежутке.

§ 2.2 играет ключевую роль во всем курсе **МА**. В нем дифференциальным уравнением более общего вида $y' = F(x, y)$ и их решениям дается наглядная интерпретация с помощью *полей направлений* и их *интегральных кривых*. Заметим, что это наглядность довольно высокого уровня абстракции — ведь поле направлений есть

[1]Любопытно, что *Алексей Николаевич Толстой* чуть промахнулся, назвав свой знаменитый научно-фантастический роман "*Гиперболоид инженера Гарина*" — следовало бы употребить наименование "*параболоид*".

[2]Впрочем, изложение построено независимо от основного/профильного курсов и достаточно подробно, так что сугубой необходимости в априорном знакомстве со школьным интегральным исчислением нет.

функция на плоскости Oxy со значениями в множестве прямых. Излагается естественная, но весьма плодотворная идея *Эйлера* приближенного решения дифференциальных уравнений путем замены интегральных кривых ломаными, идущими в каждой точке излома вдоль заданного в этой точке направления.

В § 2.3 соображения Эйлера, примененные к основному дифференциальному уравнению интегрального исчисления $y' = f(x)$, приводят к интегральным суммам функции f и их интерпретации как площадей ступенчатых фигур, вписанных в соответствующую ограниченную сверху графиком $z = f(x)$ криволинейную трапецию. Предельный переход приводит к идее рассмотрения площади переменной криволинейной трапеции в качестве "кандидата" в решения рассматриваемого дифференциального уравнения. Обратим внимание: главное в этом трехэтапном рассуждении — это наличие *мотивации* к рассмотрению переменных площадей — они не берутся "с потолка", а, повторимся, *естественно* возникают в ходе анализа решаемой задачи.

Отметим, что здесь и далее в этой главе *не обсуждаются* понятия площади или (далее) объема, или площади поверхности. Они предполагаются *данными*, и если не известными, то, во всяком случае, интуитивно ясными.

Далее в § 2.3, играющем центральную роль в этой теме, формулируется *основная теорема анализа* как теорема о производной переменной площади криволинейной трапеции "под" графиком непрерывной функции. Эту теорему, безусловно, очень хорошо понимал Ньютон: площадь под графиком скорости равна пройденному пути, а производная пути есть скорость. Возможно, стоит указать учащимся на эту интерпретацию перед тем, как приводить строгое ("по модулю" применения понятия площади и ее свойств) доказательство. В доказательстве неизбежно всплывет определение *непрерывности* функции — наверное, на нем не нужно акцентировать внимание школьников.

Заметим, что кинематическое обоснование ("площадь под скоростью есть путь") основной теоремы было понятно, в случае равноускоренного движения, еще *Галилео Галилею* (1564–1642), а задолго до него, по-видимому, и французскому математику, физику и экономисту *Николя Оресму* (1323–1382), известному еще и тем, что он задолго до *Ферма* и *Декарта* построил прямоугольную систему координат.

Обычно под основной теоремой анализа понимают то или иное утверждение о *взаимной обратности* операций дифференцирования и интегрирования. Заранее объяснив школьникам, что на самом деле рассматриваемая (переменная) площадь еще называется и *интегралом*, можно и наше утверждение вернуть в лоно традиции — тем более, что дальше в этом же параграфе формулируется (без доказательства) *теорема Коши–Муаньо о производной интеграла по верхнему пределу*.

Обращая формулу из основной теоремы и пользуясь заранее доказанной (в § 2.1) теоремой о независимости приращений первообразных от их выбора, получаем *формулу Барроу* для вычисления площадей криволинейных трапеций.

Теперь собственно об интеграле. В § 2.3 интеграл *определяется* так же, как он *описывается* в учебнике под ред. А. Н. Колмогорова — для непрерывной функции как предел интегральных сумм частного вида. При этом мы явно (но опять-таки без доказательства) формулируем *теорему Коши–Римана* о существовании нуж-

ного предела. Интерпретация интеграла с помощью снабженной знаками площади между осью абсцисс и графиком интегрируемой функции вкупе с формулой Барроу для площадей дают *формулу Барроу для вычисления интеграла как приращения первообразной* — обычно носящую имена *Ньютона* и *Лейбница*. В очередной раз отметим, что эта формула содержится в "Лекциях" Барроу, изданных в 1669-70 гг. Ньютон, а тем более Лейбниц никогда не претендовали на открытие этой формулы, и мы, следуя известному российскому математику *В. И. Арнольду* (см. о нем в главе 3), как бы возвращаем формуле имя ее первооткрывателя.

Заключительный параграф главы посвящен важным геометрическим приложениям интеграла и исчерпывающе прокомментирован ниже.

§ 2.1. Анализ дифференциального уравнения $y' = f(x)$

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
2.1.0	"Введение в параграф" (предварительные замечания)	!	
2.1.1	Интегрирование как решение дифференциального уравнения	!!	
2.1.2	Теорема единств. решений уравнения $y' = f(x)$ и св-ва первообразных	!!	
2.1.3	Вопросы существ. решений уравнения $y' = f(x)$ или первообразных	!↓	

В первом пункте описан перевод с языка первообразных, основного в интегральном исчислении, на язык решений дифференциальных уравнений вида $y' = f(x)$. Лемма (признак постоянства функции *на промежутке*) наверняка знакома школьникам по основному курсу, но ее стоит повторить, акцентируя внимание на то, что она "работает" только в одном промежутке. Таким образом, в принципе могут возникнуть "многозначные константы", константами на самом деле не являющиеся. Для них мы вводим специальное обозначение $\widehat{C}$.

Отметим (для учителя), что такая многозначность, а она может быть и "бесконечно-значной", как для первообразной $\operatorname{tg} x + \widehat{C}$ функции $\cos^{-2} x$, во многих вузовских учебниках игнорируется, равно как и в таблицах так называемых *неопределенных* интегралов (это *лейбницев* язык в интегральном исчислении). Конечно, практик при этом не ошибается, но неискушенный "аналитик" попасться может. Можно показать школьникам такой пример вычисления интеграла по формуле *Ньютона–Лейбница* (заметим, что мы ее вскоре переименуем в *формулу Ба́роро́у*, по имени первооткрывателя):

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -1 - (-(-1)) = -2,$$

а вроде бы интеграл должен быть положительным?!

В п. 1.2.2 рассматриваемое дифференциальное уравнение связывается с *начальным условием* и доказывается *теорема единственности решений* такого дифференциального уравнения (как это часто бывает в математике, теорема единственности предшествует *теореме существования*; школьников надо бы исподволь приучать к правильному и сознательному употреблению этих по сути логических наименований — теорем единственности/существования).

Здесь же выводится полезное следствие: теорема о равенстве приращений первообразных. Это чисто *методический* ход. Раз уж мы стали излагать интегральное исчисление "*по Ньютону*", будем последовательны — дадим в этом ключе все соответствующие теоретические и практические вопросы.

В последнем пункте параграфа затрагивается как раз вопрос о *существовании* первообразных или решений дифференциальных уравнений вида $y' = f(x)$. Первый пример — отсутствие первообразной у функции $f(x) = \operatorname{sgn} x$ — школьникам наверняка знаком. Стоит обратить внимание, что речь идет об отсутствии первообразной на любом промежутке, содержащем нуль. Второй пример — разрывная функция, имеющая первообразную, — более экзотический. Для учителя заметим, что у таких функций может быть разрыв только *второго рода*, с отсутствием предела в точке разрыва справа и/или слева. Данная функция *не интегрируема по Риману*. Однако в самом первом издании школьного учебника по алгебре и началам анализа для 10 класса[3] под ред. А. Н. Колмогорова приводилось определение интеграла через приращение первообразной, если она существует; в этом смысле указанная в примере 5 функция *интегрируема* (корректность такого, далеко не общепринятого определения интеграла[4] вытекает из теоремы 2 из предыдущего пункта.

К этому параграфу целесообразно примкнуть простые упражнения на вычисление первообразных (начиная с первого — с графического интегрирования).

§ 2.2. Геометрическая интерпретация уравнения $y' = F(x, y)$

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
2.2.0	"Введение в параграф" (предварительные замечания)	!	
2.2.1	Поля направлений и интегральные кривые ДУ	!!↓	
2.2.2	Метод Эйлера построения интегральных кривых	!!↓	
2.2.3	Изоклины полей направлений и графическое интегрирование ДУ	~	**ФУ**

[Через "ДУ" мы обозначили "дифференциальные уравнения" (в соответствующем падеже). Значок "**Ф**" в примечаниях указывает на факультативность пункта, а "**ФУ**" — на то, что к этому факультативному пункту даны-таки упражнения.]

Это очень важный параграф — в нем дается принадлежащая *Леонарду Эйлеру* геометрическая, наглядная и пригодная для "интуитивных прозрений" трактовка

[3]В старом "классоисчислении" — по нынешнему — для 11 класса.

[4]Каково определение интеграла в основном курсе "*Алгебры и начал анализа*" в настоящее время, т.е. в действующих учебниках — сказать весьма затруднительно. Примерно так: это интеграл Римана для непрерывных функций с интегральными суммами частного вида.

дифференциальных уравнений первого порядка. Она поможет в курсе **МА** не один раз. Опорой этой интерпретации служит геометрическая интерпретация производной, которую мы повторили в § 1.1.

Кроме того, эта интерпретация дает возможность *приближенного* решения дифференциальных уравнений — путем замены решений *ломаными Эйлера* и устремления шага переменной x к нулю. В частности, этому подходу отвечают целых *три* метода *численного интегрирования*, т. е. вычисления интегралов с заданной точностью: просто *метод Эйлера*, *модифицированный* метод Эйлера и *исправленный* метод Эйлера, о которых мы еще упомянем (один из этих методов, причем не самый точный, есть популярный *метод трапеций*, когда вместо ступенчатой фигуры в криволинейную трапецию вписывается совокупность "тонких вертикальных" прямоугольных трапеций).

В п. 2.2.1 вводятся два основных понятия: *поле направлений* дифференциального уравнения и *интегральные кривые* поля направлений или соответствующего дифференциального уравнения, т. е. графики решений этого уравнения. В следующем параграфе описывается важная конструкция: построение *ломаных Эйлера*, исходящих из какой-то начальной точки (отвечающей *начальному условию*) и строящихся с каким-то (у нас — *постоянным*) *шагом* по оси аргумента x. Существенно сопроводить эту конструкцию *формулами* — они понадобятся в следующем параграфе. И, конечно, объяснить и сформулировать *основную гипотезу* о пределе "вторых концов" ломаных Эйлера.

Пункт 2.2.3 не очень существен для дальнейшего. Его можно объяснить с тем, чтобы предложить школьникам несколько задач на построение *изоклин* и по ним — приближенных интегральных кривых. Сами по себе приводимые в учебном пособии конкретные примеры отыскания интегральных кривых с помощью построения изоклин довольно интересны. Они помогают лучше понять, какие решения бывают у *неавтономных* дифференциальных уравнений вида $y' = F(x, y)$, и предоставляют еще раз попрактиковаться в вычислении производных, в том числе фактически и *производных неявных функций* (т. е. функций $y = y(x)$, заданных с помощью уравнения от x и y, $H(x, y) = \text{const}$, т. е. $H(x, y(x)) \equiv \text{const}$).

§ 2.3. Ломаные Эйлера, решения уравнения $y' = f(x)$ и интеграл

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
2.3.0	"Введение в параграф" (предварительные замечания)	!	
2.3.1	Ломаные Эйлера и интегральные суммы	!	
2.3.2	Интегральные суммы и квадратуры (площади)	!!	
2.3.3	Основная теорема анализа: производная переменной площади	!!	
2.3.4	Теоремы существования решений уравнения $y' = f(x)$ и первообразных	!	
2.3.5	Площади криволинейных трапеций как приращения первообразных	!!	У
2.3.6	Интегральные суммы и интеграл	!	

Суть этого параграфа — применение интерпретации Эйлера к уравнениям вида $y' = f(x)$. Их характерная особенность — постоянство вдоль вертикалей (иначе, *инвариантность* при параллельных переносах вдоль оси ординат). Отсюда сразу, без вычислений, а только из наглядно-геометрических соображений, следует *теорема единственности* из предыдущего параграфа. Кроме того, формула для конечного значения ломаной Эйлера имеет простую и ясную геометрическую интерпретацию как *интегральной суммы*, с помощью *площади ступенчатой фигуры*, вписанной в график $z = f(x)$ правой части рассматриваемого дифференциального уравнения. Это все разбирается в первых двух пунктах параграфа, *естественно* подводя к т. н. *основной теореме анализа* из п. 2.3.3.

В разных курсах математического анализа эту теорему трактуют по-разному. Мы остановились на *наглядно-геометрической* ее трактовке, через производную площади переменной *криволинейной трапеции*. Здесь понятие *площади* полагается *известным* или, по крайней мере, *интуитивно ясным*. Доказательство, естественно, использует непрерывность правой части рассматриваемого дифференциального уравнения.

В следующем п. 2.3.4 собирается урожай с доказанной основной теоремы: теоремы существования решений рассматриваемых уравнений и первообразных для непрерывных функций.

В п. 2.3.5 формула из основной теоремы "переворачивается" так, что *площадь* отыскивается с помощью первообразных, а не первообразная как переменная площадь. С помощью теоремы о независимости приращений первообразных из п. 1.2.2 формулируется *теорема Барроу*, основное содержание которой — *формула Барроу* для вычисления площадей. Сразу же рассматриваются классические примеры отыскания площадей криволинейных трапеций — задачи *Архимеда* и *Паскаля*.

В п. 2.3.6 мы снова возвращаемся к *интегральным суммам* и определяем интеграл от непрерывной функции как предел ее интегральных сумм, ссылаясь при этом на *теорему Коши–Римана* о существовании этого предела, приводимую без доказательства.

Вслед за тем формула Барроу для площадей переписывается как *формула Барроу для интегралов*, которая чаще и "несправедливо" называется *формулой Ньютона–Лейбница*.

Далее приводится еще одна формулировка *основной теоремы анализа* о производной интеграла по верхнему пределу. Она в каком-то смысле факультативна, но среди упражнений есть относящиеся к ней (впрочем, для их решения всегда можно воспользоваться формулой Барроу).

Это занятие весьма насыщенное, так что его необходимо тщательно подготовить, выверить на два урока. Еще один урок "из резерва" можно потратить на решение упражнений на вычисление интегралов — как площадей, а также с помощью формулы Барроу — если только школьникам не надоело это занятие на уроках по основному/профильному курсам (в подобных случаях лучше либо вообще не отвлекаться на упражнения, либо предлагать менее стандартные задачи; в данной главе это, например, задачи, связанные с *исчислением разностей* и *разностными уравнениями* — они распределены по двум *циклам* задач).

§ 2.4. Геометрические приложения интеграла

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
2.4.1	Основная идея: применение формулы Барроу	!	
2.4.2	Площади плоских фигур	~	
2.4.3	Объем общего прямого цилиндра	!!	
2.4.4	Интегральная формула для объемов (интеграл площадей сечений)	!!	**У**
2.4.5	Объем общего конуса	!	
2.4.6	Объем тела вращения	!	
2.4.7	Объем шара	!!	
2.4.8	Замечание о площади сферы	!!	
2.4.9	Геометрические меры и интегральные суммы. Принцип Кавальери	~	

Цель включения этого параграфа, на самом деле весьма *косвенно* связанного с дифференциальными уравнениями, состоит в *реабилитации* интегрального подхода к вычислению геометрических мер (площадей, объемов, а в "Упражнениях" — и длин дуг графиков или иных кривых). Появившись было в учебниках по стереометрии в качестве простейшего идейно и в вычислительном плане способа вывода элементарных формул для объемов, в последнее время этот способ постепенно оказался изгнанным из курса геометрии[5]. Мы полагаем, что школьники должны быть ознакомлены с таким подходом.

В п. 2.4.1 объясняется общая идеология интегрального подхода, и она даже худо-бедно связывается с дифференциальными уравнениями. В основе подхода

[5]Мы имеем в виду наиболее распространенный учебник А. В. Погорелова.

лежит *формула Барроу* для восстановления функции по ее производной. Отметим, что эта формула служит и для записи решения дифференциального уравнения $y' = f(x)$ с заданным начальным условием $y(x_0) = y_0$: тогда

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(u)\,du.$$

В этом же пункте употребляется термин *измеримость* фигуры. Не следует на нем акцентировать внимание школьников, но если будет задан непосредственный вопрос — указать, что бывают и, например, плоские фигуры, не имеющие площади в *естественном* смысле этого слова. Пример: криволинейная трапеция, "ограниченная сверху" графиком *функции Дирихле*[6].

В следующем пункте обобщается формула для выражения площади криволинейной трапеции через интеграл. Его можно оставить для самостоятельной проработки учащимися, записав только саму формулу (в двух вариантах: для произвольной хорошей плоской фигуры и для "разности" двух криволинейных трапеций) — она потребуется в следующем пункте. В нем выводится формула для объема общего прямого цилиндра уже фактически как интеграл от площадей сечений. В п. 2.4.4 речь уже об общей формуле *объема как интеграла площадей сечений*. В п. 2.4.5 она применяется для вычисления объема общего конуса, в пп. 2.4.6–7 — для вычисления объема произвольного тела вращения и затем шара.

Пункт 2.4.8 есть некоторое отступление от линии вычисления объемов — из формулы для объема шара *дифференцированием* выводится формула для площади сферы. Подобный подход, имеющий в своей основе идею вычисления *меры Минковского*, выдвинутую известным немецким математиком и физиком *Германом Минковским* (1864–1909; более всего он известен своей интерпретацией четырехмерного *пространства–времени*, моделирующей *специальную теорию относительности Альберта Эйнштейна* и называемой просто *пространством Минковского*). Грубо говоря, идея Минковского состоит в том, что "длина дороги равна ее площади, деленной на ширину". Подход Минковского к определению площадей произвольных поверхностей через объемы их "утолщений" — ε-окрестностей: такой объем делится на толщину слоя 2ε, которая затем устремляется к нулю, — был реализован в первых вариантах предназначенных для школы учебников геометрии академика *Алексея Васильевича Погорелова* (1919–2002), а еще до того, в несколько "препарированном" виде — в учебниках под ред. З. А. Скопеца. Примерно в таком виде идея Минковского и изложена в учебном пособии.

В заключительном пункте параграфа и всей главы обсуждается подход к вычислению геометрических мер не с помощью формулы Барроу, а непосредственно через интегральные суммы. Здесь как бы нет ничего нового для школьников, за исключением *принципа Кавальери* и красивого примера его применения — вывода из него знаменитой *формулы Архимеда*: объем шара равен двум третьим описанного около него прямого кругового цилиндра.

[6]Напомним, что это функция $D(x)$, равная 1 при рациональных значениях x и нулю при иррациональных значениях. Вместо нее, если угодно, можно взять функцию $f(x) = D(x) + 1$.

В целом этот заключительный параграф главы 2 вполне укладывается в одно занятие, если пп. 2.4.2 и 2.4.9 спланировать на самостоятельную проработку учащимися.

Комментарии и указания к упражнениям и задачам

Большинство упражнений к главе 2 суть стандартные задачи интегрального исчисления примерно на основном/профильном уровнях и в особых комментариях не нуждаются. К менее стандартным или более сложным задачам сразу же приведены указания и/или комментарии в самом учебном пособии. Это же относится и к выпадающим из основной темы задачам про разности последовательностей и разностные уравнения. Некоторые из приведенных задач данной тематики можно рассматривать как пропедевтику изучения/исследования линейных дифференциальных уравнений из следующей главы, и к ним мы обращаемся в комментариях к § 3.1.

Тема 3. ЭКСПОНЕНТА И ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ (глава 3; 10[8] ч)

Общие замечания и рекомендации по теме 3

С этой темы, можно сказать, начинаются "настоящие" дифференциальные уравнения, не сводящиеся сразу к простому отысканию интегралов или первообразных. При этом рассматриваемый класс *линейных дифференциальных уравнений*, пока преимущественно *первого порядка* (линейные уравнения второго порядка "всплывут" в главе 5 в связи с дифференциальными уравнениями Ньютона), имеет очень много применений — от модели размножения простейших до модели атомного взрыва.

Глава начинается с трех примеров линейных эволюционных моделей (включая движение с вязким трением) и с демонстрации трех подходов к уравнениям вида $y' = ky$: эйлерова, как в § 2.2, ньютонова, с излюбленными им степенными рядами, и с точки зрения аналогии с линейным разностным уравнением, сводящимся к уравнению геометрической прогрессии $y_{n+1} = qy_n$. Все подходы хороши — выбирай на вкус, казалось бы... В основном/профильном курсе школьники, скорее всего, сначала знакомятся с показательной функцией, затем с логарифмом, причем как бы "повисает в воздухе" вопрос о существовании производной экспоненты — в лучшем случае принимается *гипотеза* о существовании числа "e" такого, что функция $x \mapsto e^x$ имеет в нуле производную, равную 1. Обоснование этой гипотезы требует либо громоздкой возни с пределами (в духе эйлерова или ньютонова подходов), либо применение *интегрирования* обратной пропорциональной зависимости, немедленно приводящего к натуральным логарифмам. Мы выбрали второй путь и реализовали его в § 3.2.

По тематике первых двух параграфов этой главы в разделе "Упражнения" дано "проектное задание", которое стоит предложить учащимся выполнять не индивидуально, а группой из нескольких человек. В задании предлагается определенная тема для самостоятельного исследования, связанная с рассматриваемым материалом — априорное исследование функциональных свойств решений линейных дифференциальных уравнений.

Хотя, в принципе, для выполнения заданий не требуется ничего, выходящего за рамки обязательного минимума (формулы дифференцирования, правила вычисления производных, признаки постоянства и монотонности функций), задание сопро-

в виде "наводящих вопросов". Задания не следует трактовать как (обязательные или нет) домашние задания: это, скорее, *творческие проекты*. Непременно следует предусмотреть для выполняющих задания консультации учителя, на которых школьники могут показать свои достижения, сказать о встретившихся трудностях, задать те или иные вопросы. Разумеется, школьники могут пользоваться любой помощью: литературой; при возможности, советами родителей и других взрослых, разбирающихся в тематике заданий. Литературу может порекомендовать и учитель, но специфика заданий в этой и других главах такова, что полное изложение темы заданий в большинстве случаев отсутствует в готовом виде в учебниках или иной литературе.

Можно порекомендовать оформить результаты исследований в форме этакого "научного трактата" (с постановкой проблемы, леммами, теоремами, следствиями, выводами...) — с тем, чтобы все учащиеся могли ознакомиться с полученными результатами. Можно, конечно, устроить и "научную конференцию" — симпозиум с докладами, вопросами, обсуждением в более широком кругу, чем участники занятий по спецкурсу; конечно, при этом нужно охватить несколько тем данного спецкурса (т. е. курса "Дифференциальные уравнения"), а при возможности, охватить этим "мероприятием" и тематику других спецкурсов (с подобными проектами и "трактатами", подготовленными их слушателями).

Чтобы обеспечить выполнение этих работ на достаточно хорошо понимаемом учащимися и осознанном уровне, в атмосфере стимулирования поисковой активности учащихся, учитель сам должен хорошенько ориентироваться в затрагиваемой тематике. Поэтому проектные задания далее подробно разбираются и комментируются. Кроме того, в рекомендациях приводятся небольшие списки дополнительных задач, заданий и тем для дальнейшего продвижения в рассматриваемых направлениях (тоже с указаниями и комментариями). Они предназначены, по замыслу, уже для индивидуальной проработки теми учащимися, которые заинтересовались основными темами.

Возвращаясь к теоретическому материалу главы, отметим, что до того, как применять наши знания о производной экспоненты к конкретным моделям, мы посвящаем § 3.3 сравнению роста показательных, степенных и логарифмических функций. Надо отметить, что доказательства теорем о сравнении отнюдь не банальны — их нужно подробненько разобрать со школьниками. "Сверхзадача" этого параграфа в том, чтобы было понятно, что экспонента с *любым* основанием, хотя бы "чуть-чуть" большим единицы, растет очень быстро — и это может привести к неожиданным эффектам. Это демонстрируется в следующем параграфе на примере модели ядерного деления.

В этом параграфе 3.4 появляется *новая* математическая идея "широкого применения" — *метод Д'Аламбера* решения неоднородных линейных уравнений, в данном случае дифференциальных (см. ниже комментарии к параграфу). В заключительном параграфе 3.5, помеченном как факультативный, с одной стороны, резюмируются предыдущие достижения, а с другой, показываются и новые методы справляться с линейными дифференциальными уравнениями (с переменными коэффициентами). Это параграф стоило бы преподнести учащимся в форме обзорной лекции-беседы.

§ 3.1. Линейные процессы и дифференциальное уравнение $y' = ky$

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
3.1.0	"Введение в параграф" (предварительные замечания)	!	
3.1.1	Пример: рост популяций	!	
3.1.2	Пример: радиоактивный распад	!	
3.1.3	Пример: вязкое трение	!	
3.1.4	Анализ дифференциального уравнения $y'(x) = ky(x)$: подход Эйлера	!!	
3.1.5	Анализ уравнения $y'(x) = ky(x)$: подход Ньютона	!!	
3.1.6	Анализ уравнения $y'(x) = ky(x)$: разностный аналог	!!	

Узловые вопросы[7], которые должны четко уяснить учащиеся на данном занятии:

1. Вид линейного дифференциального уравнения первого порядка.

2. Проверка того, удовлетворяет ли та или иная функция конкретному дифференциальному уравнению. *[8] Запись дифференциальных уравнений вида $y' = F(x, y)$, которые можно записать после дифференцирования конкретных элементарных функций. (См. примеры ниже.)

3. Трактовка дифференциальных уравнений вида $y' = F(x, y)$ с помощью поля направлений на координатной плоскости Oxy. Интегральные кривые как графики решений $y = y(x)$ дифференциального уравнения. * Характерные свойства полей направлений для дифференциальных уравнений частных видов $y' = g(y)$ и $y' = f(x)$ (постоянство вдоль горизонталей $y = \text{const}$ или вертикалей $x = \text{const}$).

Параграф 5.1 начинается с краткого напоминания об общем дифференциальном уравнении вида $y'(x) = F(x, y)$. Отметим, что мы довольно часто (здесь и далее) меняем обозначение основной независимой переменной $t \longleftrightarrow x$. Учащиеся должны к этому привыкнуть. Поясним: когда речь идет о "чисто математическом" анализе вопроса — допустим, дифференциального уравнения, безотносительно к практической ситуации или обстоятельствам его появления как математической модели реального процесса или явления, — мы используем "безразмерные" (числовые, не именованные) переменные, чаще всего x, y. Когда же речь идет о конкретной прикладной ситуации — о процессе или о движении, — то используются размерные переменные: t — время, та или иная "буква" — числовая характеристика зависимой (от времени) переменной.

Для того, чтобы учащиеся освоились с дифференциальными уравнениями более общего вида, чем в предыдущей главе, целесообразно рассмотреть несколько примеров такого, например, типа.

[7]Мы перечисляем те, преимущественно, теоретические вопросы, которые существенны для успешного дальнейшего продвижения в данной теме, а также некоторые практические вопросы, относящиеся к важным в дальнейшем умениям и навыкам.

[8]Звездочка поставлена перед *факультативными* вопросами, в том числе теми, которые возникают сейчас, но будут повторены на следующих занятиях темы.

(1) Функция $f(x) = x^2$ удовлетворяет не только дифференциальному уравнению $y' = 2x$, но и уравнению

$$y' = \frac{2y}{x},\ x \neq 0 \qquad \left(y' = 2x = \frac{2x^2}{x} = \frac{2y}{x}\right). \tag{1}$$

Предложите указать еще какое-нибудь решение дифференциального уравнения. — В этом случае, легко увидеть (тем более, проверить), решениями будут любые функции вида $y = Ax^2$, $A = \mathrm{const} \in \mathbb{R}$. Уточним: так как $x \neq 0$, эта формула задает не одну, а две функции — одну на положительной, другую на отрицательной полуосях оси x. Объясним: дифференциальное уравнение $y' = F(x, y)$ рассматривается только в области определения правой части, т. е. в тех точках $(x; y)$ координатной плоскости Oxy, где определена функция $F(x, y)$. (В данном случае других решений, кроме указанных [считая нулевую константу: $A = 0$], уравнение (1) не имеет — это будет ясно из доказанного в следующей главе, § 4.2.)

(2) Функция $f(x) = x^{-1}$, $x \neq 0$, удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = -x^{-2}$, а это соотношение можно записать как уравнение $y' = -y^2$. В этом случае другие решения так просто не укажешь: функции вида $y = Af(x) = Ax^{-1}$ дифференциальному уравнению $y' = -y^2$ уже не удовлетворяют:

$$y' = Af' = -Ax^{-2}, \qquad -y^2 = -A^2x^{-2} = Ay' \neq y',$$

если $A \neq 1$. Другие решения можно получить, заметив, что поле направлений уравнения $y' = -y^2$ постоянно вдоль горизонталей $y = \mathrm{const}$, а в этом случае, как замечено в п. 3.1.4, "*отсюда следует, что при параллельном переносе вдоль оси Ox любая интегральная кривая переходит в интегральную кривую. Аналитически это означает, что если функция $y = y(x)$ является решением дифференциального уравнения (...), то "сдвинутая" функция $y = y(x + c)$ также будет решением уравнения (...)*". Таким образом, в этом случае другими решениями дифференциального уравнения $y' = -y^2$ будут "сдвинутые" обратные пропорциональные зависимости $y(x) = (x + c)^{-1}$. Если добавить к семействам ветвей гипербол ось абсцисс (график нулевой константы), то это будут *все* интегральные кривые соответствующего поля направлений (гл. 4, §§ 4.1–2).

Данный пример (2) можно связать как раз с рассмотрением эйлерова подхода к дифференциальным уравнениям из п. 3.1.4. *Вопрос* к учащимся (он, а точнее, ответ на него, может показаться довольно неожиданным): какие функции заведомо удовлетворяют аналогичному (отличающемуся "только" знаком правой части) дифференциальному уравнению $y' = y^2$? — *Ответ*: кроме нулевой константы, это будут функции $y(x) = -(x + c)^{-1}$ и только они. Записанное уравнение есть просто "нормированное" *уравнение квадратичного роста* или *взрыва* ($y' = \alpha y^2$) из § 4.1.

Пример (2) можно заменить следующим похожим примером, также приводящим к нелинейному уравнению вида $y' = g(y)$.

(3) Функция $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$, удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{и} \quad y' = \frac{1}{2y}. \tag{3}$$

Второму из уравнений (3) удовлетворяет функция $y(x) = -f(x) = -\sqrt{x}$, но другие функции вида $y = Af(x)$ ему не удовлетворяют. Зато, как и в примере (2), интегральными кривыми уравнения (3) будут всевозможные "сдвинутые полупараболы" — графики функций $y = \pm\sqrt{x+c}$.

Семейство всех этих интегральных кривых можно записать одним уравнением: $y^2 = x + c$ или $y^2 - x = c = \text{const}$ (при каждом значении c задаваемая этими уравнениями "горизонтальная" парабола $x = y^2 - c$ содержит две интегральные кривые — полупараболы, на которые парабола делится осью абсцисс, т. е. прямой $y = 0$). Заметим, что дифференциальное уравнение (3) может быть получено *дифференцированием* общего уравнения интегральных кривых:

$$y^2 - x = c = \text{const} \iff 2y \cdot y' - 1 = \text{const}' = 0, \qquad 2yy' = 1, \qquad y = \frac{1}{2y}$$

(так как речь о зависимости $y = y(x)$, выражение y^2 дифференцируется по правилу дифференцирования сложной функции, т. е. композиции $x \mapsto y(x) \mapsto y^2 = y^2(x)$).

В достаточно подготовленной группе учащихся и при наличии времени (вообще-то данное занятие не слишком насыщено новым материалом, так что лишнее время может найтись) можно показать общий прием выписывания дифференциального уравнения для семейства кривых, задаваемых общим уравнением вида $F(x, y) = c = \text{const}$. Для этого надо просто записать функцию $\varphi(x) = F(x, y(x)) = c$ и продифференцировать ее *как сложную функцию* и приравнять результат нулю (производной константы). Разумеется, не следует выписывать общую формулу дифференцирования функций, задаваемых подобным образом (т. е. общее "правило" с частными производными). Достаточно показать, как дифференцировать такие функции, на конкретных примерах.

1) Семейство гипербол с *асимптотами* — осями координат — записывается уравнением $xy = c = \text{const}$. Дифференцируя это равенство, получаем, что

$$(xy)' = (xy(x))' = 1 \cdot y(x) + x \cdot y'(x) = y + xy' = 0, \qquad xy' = -y, \qquad y' = -\frac{y}{x}.$$

Последнее уравнение и есть дифференциальное уравнение семейства гипербол $y = \frac{c}{x}$ (вместе с общими асимптотами $xy = 0$).

2) Уравнение семейства окружностей с центром в начале координат записывается в виде $x^2 + y^2 = c$, $c = R^2 > 0$. Дифференцируя его, находим:

$$(x^2 + y^2)' = 2x + 2y \cdot y' = 0, \qquad yy' = -x, \qquad y' = -\frac{x}{y}.$$

Легко проверить, задающие верхние и нижние полуокружности функции $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ удовлетворяют выписанному уравнению.

3) Уравнение $y^2 - x^2 = c$, $c \in \mathbb{R}$ — любое, задает семейство так называемых равнобочных гипербол с асимптотами $y = \pm x$ (они получаются при $c = 0$) и центром в начале координат. Дифференцируя, записываем дифференциальное уравнение этих гипербол:

$$(y^2 - x^2)' = 2y \cdot y' - 2x = 0, \qquad yy' = x, \qquad y' = \frac{x}{y}.$$

(Оно отличается от предыдущего только знаком правой части, но семейства интегральных кривых совсем разные.)

Рассмотрение этих и подобных примеров полезно и в качестве *не бессмысленных* упражнений на дифференцирование, и как некоторая пропедевтика материала глав 6–7.

Первые три пункта в § 5.1 в каких-то особых комментариях не нуждаются. Конечно, справка об открытии явления радиоактивности предназначена непосредственно учащимся, как и прочие подобные справки, дающиеся для ознакомления. Материал культурно-исторического характера, который полезно было бы привлечь к изложению рассматриваемого спецкурса, можно найти в учебном и методическом пособиях по элективному курсу истории школьной математики (алгебры и начал анализа).

К пункту 3.1.4 можно привязать рассмотрение приведенных выше примеров (2)–(3).

Разбирая следующий пункт, в принципе полезно сопоставить конечные суммы ньютонова ряда для экспоненты, т. е. многочлены

$$e_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!},$$

с теми многочленами, которые дает метод Эйлера (из предыдущего пункта) в случае дифференциального уравнения $y' = y$ с начальным условием $y(0) = 1$. Предложите школьникам записать приближенную формулу для значения решения в точке x для этого случая ($k = 1$, $y_0 = y(0) = 1$) и раскрыть получающееся выражение по формуле Ньютона для степени бинома. В результате получится многочлен

$$y_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{x^k}{n^k} =$$

$$= 1 + n \cdot \frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{x^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{x^3}{n^3} + ... + \frac{x^n}{n^n} =$$

$$= 1 + x + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n^n}.$$

Первые два слагаемых у него такие же $(1 + x)$, как у ньютонова ряда. Следующее слагаемое отличается множителем $1 - \frac{1}{n}$, стремящемся к 1 при $n \to \infty$. То же можно сказать и о коэффициентах при кубах x, и *при любом фиксированном* k коэффициент при x^k в многочлене $y_n(x)$ получается из соответствующего коэффициента в многочлене $e_n(x)$ домножением на число

$$\frac{C_n^k}{n^k} : \frac{1}{k!} = \frac{(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{n^{k-1}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)...\left(1 - \frac{k-1}{n}\right),$$

которое стремится к единице при $n \to \infty$.

На нашем уровне рассмотрения вопроса такое сопоставление подходов Эйлера и Ньютона показывает всего лишь их *согласованность* между собой, но не помогает продвижению "вперед", к экспоненте. Повторим: оба подхода можно довести до уровня доказательства существования соответствующих пределов и даже вывода

свойств предельной функции, но это требует кропотливой, хлопотливой и не слишком интересной возни с пределами (с различными оценками). Мы ограничиваемся только этой констатацией.

К материалу пункта 3.1.6 примыкает целый ряд вопросов о разностных уравнениях из упражнений к главе 2. По существу, это все, что относится к линейным разностным уравнениям. Очертим кратко круг вопросов, которые было бы полезно донести до учащихся.

1) Однородное линейное разностное уравнение первого порядка, $\Delta x_n = kx_n$, $k \neq 0$, переписанное как $x_{n+1} = qx_n$, есть уравнение геометрической прогрессии — его решения записываются в виде $x_n = Aq^n$.

2) Неоднородное линейное разностное уравнение первого порядка, $\Delta x_n = kx_n + b$ или $x_{n+1} = qx_n + b$, $q = 1 + k \neq 1$, задает "смешанную прогрессию", формулу для общего члена которой можно найти непосредственным суммированием. Проще, однако, заметить, что одно из решений уравнения является константой:

$$x_n = C = \text{const} \implies \Delta x_n = 0 = kC + b \iff C = -\frac{b}{k}.$$

Вычитая из уравнения $\Delta x_n = kx_n + b$ уравнение $\Delta C = kC + b$, приходим к однородному уравнению $\Delta(x_n - C) = k(x_n - C)$, откуда $x_n - C = Aq^n$, $x_n = C + Aq^n$ — получается, что смешанная прогрессия есть просто сдвинутая геометрическая прогрессия.

К этому можно прийти и иначе, переписывая неоднородное уравнение:

$$\Delta x_n = kx_n + b = k\left(x_n + \frac{b}{k}\right) = \Delta\left(x_n + \frac{b}{k}\right) \iff x_n + \frac{b}{k} = Aq^n \iff x_n = -\frac{b}{k} + Aq^n.$$

Оба способа решения неоднородного линейного *разностного* уравнения очевидным образом обобщаются на неоднородные линейные *дифференциальные* уравнения, что и делается ниже, в §3.4 (пп. 3.4.3–4). Там и следует напомнить только что рассмотренные вычисления. Мы приводим их сейчас с тем, чтобы "возврат" к разностным уравнениям сконцентрировать в одном месте — и в возможном пропедевтическом качестве.

3) Наконец, идея, которую нельзя не упомянуть, — это подстановка геометрических прогрессий в качестве возможных решений однородных линейных разностных уравнений произвольного порядка. Рассмотрим, к чему она приводит в случае *уравнения Фибоначчи* $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$. Подставляя в него геометрическую прогрессию $x_n = Aq^n$, приходим к уравнению для знаменателя прогрессии q:

$$Aq^{n+1} = Aq^n + Aq^{n-1} \iff q^2 = q + 1 \iff q^2 - q - 1 = 0 \iff q = q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Общее решение уравнения Фибоначчи записывается в виде суммы двух геометрических прогрессий: $x_n = A_1 q_1^n + A_2 q_2^n$, — откуда нетрудно вывести и *формулу Бине* для чисел Фибоначчи: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$ (см. задачи 56–57 к главе 2).

§ 3.2. Натуральный логарифм и экспонента

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
3.2.0	"Введение в параграф" (предварительные замечания)	!	
3.2.1	"Симметричное" дифференциальное уравнение	!	
3.2.2	Натуральный логарифм	!!	
3.2.3	Натуральная экспонента	!!	
3.2.4	Экспонента и показательная функция	!!	
3.2.5	Решения дифференциального уравнения $y' = ky$	$\downarrow+$	

Узловые вопросы занятия.

1. Определение натурального логарифма как решения дифференциального уравнения $y'(x) = \frac{1}{x}$.

2. Доказательство основного свойства натурального логарифма.

3. Определение натуральной экспоненты как функции, обратной к натуральному логарифму (с обоснованием).

4. Производная натуральной экспоненты.

5. Доказательство основного свойства натуральной экспоненты.

6. Определение числа e. Совпадение натуральной экспоненты и показательной функции e^x.

7. Формулы перехода к "натуральному основанию" e для произвольных показательных и логарифмических функций.

8. Теорема существования и единственности решений линейного дифференциального уравнения $y' = ky$.

Тематика этого занятия по "номенклатуре" близка к соответствующим темам основного (базисного) курса. Предполагается, что это занятие, как и вся тема 3, спланированы на изучение, *не опережающее* основной курс, поэтому материал занятия излагается столь суггестивно, концентрированно. Важно довести до понимания учащихся основную идею: *строгое* обоснование уже известных им фактов, касающихся производных показательных и логарифмических функций. Причем обоснование, опирающееся на дифференциальные уравнения.

Параграф начинается с повторения наблюдения из предыдущего параграфа (п. 3.1.4): постоянства поля направлений уравнения $y' = ky$ вдоль горизонталей $y = \mathrm{const}$. Отсюда возможность осуществить излюбленный прием математиков: сведéние задачи к предыдущей — в данном случае, к полям направлений, постоянным вдоль вертикалей и, соответственно, к дифференциальному уравнению для первообразных, подробно рассмотренному в предыдущей главе.

Наглядно-интуитивные представления, изложенные в п. 3.2.1, доводятся до написания (заметим: без строгого обоснования, которое дается уже в общем случае в главе 4) дифференциального уравнения для функции, которая (гипотетически) должна быть обратной к решению исследуемого уравнения $y' = ky$. А потом, после этих полуэвристических соображений, в п. 3.2.2 и далее следуют совсем строгие рассмотрения, последовательно приводящие к искомым результатам — в конечном

счете, к теореме существования и единственности решений линейного дифференциального уравнения $y' = ky$.

Предостережем от кажущейся легкой замены содержательно интерпретирующегося перехода от уравнения $y' = ky$ к уравнению вида $x'(y) = g(y)$ формальным переходом, который можно встретить во многих вузовских учебниках: де,

$$y' = ky, \quad \frac{dy}{dx} = ky, \quad dx = \frac{1}{k} \cdot \frac{dy}{y}, \quad x = \frac{1}{k} \int \frac{dy}{y} = \frac{1}{k} \ln y + C \quad (y > 0).$$

Без ясного представления о *формализме Лейбница*, здесь примененном, не следует (*не пристало* — математикам и в математике, по меньшей мере) его использовать. Формальное лейбницево "исчисление дифференциалов" рассматривается и ему придается обосновывающая этот формализм содержательная трактовка в следующей главе 4.

Уместно обратить внимание на замечание *Бурбаки* по данному поводу: "*...Надо признать, что понятие дифференциала, данное Лейбницем, по правде говоря, не имеет никакого смысла*". Лишь в XX в. математики придали смысл пресловутым дифференциалам, однако он весьма далек от того, чтобы быть доступным для изучения в школе.

Николя́ Бурбаки́ (**Nicolas Bourbaki**, 1935–1985) — коллективный псевдоним группы преимущественно французских крупных математиков. Бурбаки принадлежит фундаментальная концепция "*архитектуры*" современной математики, в соответствии с которой с 1939 г. стал издаваться многотомный трактат "*Начало математики*" (с 1958 г. он издается и в Москве — под названием "*Элементы математики*"). В 1985 г. было объявлено о "кончине" Бурбаки. Подробнее см. в статье: *А. Б. Сосинский*, "Умер ли Никола Бурбаки?" — сборник "*Математическое просвещение*", сер. 3, вып. 2, М., 1999 (издание МССМЕ/МЦНМО — "*Московского центра непрерывного математического образования*").

Цитируется книга: БУРБАКИ Н. Очерки по истории математики: Пер. с франц. — М.: ИЛ, 1963.

В п. 3.2.2 натуральный логарифм определяется как первообразная, или как решение соответствующего дифференциального уравнения, удовлетворяющее выбранному начальному условию. Иначе можно записать логарифм как интеграл с переменным верхним пределом, связать его с площадью криволинейной трапеции под гиперболой, но это мы опускаем, ибо, еще раз: основная опора — на дифференциальное уравнение. Связь с площадями не прибавляет какой-то "полезной" для исследования функции наглядности (и эта связь в общем случае была рассмотрена в предыдущей главе: при доказательстве *основной теоремы анализа*, или существования первообразных, где она действительно существенна).

Подобный подход: логарифм как первообразная или площадь, а потом уже экспоненты (показательные функции), — был принят в учебнике *Б. Е. Вейца* и *И. Т. Демидова* "Алгебра и начала анализа" для старших классов средней школы, использовавшемся в 1960–70 гг. Однако в большинстве учебников (для школьников) все-таки сначала вводится показательная функция, как правило, с теми или иными "допущениями" (принимаемыми без доказательств), а уже потом — логарифмическая функция. Такова традиция, восходящая, видимо, еще к знаменитым учебникам *А. П. Киселева*, и сохранившаяся в ныне действующих учебниках и учебных пособиях (в частности, в популярном курсе: *Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд.* "Алгебра и математический анализ, 10/11")

Андрей Петрович Киселев (1852–1940) — русский и советский математик-педагог и методист-писатель. Родился в Мценске, учился в Орле и на физико-математическом факультете Санкт-Петербургского университета, с 1875 г. преподавал математику, физику, черчение в гимназиях, училищах и даже в кадетском корпусе. С 1884 г. параллельно писал замечательные (во всяком случае, на уровне своего времени) учебники по элементарной математике: по арифметике (1-е изд. 1884), алгебре (1886), геометрии (1892); с 1930-х до 1970-х гг. эти учебники были основными в советской школе.

Приведем подзаголовок титула одного из учебников Киселева — "**Элементарной геометрии**" 26-го издания, 1918 г.: "**Допущена**[1] Уч. Ком. Мин. Нар. Пр. в качестве **руководства** для средних учебных заведений, мужских и женских (...[2]); **рекомендована** Учебн. Ком. при Св. Синоде для употребления в духовных семинариях в качестве учебного пособия (1893); **одобрена** Деп. Торг. и Мануф. для коммерческих училищ в качестве пособия (1898). **Рекомендована**, как **руководство** для кадетских корпусов.".

Учебники А. П. Киселева выдержали в общей сложности около 300 изданий. В 1933 г. А. П. Киселев был награжден орденом Трудового Красного Знамени. Скончался он почти в 88 лет в Ленинграде, где и был похоронен, как писатель — на "Литераторских мостках" Волкова кладбища, почти рядом с великим русским поэтом начала XX века А. А. Блоком.

При переходе от натурального логарифма к натуральной экспоненте (п. 3.2.3) стоит объяснить учащимся практическую важность основных свойств логарифма и экспоненты: их применение в вычислениях, требующих большой точности (например, при астрономических расчетах). Полезно чуть остановиться и на "дологарифмических" приемах вычислений: на так называемом *простаферетическом* методе, который использовался как греческими астрономами, так и знаменитым Тихо Браге.

Название метода происходит от греч. слов "простезис" и "афайрезис", означающих "прибавление" и "отнятие"; оно указывает на основную идею: сведение умножения к сложениям и вычитаниям — с помощью формул преобразования произведения косинусов или синусов в суммы/разности.

Пафос" п. 3.2.4 в том, что устанавливается связь показательной функции, определяемой как "естественное[3] продолжение" показательной функции рационального аргумента на всю числовую ось, и натуральной экспонентой, определяемой как функция, обратная к натуральному логарифму. Натуральная экспонента заведомо дифференцируема (просто в силу своего определения, в соответствии с теоремой о дифференцируемости обратной функции), поэтому дифференцируемы и показательные функции с произвольным основанием (при доказательстве используется формула перехода к основанию e и теорема о дифференцируемости композиции). Таким образом, вопрос о дифференцируемости показательной функции оказывается исчерпанным, а заодно получены известные формулы дифференцирования произвольных экспонент и логарифмов.

Вслед за этим в п. 3.2.5 мы возвращаемся к исходному дифференциальному уравнению и доказываем теорему существования и единственности его решений. Теорема закрепляется в нескольких простых упражнениях на отыскание решений

---

[1] Элементарная математика: арифметика, алгебра, геометрия, — *женского рода*, поэтому "*допущен***а**"!

[2] Пропущена ссылка на официальные документы.

[3] Чаще всего, просто *монотонное*.

конкретных уравнений с заданными конкретными начальными условиями.

Примечательно, что логарифмы были придуманы Непером при решении задачи, которая по сути своей, выражаясь на современном математическом языке, относится к дифференциальным уравнениям. Поскольку "неперово уравнение" имеет непосредственное отношение к рассмотренным вопросам, расскажем про него несколько подробнее.

Непер рассматривает одновременное движение двух точек, X и Y, по двум прямым из положений O и A, соответственно (рис. М-01). При этом первая точка (X) движется с постоянной скоростью v, а вторая точка (Y), проходя положение A с той же скоростью v, движется по направлению к B *замедленно* так, что ее скорость пропорциональна расстоянию до точки B. Длина отрезка AB полагается равной $r = 10^7$.

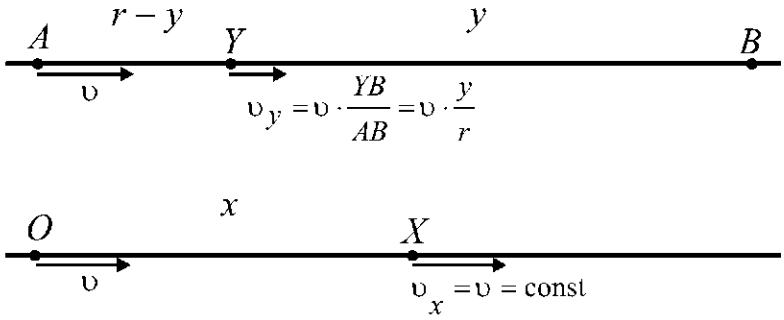

Рис.М-01

Каким-то образом Джон Непер догадался, что при рассмотрении величин $OX = x$ и $YB = y$, изменяющихся в соответствии с указанными "правилами движения", в том случае, когда значения x образуют арифметическую прогрессию $\{0, d, 2d, 3d, ...\}$, значения y составляют прогрессию геометрическую $\{r, rq, rq^2, rq^3, ...\}$ (попробуйте это доказать!).

Не будем углубляться в детали вычислений Непера (хотя они довольно интересны). Покажем только, как привлеченная им кинематическая модель описывается на принятом со времен Ньютона и Лейбница языке. Законы движения неперовых точек X и Y описываются, в современных обозначениях, дифференциальными уравнениями

$$x'(t) = v, \quad y'(t) = -\frac{vy}{r}, \tag{1}$$

причем $x(0) = 0$, $y(0) = r = 10^7$. Отсюда получаем, что зависимость y от x, или наоборот, подчиняется дифференциальному уравнению

$$y'_x(x) = -\frac{y}{r}, \quad \text{или} \quad x'_y(y) = -\frac{r}{y} \tag{2}$$

(действительно, подставляя в формулу $y = y(x)$ зависимости $x = x(t)$ и $y = y(t)$, после дифференцирования получающегося тождества $y(t) \equiv y\big(x(t)\big)$ с использованием формулы для производной композиции находим:

$$y'_t(t) = \Big(y\big(x(t)\big)\Big)'_t = y'_x\big(x(t)\big) \cdot x'_t(t) \implies y'_x = \frac{y'_t}{x'_t};$$

остается в последнюю формулу подставить выражения для производных x'_t, y'_t из уравнений (1)).

Первое из уравнений (2) — однородное линейное, а так как оно должно удовлетворять вытекающим из формул (1) начальным условиям: при $x = 0$ $y = 10^7$, — то единственное его решение задается формулой

$$y = r\mathrm{e}^{-x/r} = 10^7 \cdot \mathrm{e}^{-x/10^7},$$

или же

$$x = -r \ln \frac{y}{r} = r \ln \frac{r}{y} = r \log_{1/e}\left(\frac{y}{r}\right) = 10^7 \log_{1/e}\left(\frac{y}{10^7}\right).$$

Получается функция, *пропорциональная* (с положительным коэффициентом пропорциональности) логарифму по основанию $\frac{1}{\mathrm{e}}$, которую и табулировал Непер.

Упражнения, связанные с вычислением производных, наличествуют в основном курсе, поэтому мы ограничиваемся небольшим числом задач на отыскание пределов, фактически сводящихся к отысканию производных.

§ 3.3. Экспоненциальный рост и теоремы о сравнении

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
3.3.1	Ньютоновы "экспоненциальные" многочлены	!	
3.3.2	Как отличить экспоненциальный рост от степенного?	!	
3.3.3	Что такое экспоненциальный рост на бесконечности?	!!	У
3.3.4	Сравнение степенной и логарифмической функций при $x \to +\infty$	!!	У
3.3.5	Сравнение степенной и логарифмической функций при $x \to 0+$	!!	У

Материал этого параграфа имеет не только практический, но и как бы "философский" характер: показывается, что *возрастать* (или *убывать*) *функции могут* ***по-разному***. Так, различают экспоненциальный, степенной, логарифмический рост. Конечно, существует бесконечная градация "степеней роста" — можно предложить учашимся указать функцию, растущую на $+\infty$ быстрее, чем любая экспонента — $f(x)$ такую, что

$$\forall\, a > 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{f(x)} = 0.$$

Доказанные теоремы о сравнении нужны, например, при исследовании функций типа x^x или $x \ln x$ и построении их графиков. Предложите школьникам построить графики обеих указанных функций. Другие задачи на отыскание пределов и построения графиков см. в упражнениях.

Содержание параграфа изложено достаточно подробно и в специальных комментариях не нуждается. Укажем только, что ньютоновы многочлены рассмотрены выше, в комментариях к § 3.1. Стоит еще обратить внимание на замечание в конце п. 3.3.4 и предложить учашимся выполнить формулируемое там задание.

§ 3.4. Экспоненциальные модели

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
3.4.0	"Введение в параграф" (предварительные замечания)	!	
3.4.1	Пример: радиоактивный распад	!!	**У**
3.4.2	Пример: ядерное деление (цепная реакция)	!	
3.4.3	Неоднородное линейное дифференциальное уравнение $y' = ky + f(x)$	!!	**У**
3.4.4	Неоднородное линейное дифференциальное уравнение $y' = ky + b(\text{const})$	!!	
3.4.5	Пример: уравнение "атомного реактора"	!	

Это ключевой параграф главы: финал осуществленной программы исследований линейных математических моделей. Вместе с тем класс этих моделей расширяется — за счет *неоднородных* линейных дифференциальных уравнений первого порядка. И сразу же следует довольно эффектный пример их приложения: модель работы атомного реактора.

Из теоретических вопросов следует обратить внимание школьников на прием, которым доказывается *теорема Д'Аламбера* из п. 3.4.3. Это один из довольно общих методов решения *неоднородных линейных* задач, исходя из решения соответствующих задач *однородных линейных* — неоднородность убирается с помощью вычитания. Такой прием будет еще применяться дальше для анализа неоднородных линейных дифференциальных уравнений *второго* порядка. Школьникам же можно показать следующий пример использования той же идеи.

Допустим, нам нужно решить линейное уравнение $ax + by = c$ с целыми коэффициентами a, b, c в целых числах x, y. Если мы нашли (угадали или еще как) какое-то *частное* решение $(x_0; y_0)$ данного уравнения, то вычтем из этого уравнение соотношение $ax_0 + by_0 = c$. "Неоднородность", спрятавшаяся в коэффициенте c, пропадает, и мы получаем *однородное* линейное целочисленное уравнение, $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$. Используя соображения делимости, легко найти *общее* решение однородного уравнения. Так, если коэффициенты a и b взаимно простые (а этого всегда можно добиться: либо исходное уравнение не имеет решений вообще, либо обе его части можно сократить на наибольший общий делитель коэффициентов при x и y и считать далее коэффициенты взаимно простыми), то общее решение имеет вид $(x - x_0; y - y_0) = (bt; -at)$, где t — произвольный целочисленный параметр. И опять, как в теореме Д'Аламбера, получается, что *общее решение* исходного уравнения представляется как *сумма частного решения* этого уравнения и *общего решения соответствующего однородного уравнения*. Можно предложить школьникам решить какое-нибудь конкретное уравнение — например, $5x + 12y = 17$.

Вообще, когда *один и тот же метод*[9] успешно работает совсем в разных областях математики, это впечатляет и просто доставляет эстетическое удовлетворение — аналогично тому, как красиво выглядит, наоборот, применение многих разных методов к решению одной задачи (кстати, пример этого — в следующем пункте 3.4.4). При возможности такие ситуации стоит показывать школьникам — может быть, у них проснется или сформируется "вкус" к математике!

§ 3.5*. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
3.5.0	"Введение в параграф" (предварительные замечания)	!	
3.5.1	Метод Лагранжа: вариация произвольной постоянной	!	**У**
3.5.2	Пример: свободное движение с трением	!	
3.5.3	Пример: свободное падение с трением	!	
3.5.4	Однородные линейные ДУ с переменными коэффициентами: $y' = k(x)y$	!	**У**
3.5.5	Общие линейные ДУ с переменными коэффициентами: $y' = k(x)y + f(x)$	!	**У**

При дефиците времени этот параграф можно пропустить. Однако его материал во-первых, интересен, во вторых, содержит некоторый итог и обобщение ранее пройденного, устанавливает связь между главами 2 и 3. Речь в нем идет о решении однородных и неоднородных линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами в *квадратурах*, т. е. сведение их к вычислению интегралов. Применяется и изученный в предыдущем параграфе "метод Д'Аламбера, и изящный и более мощный метод *вариации произвольной постоянной Лагранжа*. С него параграф и начинается — в частности приводится *третий* метод (метод Лагранжа) решения дифференциального уравнения "атомного реактора" $y' = ky + b$ (вспомните наше рассуждение о красоте в математике!).

По-простому разбирается свободное движение с (вязким) трением — можно сказать, применяется метод "расцепления" дифференциального уравнения (*второго закона*) Ньютона, когда сначала отыскивается зависимость $v = v(t)$, а уже потом интегрированием решается уравнение $x' = v(t)$. Этот же метод применяется и к уравнению $z'' = -g - kz'$ свободного падения с трением ("уравнению прыжка с парашютом"). И на том же примере показан весьма красивый прием сведения задачи к *повторному дифференцированию*: запись уравнения в виде $(z' + kz)' = -g$. Это соображение пригодится во второй части пособия.

Кроме этих двух методов, к этой задаче применяется и метод Д'Аламбера, когда отыскивается частное решение сразу для уравнения второго порядка. (Опять — сплошь красота...)

[9] Напомним, что по *Пойа* "*метод — это прием, примененный дважды*"!

Комментарии и указания к упражнениям и задачам

К упражнениям и задачам к этой главе в случае необходимости даны указания и/или комментарии в самом учебном пособии. Мы же разберем **задание А**, относящееся, по сути, к п. 3.1.6.

Мотив к формулировке этого задания может быть следующим. Прогрессии $x_n = q^n$ обладают следующим свойством: при любых[10] $m, n \in \mathbb{Z}$

$$x_{m+n} = x_m \cdot x_n \tag{0}$$

или, в функциональной записи, $x(m+n) = x(m)x(n)$. Отсюда, т. е. из выписанного *функционального уравнения геометрических прогрессий*, следует, что при любом натуральном $n = 1 + 1 + ... + 1$ (n единиц) можно записать, что $x(n) = x(1)x(1)...x(1)$ (n сомножителей), так что для числа $q = x(1)$ $x(n) = x_n = q^n$. Принимая во внимание начальное условие $x_0 = x(0) = 1$, с помощью соотношения $x(n)x(-n) = x(0) = 1$ распространяем формулу $x_m = q^m$ на произвольные целые m.

Идея исследования решений дифференциального уравнения $y' = ky$ (непрерывного аналога разностного уравнения прогрессий $\Delta x_n = kx_n$; здесь и там $k \neq 0$) в том, чтобы *вывести* ***только*** *из дифференциального уравнения $y' = ky$ и начального условия $y(0) = 1$ функциональное уравнение того же вида, что и* (0): при любых $a, b \in \mathbb{R}$

$$y(a+b) = y(a)y(b),$$

— а потом установить связь между таким решением и известной нам *показательной функцией рационального аргумента*

$$x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mapsto c^x = \sqrt[n]{c^m} \quad (c > 0).$$

Таким образом, выполнение задание А разбивается на два разных этапа: на первом этапе нужно из дифференциального уравнения вывести функциональное уравнение, и здесь необходимо умение применять дифференциальное исчисление для нестандартных исследований; на втором этапе необходимо из функционального уравнения вывести сначала свойства, а затем и формулу его решения. На этом этапе собственно математический анализ не нужен, а учащимся понадобится некоторая изобретательность, "комбинаторные способности" и, возможно, просто *интуиция* (хотя рассмотрения подобного рода являются довольно типичными в алгебре и функциональном анализе). Отметим, что все осуществляемые на втором этапе рассуждения содержатся в доказательстве теоремы 3 из параграфа § 3.2 (см. п. 3.2.4). Тем не менее, ради цельности изложения, мы приведем аналогичные рассуждения и непосредственно в рассматриваемой ситуации.

Добавим, что указанные выше этапы не зависят один от другого, и их можно выделить в отдельные "подзадания". Мы их объединили с тем, чтобы в итоге результат имел, в отличие от функционального уравнения экспоненты, значимый и понятный для школьников вид.

[10] Удобно рассматривать прогрессии, пронумерованные всеми целыми числами — бесконечные "в обе стороны".

Перейдем непосредственно к реализации плана выполнения задания А, предложенного в учебном пособии.

Прежде всего, здесь и далее мы допустим (без доказательства), что дифференциальное уравнение

$$y'(x) = ky(x) \tag{1}$$

имеет *определенное на всей числовой оси* решение, удовлетворяющее в нуле *ненулевому* начальному условию: $y(0) = y_0 \neq 0$.

Шаг 1. *Докажем, что всюду определенное решение уравнения* (1) *с ненулевым начальным условием не обращается в нуль ни в какой точке числовой оси.* Иными словами, если функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяет дифференциальному уравнению (1), т. е.

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = kf(x), \tag{2}$$

причем

$$f(0) = A_0 \neq 0, \tag{3}$$

то

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f(x) \neq 0.$$

Доказательство этого основано на довольно изящном "трюке". Именно, рассмотрим функцию

$$p(x) = f(x) \cdot f(-x).$$

Ее производная, в соответствии с правилами дифференцирования произведения и сложной функции, а также с формулой (2), равна

$$p'(x) = f'(x) \cdot f(-x) + f(x) \cdot f'(-x) \cdot (-1) =$$
$$= kf(x) \cdot f(-x) - f(x) \cdot kf(-x) \equiv 0,$$

т. е. тождественно равна нулю. Следовательно, согласно *признаку постоянства функции*, рассматриваемая функция $p(x)$ постоянна — равна некоторой константе C на всей числовой оси, — а так как, согласно условию (3),

$$p(0) = f(0) \cdot f(-0) = A_0^2 \neq 0,$$

эта константа отлична от 0. Поэтому решение $f(x)$ не может обращаться в нуль ни в какой точке, что и требовалось установить.

Если по каким-то причинам школьники не знакомы с *признаком постоянства функции*, то его нужно сначала сформулировать,

если некоторая функция φ дифференцируема на (ограниченном или неограниченном) *интервале I, причем в каждой точке этого интервала производная этой функции равна нулю*: $\forall\, x \in I \;\; \varphi'(x) = 0$, *то на этом интервале функция φ постоянна*: $\forall\, a, b \in I$ $\varphi(a) = \varphi(b)$,

а затем и доказать[11]. Напомним, что для доказательства достаточно рассмотреть разность $\varphi(b) - \varphi(a)$ и применить к ней *теорему Лагранжа*: для некоторой точки c, заключенной между a и b, выполнено равенство

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c)(b - a).$$

[11] Заметим, что мы уже повторяли эту теорему в предыдущей теме: см. § 2.1.

Поскольку в данном случае производная равна нулю, $\varphi(a) = \varphi(b)$, что и требовалось доказать.

Контрольный вопрос для учащихся: существенно ли в сформулированной (и доказанной) теореме, что функция с нулевой производной рассматривается *на одном интервале*? (Нельзя ли, например, говорить о функции на ее области определения?)

Ответ: существенно. Если, например, функция имеет нулевую производную на объединении двух непересекающихся интервалов, то на каждом из них функция будет константой, но на их объединении может и не быть таковой — если константы на разных интервалах *разные.*

Шаг 2. *Докажем, что любое определенное на всей числовой оси решение $f(x)$ уравнения* (1), *удовлетворяющее ненулевому начальному условию $f(0) = A_0 \neq 0$, принимает на всей числовой оси значения одного знака.*

Это следует из доказанного на шаге 1 и из теоремы о промежуточном значении (непрерывность функции f вытекает из того, что она удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) и, следовательно, дифференцируема).

Шаг 3. *Докажем, что любое определенное на всей числовой оси решение $f(x)$ уравнения* (1), *удовлетворяющее ненулевому начальному условию, либо строго возрастает, либо строго убывает на всей числовой оси.*

Действительно, согласно дифференциальному уравнению (1), производная функции f равна $kf(x)$ и, по предыдущему следствию (шаг 2), является либо положительной, либо отрицательной на всей числовой оси, откуда (с учетом признака строгой монотонности) и вытекает сформулированное утверждение.

Шаг 4. *Докажем, что* ***общее*** (произвольное) *решение дифференциального уравнения* (1) *пропорционально любому* ***частному*** *его решению.* Иными словами, если $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, — решение дифференциального уравнения (1) с ненулевым начальным условием $f(0) = A_0 \neq 0$, то функция $y(x)$ является решением уравнения (1) *тогда и только тогда*, когда она представляется в виде

$$y(x) = Af(x) \text{ для некоторой константы } A. \tag{4}$$

Доказательство. То, что в случае выполнения уравнения (2) любая функция вида (4) удовлетворяет уравнению (1), очевидно:

$$f' = kf \implies (Af)' = Af' = A \cdot kf = k(Af), \text{ т. е. } y' = ky.$$

Докажем обратное, т. е. справедливость соотношения вида (4) для произвольного решения $y(x)$. Для этого рассмотрим частное от деления решения $y(x)$ на не обращающееся в нуль (на всей оси, согласно шагу 1) решение $f(x)$, т. е. функцию

$$q(x) = \frac{y(x)}{f(x)}.$$

Найдем ее производную. В соответствии с правилом дифференцирования частного и дифференциальным уравнением (1)

$$q'(x) = \left(\frac{y(x)}{f(x)}\right)' = \frac{y'f - yf'}{f^2} = \frac{ky \cdot f - y \cdot kf}{f^2} = \frac{k(yf - yf)}{f^2} \equiv 0,$$

откуда следует, что функция $q(x)$ постоянна (на всей числовой оси):

$$q(x) = \frac{y(x)}{f(x)} = \text{const} = A \implies y(x) = Af(x),$$

что и оставалось доказать.

Шаг 5. *Докажем, что если существует определенное на всей числовой оси и удовлетворяющее ненулевому начальному условию $f(0) = A_0 \neq 0$ решение f уравнения* (1), *то* ***существует единственное*** *его решение, удовлетворяющее* ***единичному*** *начальному условию $y(0) = 1$.*

Существование. Рассмотрим решение $y(x) = Af(x)$ и выберем константу A так, чтобы выполнялось единичное начальное условие:

$$y(0) = Af(0) = A \cdot A_0 = 1 \implies A = \frac{1}{A_0}.$$

Единственность следует из того, что, согласно доказанному на предыдущем шаге, любое решение уравнения (1) представляется в виде $y = Af$, а как мы только что видели, коэффициент A определяется однозначно.

Далее решение дифференциального уравнения (1), *удовлетворяющее единичному начальному условию, будем называть* ***базисным*** *и обозначать* $\boldsymbol{e}(x)$.

Из доказанного ранее вытекает, что *базисное решение*:

1) *однозначно определяется* соотношениями

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \boldsymbol{e}'(x) = k\boldsymbol{e}(x) \;\text{ и }\; \boldsymbol{e}(0) = 1; \tag{5}$$

2) *положительно* на всей числовой оси ($\boldsymbol{e}(0) = 1 > 0$);

3) *возрастает или убывает* в зависимости от знака коэффициента k.

Шаг 6. *Докажем* **теорему об априорной единственности решений дифференциального уравнения** $y' = ky$: *любое решение $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, дифференциального уравнения* (1) *представляется в виде*

$$y(x) = A\boldsymbol{e}(x), \tag{6}$$

где мультипликативная константа A однозначно определяется начальным условием: $A = y(0)$.

Доказательство. Представимость произвольного решения в виде (6) следует из доказанного на шаге 4, если вместо решения $f(x)$ взять базисное решение $\boldsymbol{e}(x)$. Подставляя в формулу (6) значение $x = 0$, получаем однозначную определенность константы A — учитывая условие (5), имеем:

$$y(0) = A\boldsymbol{e}(0) = A \cdot 1 = A \implies A = y(0).$$

Шаг 7. *Наконец, докажем* **основное свойство базисного решения дифференциального уравнения** $y' = ky$: *для любых значений $a, b \in \mathbb{R}$ выполняется соотношение*

$$\boldsymbol{e}(a + b) = \boldsymbol{e}(a) \cdot \boldsymbol{e}(b). \tag{7}$$

Рассмотрим функцию $y(x) = \boldsymbol{e}(x + a)$. В п. 5.1.4 с помощью геометрической интерпретации уравнения $y' = ky$ было показано, что для любого его решения $f(x)$

"сдвинутая" функция $y(x) = f(x+a)$ также является решением того же уравнения. Сейчас мы проверим это аналитически. По теореме о производной сложной функции, учитывая первое уравнение из условия (5) и то, что $(x+a)' = 1$, для функции $y(x)$ получаем:

$$y'(x) = \boldsymbol{e}'(x+a) \cdot 1 = k\boldsymbol{e}(x+a) = ky(x).$$

Следовательно, функция $y(x)$ — решение дифференциального уравнения (1) и, согласно *теореме единственности* (шаг 6), представляется в виде $y(x) = A\boldsymbol{e}(x)$, где $A = y(0)$. Но, в соответствии со второй частью определения (5),

$$A = y(0) = \boldsymbol{e}(0+a) = \boldsymbol{e}(a) \implies$$
$$\implies \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad y(x) = \boldsymbol{e}(x+a) = A\boldsymbol{e}(x) = \boldsymbol{e}(a) \cdot \boldsymbol{e}(x),$$

а это и требовалось установить (замените x на b!).

Теперь мы переходим к выводу из функционального уравнения (7) функциональных свойств базисного решения $\boldsymbol{e}(x)$. Ради удобства следующие шаги будем нумеровать римскими цифрами.

Шаг I. *Докажем, что*

$$\forall\, a \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \boldsymbol{e}(na) = \boldsymbol{e}(a)^n. \tag{8}$$

Обозначим $\boldsymbol{e}(a)$ через A. Из функционального уравнения (7) следуют равенства

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}(2a) &= \boldsymbol{e}(a+a) = \boldsymbol{e}(a) \cdot \boldsymbol{e}(a) = A^2, \\ \boldsymbol{e}(3a) &= \boldsymbol{e}(2a+a) = \boldsymbol{e}(2a) \cdot \boldsymbol{e}(a) = A^2 \cdot A = A^3, \\ \boldsymbol{e}(4a) &= \boldsymbol{e}(3a+a) = \boldsymbol{e}(3a) \cdot \boldsymbol{e}(a) = A^3 \cdot A = A^4, \end{aligned}$$

и т. д. Чтобы обойтись без слов "*и так далее*", нужно провести доказательство *методом математической индукции*.

Шаг II. *Докажем, что то же равенство справедливо для любых* ***целых*** *кратных* a:

$$\forall\, a \in \mathbb{R} \quad \forall\, m \in \mathbb{Z} \qquad \boldsymbol{e}(ma) = \boldsymbol{e}(a)^m. \tag{9}$$

Так как по определению базисного решения $\boldsymbol{e}(0) = 1$,

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \boldsymbol{e}(x) \cdot \boldsymbol{e}(-x) = \boldsymbol{e}(x + (-x)) = \boldsymbol{e}(0) = 1,$$

откуда следует, что

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \boldsymbol{e}(-x) = \frac{1}{\boldsymbol{e}(x)} = \boldsymbol{e}(x)^{-1}.$$

Это соотношение и свойство (8) дают, что для отрицательного целого $m = -n$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\boldsymbol{e}(ma) = \boldsymbol{e}(-na) = \boldsymbol{e}(na)^{-1} = (A^n)^{-1} = A^{-n} = \boldsymbol{e}(a)^m,$$

что и требовалось установить.

Шаг III. *Докажем аналогичное свойство для дробных множителей вида* $\alpha = \frac{1}{n}$:

$$\forall\, c \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\ (n \geqslant 2) \qquad \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{n}c\right) = \boldsymbol{e}(c)^{\frac{1}{n}}. \tag{10}$$

Полагая в равенстве (8) $a = \frac{c}{n}$, заключаем, что

$$\boldsymbol{e}(c) = \boldsymbol{e}(na) = \boldsymbol{e}(a)^n = \boldsymbol{e}\left(\frac{c}{n}\right)^n,$$

откуда, с учетом положительности функции $\boldsymbol{e}(x)$, имеем:

$$\boldsymbol{e}\left(\frac{c}{n}\right) = \sqrt[n]{\boldsymbol{e}(c)} = \boldsymbol{e}(c)^{\frac{1}{n}},$$

что и требовалось доказать.

Шаг IV. *Наконец, докажем аналогичное свойство для произвольных дробных* (т. е. *рациональных*) *множителей вида* $\alpha = \frac{m}{n}$:

$$\forall\, a \in \mathbb{R} \quad \forall\, m \in \mathbb{Z} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\ (n \geqslant 2) \qquad \boldsymbol{e}\left(\frac{m}{n}a\right) = \boldsymbol{e}(a)^{\frac{m}{n}}.$$

Действительно, для произвольного рационального числа $\alpha = \frac{m}{n}$ из соотношений (9) и (10) получаем:

$$\boldsymbol{e}(\alpha a) = \boldsymbol{e}\left(\frac{m}{n}a\right) = \sqrt[n]{\boldsymbol{e}(ma)} = \sqrt[n]{\boldsymbol{e}(ma)} = \sqrt[n]{\boldsymbol{e}(a)^m} = \boldsymbol{e}(a)^{\frac{m}{n}} = a^\alpha,$$

что мы и хотели установить.

Шаг V. *В заключение докажем* **теорему о значениях базисного решения в рациональных точках**: *для базисного решения* $\mathbf{e}(x)$ *дифференциального уравнения* $y' = ky$

$$\forall\, x \in \mathbb{Q} \qquad \boldsymbol{e}(x) = c^x, \ \text{ где } \ c = \boldsymbol{e}(1).$$

Доказательство. Для произвольного рационального числа $x = \dfrac{m}{n}$ из соотношения, доказанного на предыдущем шаге, получаем:

$$\boldsymbol{e}(x) = \boldsymbol{e}(1)^{\frac{m}{n}} = c^x,$$

что и требовалось установить.

Итак, исходя только из линейного дифференциального уравнения $y' = ky$, выведено, что его решение $\boldsymbol{e}(x)$, удовлетворяющее единичному начальному условию $\boldsymbol{e}(0) = 1$, при всех рациональных значениях x совпадает с показательной функцией $x \mapsto c^x$ рационального аргумента, где число c (основание) равно $\boldsymbol{e}(1)$. Отсюда следует, что и произвольное решение $y(x)$ того же уравнения при рациональных значениях x совпадает с функцией Ac^x, где $A = y(0)$ (см. шаг 6).

Далее можно идти по такому пути: определить *показательную функцию произвольного действительного аргумента* $x \mapsto c^x$ как определенную на всей числовой оси строго монотонную (возрастающую при $c > 1$ и убывающую при $0 < c < 1$)

функцию, при всех рациональных значениях x совпадающую с показательной функцией рационального аргумента. Так и вводится эта функция, скажем, в общеобразовательном курсе "Алгебры и начал анализа", изложенной в учебнике под ред. А. Н. Колмогорова. Можно доказать, что указанными требованиями функция $x \in \mathbb{R} \mapsto c^x$ однозначно определяется, т. е. удовлетворяющая этим требованиям функция *существует*, причем *только одна* (это так называемая *теорема существования и единственности*, в данном случае, показательной функции; в общеобразовательном курсе эта теорема принимается без доказательства).

Если вернуться потом к дифференциальному уравнению, то для строгого описания его решений через показательные функции потребуется доказать *дифференцируемость* функции c^x, а это не так просто. В упомянутом курсе *без доказательства* принимается некоторое предположение[12], из которого выводятся все "нужные" свойства показательных функций.

Мы пойдем иным путем, доказывая все утверждения, необходимые для полного исследования линейного дифференциального уравнения. Этот путь последовательно изложен в § 5.2.

Дополнительные задания по тематике задания А относятся к функциональным уравнениям. Мы приведем их вместе с пошаговыми планами выполнения, которые, при необходимости, можно перевести в форму циклов "наводящих вопросов" (начинающихся с приведенных "предварительных вопросов").

Задание А1. Найдите все *всюду определенные и непрерывные* решения функционального уравнения $(*)$ $f(a+b) = f(a) + f(b)$.

Предварительные вопросы: нельзя ли найти значение $f(0)$? Как можно записать значения $f(2)$? $f(-1)$? $f(17)$?

А1-01 Докажите, что всегда $f(0) = 0$.

А1-02 Докажите, что при любом значении x $f(-x) = -f(x)$.

А1-03 Докажите, что для любого натурального n при любом значении x $f(nx) = nf(x)$.

А1-04 Докажите, что для любого *целого* m при любом значении x $f(mx) = mf(x)$.

А1-05 Докажите, что для любого *рационального числа* $\alpha = \frac{m}{n}$ при любом значении x $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

А1-06 Докажите, что для некоторого числа $k \in \mathbb{R}$ при любом *рациональном значении* x $f(x) = kx$.

А1-07 Докажите, что если решение f *непрерывно в точке* $x = 0$, то оно *непрерывно на всей числовой оси* $\mathbb{R}$.

А1-08 Докажите, что если решение f *дифференцируемо в точке* $x = 0$, то оно *дифференцируемо на всей числовой оси* $\mathbb{R}$, причем при любом x $f'(x) = k$, где k — производная f в нуле.

Указание к пп. 07–08. Рассмотрите разность $f(x+h) - f(x)$.

[12]Именно, допускается существование такого основания $c = e$, что функция $\varepsilon(x) = e^x$ дифференцируема при $x = 0$, причем $\varepsilon'(0) = 1$.

A1-09 Докажите, что *любое монотонное решение f функционального уравнения* $(*)$ *представляется в виде* $f(x) = kx$, *где* $k = f(1)$ (подразумевается *нестрогая* монотонность).

A1-10 Докажите, что если решение f *ограничено в некоторой окрестности* $(-\varepsilon, \varepsilon)$ *точки* $x = 0$, то оно *непрерывно в нуле* (а значит, согласно п. 07, и *на всей числовой оси*).

A1-11 Докажите, что если решение f *непрерывно*, то оно *дифференцируемо* (*в нуле* или *на всей числовой оси* — из пп. 07–08 следует, что *это всё равно*).

A1-12 Докажите, что *любое непрерывное решение f функционального уравнения* $(*)$ *представляется в виде* $f(x) = kx$, *где* $k = f(1)$ (или $k = f'(0)$).

Тем самым задание A1 выполнено: всюду определенными и непрерывными решениями рассматриваемого функционального уравнения будут функции $f(x) = kx$ и только они.

Задание A2 относится к *нетривиальным*, т. е. отличным от тождественного нуля, решениям функционального уравнения

$$f(ab) = f(a)f(b), \qquad (**)$$

рассматриваемого *только на положительной полуоси*. Как будет ясно из главы 4 учебного пособия (из результатов и методов § 4.2), *дифференцируемые* решения этого функционального уравнения суть степенные функции $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ — любое, и только они. Этот же факт можно вывести из того, что, если рассмотреть функцию $\varphi(x) = \ln f(e^x)$, $x \in \mathbb{R}$, то она будет удовлетворять функциональному уравнению из задания A1. Провести эту редукцию можно после изучения материала следующего параграфа. Пока же задание состоит в установлении ряда свойств решений функционального уравнения $(**)$.

Предварительный вопрос: нельзя ли найти значение $f(1)$?

A2-01 Докажите, что функции 1, x, x^2, x^3, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$ являются решениями функционального уравнения $(**)$ (при $x > 0$).

A2-02 Докажите, что если решение f уравнения $(**)$ в какой-то точке $x_0 > 0$ обращается в нуль, то оно *тождественно равно нулю* (*на положительной полуоси*).

Комментарий. Поскольку мы рассматриваем только *нетривиальные*, т. е. *отличные от тождественного нуля*, решения, то впредь можно считать, что все упоминаемые далее решения функционального уравнения $(**)$ вообще не обращаются в нуль (на положительной полуоси).

A2-03 Докажите, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ — решения функционального уравнения $(**)$, то функции

$$p(x) = f(x)g(x), \quad q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

также являются решениями этого уравнения.

A2-04 Докажите, что любое решение f принимает только положительные значения: $\forall\, x > 0 \;\; f(x) > 0$.

А2-05 Докажите, что если функции f и g являются решениями функционального уравнения $(**)$, то их композиция $h = g \circ f$ также есть решение этого уравнения $\big(h(x) = g(f(x))\big)$.

А2-06 Докажите, что всегда (*для любого решения*) $f(1) = 1$.

В нижеследующих пунктах задания функция f есть любое (нетривиальное) решение функционального уравнения $(**)$.

А2-07 Докажите, что при любом значении $x > 0$ $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{f(x)}$.

А2-08 Докажите, что для любого натурального n при любом значении $x > 0$ $f(x^n) = \big(f(x)\big)^n$.

А2-09 Докажите, что для любого *целого* m при любом значении $x > 0$ $f(x^m) = \big(f(x)\big)^m$.

А2-10 Докажите, что для любого натурального $n \geqslant 2$ при любом значении $x > 0$ $f(\sqrt[n]{x}) = \sqrt[n]{f(x)}$.

А2-11 Докажите, что для любого *рационального числа* $\alpha = \frac{m}{n}$ при любом значении $x > 0$ $f(x^\alpha) = \big(f(x)\big)^\alpha$.

А2-12 Докажите, что если решение f *непрерывно в точке* $x = 1$, то оно *непрерывно на всей полуоси* $(0, +\infty)$.

А2-13 Докажите, что если решение f *дифференцируемо в точке* $x = 1$, то оно *дифференцируемо на всей положительной полуоси*, причем $f'(x) = k\dfrac{f(x)}{x}$ при любом $x > 0$, где $k = f'(1)$.

Указание к пп. 12–13. Рассмотрите разность $f(x+h) - f(x)$ и замените $x + h$ на произведение $x \cdot \left(1 + \dfrac{h}{x}\right)$.

А2-14 Докажите, что функции: $\operatorname{sgn} x$, x, $|x|$, x^2, $x|x|$, $\sqrt{|x|}$, $h(x) = \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и $h = 0$ при $x = 0$, — являются решениями функционального уравнения $(**)$ *на всей числовой оси* $\mathbb{R}$.

Тема 4. МОДЕЛИ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ (глава 4; 8 ч)

Общие замечания и рекомендации по теме 4

Эта тема — единственная в основном модуле (в части I), в которой существенно расширяется материал основного/профильного курсов. И это первый выход на неочевидные приложения методов математического анализа.

Для темы существенна опора на наглядные образы, частично затронутые ранее. Речь идет не о тривиальной наглядности, а об образах довольно значительной степени абстрактности. Это, во-первых, *поля направлений* и появляющиеся в § 4.3 *векторные поля*; во-вторых, *интегральные кривые* этих полей и *фазовые портреты* в целом (картинки, показывающие поведение всего семейства интегральных кривых). Из новых наглядно-образных понятий укажем на *особые точки* фазовых портретов, получающиеся как из решений неавтономных уравнений с разделяющимися переменными, так и при анализе автономных систем дифференциальных уравнений на плоскости.

Напомним, что *автономность* для дифференциальных уравнений с независимой переменной t, обычно трактуемой как время, означает независимость — или отсутствие *явной* зависимости — правых частей уравнений от этой переменной (вспомните слова В. И. Арнольда — *от времени законы природы не зависят*!).

Наглядная интерпретация выходит на первый план уже при рассмотрении эволюционных уравнений вида $y' = g(y)$: соображения инвариантности соответствующих полей направлений вдоль горизонталей приводит к, в принципе, уже знакомой по главе 3 идее симметричного отражения таких полей относительно биссектрисы $y = x$ первого и третьего координатных углов. Получаются поля, инвариантные вдоль вертикалей, и мы возвращаемся в "лоно" интегрального исчисления, в рамки основной программы.

Этот наглядный и плодотворный переход сразу оформляется в духе Лейбница, а в параграфе 4.2 подробно анализируется вопрос о возможностях лейбницева формализма, появляется целый новый класс уравнений, разрешимых в *квадратурах*, т. е. сводящихся к интегралам (*неопределенным* или *определенным*, в духе записываемых в формулах *Барроу*).

Далее следуют автономные векторные дифференциальные уравнения на плоскости (§ 4.3), их сведение к обычным, но неавтономным дифференциальным уравнениям с помощью формализма Лейбница (обратим *особое* внимание на то, что *формальное* манипулирование с уравнениями у нас во всех случаях поддерживается *строгим* математическим обоснованием) и, наконец, "венец" главы и всего основного модуля: анализ биологической модели *Вольтерры–Лотки*.

После этой темы учитель и должен подумать и, возможно, посоветоваться со школьниками (и с опытными коллегами) относительно того, в каком направлении двигаться дальше: то ли изучать (интереснейший, но местами довольно изощренный и требующий большого внимания и интеллектуальных усилий[13]) дополнительный модуль (часть II), то ли углубиться в решение и разбор задач к главам пройденной части (среди них тоже много чего интересного есть), то ли ... завершить данный элективный курс. Выбор за вами.

[13]Это, конечно *не* недостаток — "*Это даже хорошо...*", как пели герои "Айболита 66"!

§ 4.1. Анализ эволюционного уравнения $y' = g(y)$. Примеры

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
3.1.0	"Введение в параграф" (предварительные замечания)	!	
4.1.1	Поля направлений уравнения $y' = g(y)$ и симметричные им	!!	**У**
4.1.2	Примеры: линейные уравнения $y' = ky\,[+b]$	!+	
4.1.3	Теоремы о решениях уравнения $y' = g(y)$. Стационарные решения	!!	
4.1.4	Автономные уравнения как модели эволюции (напоминание)	!	
4.1.5	Пример: уравнение взрыва $y' = \alpha y^2$	!!	
4.1.6	Пример: логистическое уравнение $y' = y(a - y)$	!+	
4.1.7*	Пример неединственности решений уравнения $y' = g(y)$	!+	*

После короткого введения в п. 4.1.1 напоминается существенная конструкция перехода от поля направлений автономного дифференциального уравнения $y' = g(y)$ к симметричному полю направлений, та самая, которая помогла при анализе линейного уравнения $y' = ky$ в § 3.2. И сразу записывается фактически *схема разделения переменных.* Примеры из следующего пункта можно дать конспективно или оставить для самостоятельного разбора.

Пункт 4.1.3 очень важен с математической точки зрения — в нем обосновывается выписанная схема интегрирования переходом к "симметричному" дифференциальному уравнению и выводятся две теоремы существования и единственности для автономных уравнений. Также вводится важное понятие *стационарного* решения, устойчивого или неустойчивого (или, в принципе, "никакого"). В следующем пункте приводится важная трактовка автономного уравнения с помощью "поля скоростей" на прямой, а стационарные решения связываются с положениями равновесия моделируемой системы. Приводится интуитивно ясный (из соображений линейного приближения в окрестности — вот опять понадобилось это важнейшее понятие, обсужденное в § 1.1) *критерий устойчивости/неустойчивости* положения равновесия.

Пример (уравнение взрыва) из п. 4.1.5 стоит подробно разобрать, а логистическое уравнение (п. 4.1.6) качественно прокомментировать, оставив для самостоятельного разбора. Отметим, что *разностный аналог* логистического уравнения (модели Ферхюльста) есть "*уравнение Фейгенбаума*" $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$, обнаруживающее очень своеобразное поведение: *стохастизацию*, или постепенный, через удвоение периода решений, переход к хаотическому поведению решений при изменении параметра системы λ. Это тот самый переход "от порядка к хаосу" и обратно, который изучает *синергетика* — наука, за разработку коей бельгийский физик-теоретик (с российскими корнями) *Илья Пригожин* получил Нобелевскую

премию. Эффект удвоения периода и стохастизации можно вполне ясно объяснить и школьникам, но, к сожалению, это не вмещается в рамки курса **МА**.

Пример *неединственности* решения автономного уравнения при данном начальном условии из последнего пункта имеет отчасти мировоззренческое значение: он опровергает "веру физиков", что, например, в классической механике *будущее однозначно определяется настоящим.* Этот пункт можно оставить для самостоятельного разбора.

§ 4.2. Формализм Лейбница и уравнения с разделяющимися переменными

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
4.2.0	"Введение в параграф" (предварительные замечания)	!	
4.2.1	Формальное интегрирование уравнения $y' = g(y)$	!!+	
4.2.2	Разделение переменных и формализм Лейбница	!!	**У**
4.2.3	Теоремы об уравнениях с разделяющимися переменными	!!	
4.2.4	Особые точки дифференциальных уравнений	!+	
4.2.5	Разделение переменных в линейных уравнениях $y' = k(x)y\,[+f(x)]$	!	

Это очень важный параграф — "технологически", т. е. с точки зрения "техники формальных математических преобразований", манипуляций с дифференциальными уравнениями некоторых видов, приводящих к искомому и *верному* результату. Придумавший эту технику *Готфрид Вильгельм Лейбниц* (мы ее и называем "формализмом Лейбница") полагал ее составной частью "универсального символического языка", который он хотел распространить на обширные области, включая философию и этику. Наша задача в этом параграфе — не только описать формализм Лейбница, но дать строгое математическое обоснование его применения в рассматриваемых случаях.

В п. 4.2.1 подробно разобъясняется, в чем, собственно, состоит формализм Лагранжа и почему он называется формализмом. Объясняется, что такое *неопределенный интеграл* и на примере автономного уравнения $y' = g(y)$ показывается, как придавать содержательный смысл формальным преобразованиям. Это существенный пункт, но его достаточно, на наш взгляд, только прокомментировать.

В п. 4.2.2 излагается техника решений уравнений с разделяющимися переменными, в следующем пункте она обосновывается. Это два центральных пункта параграфа. Специальное внимание нужно обратить на разбор примеров — построение *фазовых портретов* дифференциальных уравнений вида $y' = F(x, y)$ на *расширенной фазовой плоскости* Oxy, в двух из которых в первый раз появляются *особые точки* из числа основных *типов* — гиперболическое "седло" и эллиптический "центр". А после обоснования метода Лейбница решения уравнений с разделяющимися переменными (который, в других обозначениях, был известен еще *Барроу*) еще раз подробно объясняется, почему мы его называем *формализмом.*

В проходном п. 4.2.4, который вполне можно оставить для самостоятельного разбора, приводится пример особой точки еще одного типа: "узел". То же относится и к последнему пункту, в котором снимается некий "флер таинственности" с методов, применявшихся в (факультативном) параграфе 3.5.

§ 4.3. Дифференциальные уравнения на плоскости

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
4.3.0	"Введение в параграф" (предварительные замечания)	!	
4.3.1	Уравнения на плоскости, векторные поля, фазовые портреты	!!	
4.3.2	Фазовые портреты и особые точки: "узлы" и "седла"	!!	
4.3.3*	Дальнейшие примеры: еще "седла" и "центры"	!+	*

Здесь мы возвращаемся к исследованию дифференциальных математических моделей эволюционирующих систем, описываемых *двумя* параметрами, затронутому во вводном параграфе 1.1. По традиции эти модели называются *дифференциальными уравнениями на плоскости*, в координатной записи выглядящие как *системы* дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями. Полезно напомнить (см. § 1.2), что и дифференциальное уравнение Ньютона (второй закон, $x'' = F(x, x')$) сводится к такой же системе или уравнению на *фазовой* плоскости Oxv — это обстоятельство будет играть решающую роль в следующей главе. Конечно, внимание сосредоточено на *автономных* дифференциальных уравнениях на плоскости.

Содержание параграфа почти чисто математическое (с многочисленными культурно-историческими примечаниями). В п. 4.3.1 вводятся основные понятия: *векторное* поле, интегральная кривая ("линия тока"), фазовый портрет. Приводится удобная *векторная* запись уравнений.

В п. 4.3.2 вводится понятие особой точки для рассматриваемых уравнений на плоскости и анализируется несколько простых примеров, в факультативном последнем пункте примеры более изысканные. На этих примерах мы волей-неволей убеждаемся в связи рассмотренных уравнений на плоскости с неавтономными уравнения вида $y'(x) = F(x, y)$ с разделяющимися переменными — тем самым проводится пропедевтическая подготовка идеи применить к векторным уравнениям тот же *формализм Лейбница*.

§ 4.4. Интегрируемые системы. Модель биоценоза "хищник–жертва"

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
4.4.1	Формализм Лейбница для систем на плоскости	!!	
4.4.2	Теорема о решениях: обоснование формализма Лейбница	!!	
4.4.3	Схема Лейбница отыскания решений систем на плоскости	!!	
4.4.4	Разделение переменных в системах на плоскости	!!	
4.4.5	Качественный анализ модели Вольтерры–Лотки	!!	
4.4.6	Интегрирование системы Вольтерры–Лотки	!!	

Основная цель этого параграфа — показать простейшую, но не тривиальную модель сожития и взаимовлияния *двух* популяций. Это упоминавшаяся во вводном § 1.1 *модель Вольтерры–Лотки* биоценоза типа "хищник–жертва" (щуки и караси, или волки и зайцы...). Успешность качественного исследования этой модели обусловлена возможностью применить к ней метод разделения переменных — так уж получается.

В первых трех пунктах подробно рассматривается и обосновывается применение формализма Лейбница в общем случае систем уравнений на плоскости: сведение автономной такой системы к неавтономному уравнению вида $y' = F(x, y)$. В п. 4.4.4 указывается на простое наблюдение, с помощью которого система на плоскости сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Пункт 4.4.5, непосредственно примыкая к вводному параграфу 1.1 (п. 1.1.8), содержит весьма грубое качественное исследование системы Вольтерры-Лотки — оно не позволяет заключить, будет ли положение равновесия (особая точка системы) устойчивым или нет. Однако непосредственное интегрирование системы методом разделения переменных позволяет найти *первый интеграл* (закон сохранения) для рассматриваемой системы, из явного вида которого мы делаем вывод о *замкнутости*, периодичности траекторий. Так что особая точка будет типа "центр" и устойчива *по Ляпунову*. Явный вид зависимости численностей двух популяций от времени найти в элементарных функциях не удастся, но вывод о периодичности процесса указывает на *цикличность* поведения биоценоза типа "хищник–жертва". Эта картинка (фазовый портрет: овалы вокруг особой точки) показывает, что нарушение биоценоза может привести как к стабилизации (стремлению решений к стационарному), так и десталибизации системы ("раскручиванию" решений *от* стационарного).

Можно всю "теоретическую" часть (пп. 4.4.1–4) изложить на конкретном примере модели Вольтерры-Лотки. Но тогда возникает опасность того, что школьники не поймут суть идеи разделения переменных для дифференциальных уравнений на плоскости. Можно, напротив, предельно четко и ясно изложить "теорию", а пример дать конспективно, оставив его для самостоятельного разбора. Так или иначе, этот параграф завершает изучение основного модуля элективного курса, так что завершение должно быть достойным[14]!

[14] В знак этого все пункты параграфа помечены *двумя* восклицательными знаками!!

Часть II. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Тема 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ НЬЮТОНА $x'' = F$ (глава 5; 16 ч)

Общие замечания и рекомендации по теме 5

Эта самая обширная во всем элективном курсе **МА** тема относится по своему содержанию к тому разделу математики и математического анализа, который называется *классической механикой*. Поэтому в ней, кроме связей с курсом анализа и предыдущей частью электива **МА**, можно проследить прочные связи и с школьным или углубленным курсом физики, конкретно, механики. Точка зрения на теоретическую классическую механику как на раздел математики общепринята. А причина этого в весьма высокой степени абстракции в этой науке — начиная со столь неуловимого понятия, как *материальная точка* (меньше атома!). Кстати сказать, *масса* ее (тоже абстракция!) у нас большей частью будет приниматься равной 1.

Основной объект исследования в теме — дифференциальное уравнение (второй закон) Ньютона при движении по прямой в заданном силовом поле, $x'' = F = F(x, x', t)$, или соответствующей системы дифференциальных уравнений Ньютона, $x' = v$, $v' = F$.

Если система, как говорят, *консервативная*, т. е. $F = F(x)$ (сила определяется только положением точки и не зависит ни от скорости, ни от времени), то в системе уравнений Ньютона переменные разделяются и мы находим ее *первый интеграл*, т. е. закон сохранения некоторой величины, $\frac{1}{2}v^2 + U(x) = E(x, v, U' = -F(x)$, которую принято называть *энергией*. Почему, какова связь этого понятия с понятием *работы* (*против* переменной силы) — все это обсуждается в § 5.1.

Отметим, что в этом параграфе в целом пункте 5.1.5 рассматривается "*культурно-исторический дискурс*" предмета, обсуждается история дифференциальных уравнений (нельзя сказать, что такого нет в других параграфах учебного пособия, но в них такой дискурс находится как бы на заднем плане, в рамках комментариев и примечаний к математическому тексту).

В § 5.2 показано, как, используя закон сохранения полной механической энергии использовать для интегрирования дифференциального уравнения Ньютона, его решения $t = t(x; C, h)$ в квадратурах с последующим "алгебраическим" разрешением уравнения относительно x, т. е., в принципе, отысканием возможных *законов движения* $x = x(t) = x(t; C, h)$. Реально такая программа осуществима лишь в некоторых частных случаях. Они продемонстрированы далее на примерах *гармонического осциллятора* (§ 5.3) и движения под действием *линейной отталкивающей силы* (§ 5.6).

На самом деле закон сохранения энергии, точнее, его интерпретация, помогает понять характер фазовых траекторий на основе сопоставления исследуемой системы с моделью "шарик в желобе" из вводного параграфа § 1.2. Достаточно представить себе катание шарика в желобе, "рельеф" или "профиль" которого имеет форму графика *потенциальной энергии* $u = U(x)$. Здесь у вас появятся и *потенциальные ямы*, и, наоборот, "*потенциальные горки*", и устойчивые и неустойчивые

положения равновесия (на дне ямки или на вершине горки, или на месте "маленького горизонтального плато" на склоне ямки или горки!).

Посвященный гармоническим колебаниям § 5.3 содержит, кроме всего прочего, начатое еще в § 1.2 — кинематическим выводом формул для производной косинуса и синуса, — приложение дифференциального уравнения к прочим свойствам тригонометрических функций.

Простой и интересный § 5.4 содержит все или почти все, относящееся к сложению когерентных гармонических колебаний — от трехфазной системы токов до интерференции волн. Не менее интересный, но чуть более сложный § 5.5 посвящен точному анализу вынужденных колебаний (под воздействием гармонической "накачки", т. е. внешней вынуждающей силы). Предсказываются и анализируются явления резонанса и биений.

Как в § 5.3 движение под воздействующей притягивающей линейной (упругой или псевдоупругой) силы связано с *круговыми*, т. е. тригонометрическими функциями, так в следующем § 5.6 движение в отталкивающем линейном поле связывается с функциями *гиперболическими*. Кроме того, что эти функции связаны с движением и во многом сходны с круговыми, мы полагаем, что гиперболические функции должен знать всякий математически грамотный и культурный школьник.

В § 5.7 разбираются решения обобщения эллиптического $x'' = -\omega^2 x$ и гиперболического $x'' = \lambda^2 x$ уравнений второго порядка: однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, $x'' + px' + qx = 0$. Отыскиваются его экспоненциальные решения, коли они существуют; доказывается теорема единственности решений в случае положительности дискриминанта характеристического уравнения. Приводимое элементарное доказательство "методом сведения к повторному дифференцированию" с использованием теоремы Виета предложил около 1980 г. известный методист и автор одного из действующих учебников по алгебре и началам анализа (под ред. А. Н. Колмогорова) *Борис Михайлович Ивлев* (1946–1990). В случае отрицательного дискриминанта, разбираемом уже в следующем параграфе, мы как бы угадываем решение (или "подгоняем под ответ"); единственность в этом случае следует из результатов упражнений к главе (105(3) и 106)

И в финальном параграфе 5.8 рассматриваются довольно тонкие вопросы, связанные с колебаниями гармонического осциллятора, помещенного в вязкую среду, в том числе (факультативно) с вынужденными колебаниями в такой среде, когда возникает не идеальный, как в § 5.5, а реальный резонанс.

§ 5.1. Закон сохранения энергии

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
5.1.0	"Введение в параграф" (предварительные замечания)	!	
5.1.1	Энергия как первый интеграл одномерной системы Ньютона	!!	
5.1.2	Работа переменной силы	!!	**У**
5.1.3	Потенциальная энергия одномерного силового поля	!!	
5.1.4	Закон сохранения полной механической энергии	!!	
5.1.5	История дифференциальных уравнений	!+	

Начальный параграф главы нужно начать "за здравие", тем более, что содержание параграфа позволяет это сделать — оно не просто интересное, оно "захватывающее", — конечно, если его и подать адекватным образом.

В пункте 5.1.1 с помощью формализма Лейбница получается *закон сохранения энергии* (иногда в книжках по механике этот закон просто выписывается и затем проверяется — при этом непонятно, откуда и как берется формула для энергии; у нас формула получается *автоматически* и неизбежно).

В следующих двух пунктах объясняется, что такое *работа против силы*, и показывается, что она равна приращению потенциальной энергии. Разбираются простейшие примеры. В п. 5.1.4 как раз проверяется закон сохранения энергии (как то было упомянуто выше; обратим внимание, что это, вообще-то, излишне, если мы верим в формализм Лейбница из п. 5.1.1 — а мы верим, ибо в главе 4 его обосновали — как раз в таких случаях).

Что касается культурно-исторического дискурса — исторического очерка из п. 5.1.5, — то его лучше всего кратко прокомментировать и оставить школьникам для самостоятельного прочтения.

§ 5.2. Фазовые портреты и интегрирование уравнения Ньютона

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
5.2.0	"Введение в параграф" (предварительные замечания)	!	
5.2.1	Фазовые траектории и линии уровня энергии на фазовой плоскости	!!	
5.2.2	Скорость убегания и вторая космическая скорость	!+	**У**
5.2.3	Схема интегрирования уравнения Ньютона	!	*
5.2.4	Обоснование схемы интегрирования уравнения Ньютона	!	*
5.2.5	О разрешимости и свойствах решений уравнения Ньютона	!	
5.2.6	Наглядная интерпретация одномерных консервативных систем	!!	

О фазовых портретах уже была речь во вводном параграфе 1.2, и в пункте 5.2.1 это понятие повторяется и связывается с картинкой *линий уровня* полной механической энергии. Как пример, в п. 5.2.2 приводится портрет движения по

лучу притягиваемой по закону всемирного тяготения материальной точки. В связи с этим примером выводится формула для скорости убегания.

Материал следующих двух пунктах довольно громоздкий, соответственно чему помечен звездочкой. Школьникам заведомо нужно показать основной шаг в решении, в смысле сведения к паре интегрируемых в квадратурах уравнений, дифференциального уравнения Ньютона:

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = h \iff (x')^2 = \frac{2}{m}\big(h - U(x)\big) \iff x' = \pm\alpha\sqrt{h - U(x)}.$$

Пункт 5.2.5, скорее всего, факультативен — пропустив его, стоит вернуться к наглядной интерпретации решений уравнений Ньютона с помощью модели "шарик в желобе" из п. 5.2.6 (однако, не вдаваясь в тонкости насчет обобщенной координаты!). С этой интерпретацией как раз можно и связать материал пп. 5.2.3–5.

§ 5.3. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний $x'' = -\omega^2 x$

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
5.3.0	"Введение в параграф" (предварительные замечания)	!	
5.3.1	Математический маятник: малые колебания	!	
5.3.2	Фазовый портрет гармонического осциллятора	!!	
5.3.3	Решения уравнения гармонических колебаний. Теорема единственности	!!	**У**
5.3.4	Следствия из теоремы единственности: свойства косинуса и синуса	!+	
5.3.5	Дальнейшие следствия: формула вспомогательного аргумента	!!	
5.3.6	Канонический вид и параметры гармонических колебаний	!!	**У**
5.3.7*	Интегрирование дифференциального уравнения гармонических колебаний	~	**Ф**

Это первый из трех интереснейших параграфов (§§ 5.3–5), посвященных гармоническим и вынужденным колебаниям в идеальной среде — при отсутствии трения.

Первые два пункта достаточно прозрачны и в особых комментариях не нуждаются. В весьма содержательном п. 5.3.3 изящно, с использованием как раз закона сохранения энергии доказывается теорема единственности решений дифференциального уравнения $x'' = -\omega^2 x$ в смысле представимости любого его решения в *стандартном виде* $x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$.

Большой интерес обычно вызывают у школьников следующие два пункта, в которых теорема единственности используется для вывода тригонометрический формул (тождеств). В частности, в п. 5.3.5 обсуждается весьма полезная *формула*

вспомогательного аргумента, в следующем пункте трактуемая как *канонический вид* гармонических колебаний $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$. В связи с ним вводится, по-видимому, уже известная школьникам (из курса физики) терминология: частота (циклическая!), амплитуда, фаза (аргумент $\omega t + \varphi$) и начальная фаза φ.

В заключение, в факультативном пункте 5.3.7, показано, как придти к закону гармонических колебаний *непосредственным* интегрированием дифференциального уравнения Ньютона.

§ 5.4. Сложение гармонических колебаний

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
5.4.1	Теорема о сложении гармонических колебаний	!!	
5.4.2	Векторные диаграммы гармонических колебаний	!!	
5.4.3	Пример: трехфазная система токов	!+	
5.4.4	Амплитуда суммы гармонических колебаний	!!	

В первых двух пунктах даны *три* доказательства того факта, что сумма когерентных гармонических колебаний является также гармоническим колебанием той же частоты, причем все три рассуждения весьма красивы (это уже красота вдвойне; см. выше комментарии к § 3.4). Третье доказательство опирается на весьма наглядное представление гармонических колебаний с помощью *векторных диаграмм*.

Эти же диаграммы ведут к замечательному примеру из п. 5.4.3: к изобретенной русским инженером *Михаилом Иосифовичем Доливо-Добровольским* трехфазной системе токов.

С помощью векторных диаграмм становится очевидным, что синфазные колебания максимально усиливают друг друга, а колебания в противофазе — максимально ослабляют друг друга (п. 5.4.4). Эти соображения будут существенно использоваться в следующей главе.

§ 5.5. Вынужденные колебания, резонанс и биения

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
5.5.1	Уравнение вынужденных колебаний и его решения	!!	
5.5.2	Анализ решений: резонанс и дрожание	!!	
5.5.3	Анализ решений: резонансное раскачивание и биения	!!	
5.5.4	Точный резонанс	!	

В этом параграфе рассматривается, что получится, когда на собственные колебания под действием упругой силы с т. н. *собственной* циклической частотой ω воздействует внешняя вынуждающая сила (физики подобный внешний воздействующий фактор называют "накачкой"; мы уже встречались с такой накачкой из внешнего источника нейтронов при разборе модели атомного реактора в § 3.4), причем тоже меняющейся гармонически с какой-то "внешней" частотой ν, вообще

говоря, отличной от ω. Уравнение вынужденных колебаний — это неоднородное линейное уравнение второго порядка, и к его решению применим известный нам из § 3.4 *метод Д'Аламбера*, что и делается в п. 5.5.1.

В результате при $\nu \neq \omega$ общее решение записывается как сумма двух гармонических колебаний разных частот ω и ν. В следующих двух пунктах это решение математически анализируется и интерпретируется физически. Здесь хорошо бы показать и резонанс, и дрожание на какой-нибудь реальной модели — на худой конец, можно привязать к легкому шарику резинку с небольшим коэффициентом жесткости (т. е. *не* тугую).

В последнем пункте 5.5.4 рассматривается идеальная ситуация *точного* резонанса, когда $\nu = \omega$. Тогда амплитуда колебаний возрастает по линейному закону, стремясь к бесконечности. Реально такое, разумеется, не происходит: либо резинка лопнет, либо трение помешает!

§ 5.6. Анализ уравнения $x'' = \lambda^2 x$. Гиперболические функции

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
5.6.0	"Введение в параграф" (предварительные замечания)	!	
5.6.1	Решения уравнения $x'' = \lambda^2 x$. Теорема единственности	!!	
5.6.2	Второе доказательство теоремы единственности	!+	
5.6.3	Уравнение гиперболических косинуса и синуса	!!	**У**
5.6.4	Неустойчивые положения равновесия	!!	
5.6.5	Фазовый портрет уравнения $x'' = \lambda^2 x$. Качественное описание	!	
5.6.6	Движение по фазовым траекториям	!+	
5.6.7*	Непосредственное интегрирование уравнения $x'' = \lambda^2 x$	!	**Ф**
5.6.8*	Интегрирование ДУ уравнения математического маятника	!+	

В окрестности положения равновесия системы, в котором сила $F = F(x)$ обращается в нуль, функцию $F(x)$ можно *линеаризовать*, т. е. заменить ее линейным приближением. Если положение равновесия считать началом отсчета, так что $F(0) = 0$, то при $F'(0) = k \neq 0$ линейное приближение приводит к линейной силе $F(x) = kx$, псевдоупругой при $k < 0$ и отталкивающей от положения равновесия при $k > 0$. Последний случай и является предметом рассмотрения в этом простом, но довольно неожиданном по математическому содержанию параграфе.

Неожиданности связаны со свойствами гиперболических функций, которые столь же естественно возникают при исследовании этой системы, как тригонометрические — при исследовании гармонических колебаний.

Сначала, впрочем, решения гиперболического уравнения $x'' = \lambda^2 x$ выписываются через экспоненты $e^{\pm\lambda t}$, и двумя способами доказывается теорема единственности (т. е. что решений, отличных от $ae^{\lambda t} + be\lambda t$, уравнение не имеет). Эти два

красивых способа навеяны уже применявшимися ранее соображениями и изложены в пп. 5.6.1–2.

Затем (в п. 5.6.3) как раз вводятся гиперболические косинус и синус, которые чуть-чуть исследуются (другие их свойства даны среди упражнений) и связываются с решениями дифференциального уравнения $x'' = x$.

В пункте 5.6.4 показаны реальные ситуации, когда возникает примерно линейная отталкивающая сила: шарик на горке и математический маятник в "верхнем положении равновесия" (мы "закавычили" последние слова, ибо ох как трудно удержать маятник в таком положении!).

В пп. 5.6.5–6 анализируется фазовый портрет системы — получается *седло*, — и, *самое главное*, устанавливается, что время движения фазовой точки по *сепаратрисам* седла (линиям, разделяющим фазовые траектории различного поведения) *бесконечно* (п. 5.6.6).

В факультативном пункте 5.6.7 приводится аналитическое интегрирование гиперболического уравнения, которое вполне можно оставить для самостоятельной проработки. А вот последний, также помеченный как факультативный, пункт 5.6.8, в котором рассматривается полный фазовый портрет математического маятника (он *периодический* по циклической координате $x \mod 2\pi$, и лучше его изображать на *цилиндре*!), при возможности, хорошо бы разобрать вместе со школьниками.

§ 5.7. Анализ уравнения $x'' + px' + qx = 0$

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
5.7.0	"Введение в параграф" (предварительные замечания)	!	
5.7.1	Общее уравнение второго порядка. Достижения Эйлера	!+	Ф
5.7.2	Характеристическое уравнение	!!	У
5.7.3	Случай положительного дискриминанта	!!	У
5.7.4	Случай нулевого дискриминанта	!+	
5.7.5	Случай отрицательного дискриминанта	!	

Если рассматривать, например, гармонические колебания при наличии (вязкого) трения, то сразу возникает "полное" (однородное) *линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами*, $x'' = -\omega^2 x - \lambda x'$ или $x'' + \lambda x' + \omega^2 x = 0$. Поэтому представляет интерес исследование *общего* такого уравнения $x'' + px' + qx = 0$, что и делается в этом параграфе.

Первый пункт параграфа дан ради повышения общей эрудированности школьников — в нем речь о том, как *Леонард Эйлер* связал обычные тригонометрические функции, подобно гиперболическим, с экспонентой, но только от *мнимого* аргумента. Здесь же в комментариях указывается, почему мнимые числа неизбежно возникают в задачах алгебры (первым их и манипуляции с ними записал знаменитый *Джероламо Кардано* (1501–1576)). Этот пункт можно оставить и для самодеятельного прочтения учащимися.

В п. 5.7.2 делается решающий шаг: при отыскании решения в виде экспоненты $e^{\lambda t}$ получается квадратное уравнение относительно λ, называемое *характеристическим*, $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$.

В случае положительного дискриминанта оно имеет два корня $\lambda_{1,2}$, и в п. 5.7.3 доказывается, что *все* решения дифференциального уравнения исчерпываются линейными комбинациями соответствующих экспонент, $ae^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t}$. Эта теорема единственности доказывается элементарно, с помощью предложенного Б. М. Ивлевым трюка, основанного на теореме Виета. Именно, левая часть уравнения переписывается через повторное дифференцирование,

$$x'' - (\lambda_1 + \lambda_2)x' + \lambda_1\lambda_2 = (x' - \lambda_1 x)' - \lambda_2(x' - \lambda_1 x),$$

и остается записать решение "внешнего" уравнения $z' - \lambda_2 z = 0$, где $z = x' - \lambda_1 x$, а затем воспользоваться первой теоремой Д'Аламбера.

Этот же прием, вместе с методом Лагранжа (вариации произвольной постоянной) позволяет справиться и со случаем нулевого дискриминанта (п. 5.7.4). Но вот при отрицательном дискриминанте характеристического уравнения обычные экспоненты решениями быть не могут — приходится подбирать решения, исходя из интуитивных соображений (здесь-то и могут помочь достижения Эйлера из п. 5.7.1). Этот подбор-подгонка в п. 5.7.5 только обозначаются и оставляются до последнего параграфа главы.

§ 5.8. Колебания в упруго-вязкой среде

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
5.8.0	"Введение в параграф" (предварительные замечания)	!	
5.8.1	Уравнение колебаний в упруго-вязкой среде	!!	
5.8.2	Случай сильного трения: апериодическое затухание	!!	
5.8.3	Промежуточный случай: тоже апериодическое затухание	!+	
5.8.4	Случай малого трения: затухающие колебания	!!	
5.8.5*	Случай малого трения: формальный подход	!	**Ф**
5.8.6*	ДУ вынужденных колебаний с трением: общий вид и поведение решений	!+	
5.8.7*	Частное решение ДУ вынужденных колебаний с трением	!+	
5.8.8*	Анализ частного решения	!+	

В этом параграфе мы возвращаемся к уравнению колебаний в вязкой среде, с которого мы начали предыдущий параграф. Уравнение теперь записывается в виде $x'' + 2\alpha x' + \omega^2 x = 0$ (п. 5.8.1), и легко анализируется в случае относительно сильного трения, когда $\alpha^2 - \omega^2 > 0$ — получается апериодическое затухание (за бесконечно долгое время! См. п. 5.8.2). Аналогично ведет себя осциллятор и в

пограничном случае $\alpha = \omega$ (п. 5.8.3). А вот при малом трении ($\alpha < \omega$) уже и приходится исхитряться.

Это мы успешно проделываем в п. 5.8.4, получая, что в этом случае (когда дискриминант характеристического уравнения отрицателен) осуществляются затухающие колебания с экспоненциально убывающей амплитудой и неизменной частотой $\omega_1 < \omega$.

Пункт 5.8.5, где мы, подобно Эйлеру, смело оперируем с *комплексными числами*, сугубо факультативный. А вот три последних пункта параграфа, также помеченные как дополнительные, стоило бы хоть кратко разобрать с учащимися — в них речь о вынужденных колебаниях в реальной ситуации, т. е. при наличии трения.

Тема 6. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ И КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ (глава 6; 4 ч)

Общие замечания и рекомендации по теме 6

Эта краткая, довольно простая и отчасти "завлекательная" тема, на наш взгляд, достойно завершает дополнительный модуль (часть II) "Динамические системы". Если предыдущая глава относилась к одномерной классической механике и обыкновенным[15] дифференциальным уравнениям, то настоящая глава апеллирует уже к одномерной *механике сплошных сред* и *дифференциальным уравнениям в частных производных*.

Это ни в коей мере не должно смущать или пугать учителя — школьников данная тема отнюдь не пугает: как показывает опыт, они вполне понимают и усваивают содержание этой главы.

§ 6.1. Бегущие волны и волновое уравнение

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
5.1.0	"Введение в параграф" (предварительные замечания)	!	
6.1.1	Одномерные волны и гармонические колебания	!!	
6.1.2	Интерференция одномерных волн	!!	
6.1.3	Интерференция двумерных волн	!	
6.1.4	Волновое уравнение	!!	

В этом параграфе вводится понятие одномерной бегущей волны фиксированного профиля, рассматриваются синусоидальные волны и связанные с ними гармонические колебания. С помощью стандартных тригонометрических формул анализируется явление интерференции одномерных волн, приводящее к явлению стоячих волн ("мертвой зыби"). С помощью векторных диаграмм гармонических колебаний рассматривается интерференционная картина для двух плоских круговых волн.

[15] В данном случае эпитет "обыкновенные" — математический термин: в противоположность дифференциальным уравнениям *в частных производных*.

В заключение из записи бегущих со скоростью v волн, $u(x,t) = f(x \mp vt)$, получается *волновое уравнение* $u''_{tt} = v^2 u''_{xx}$.

§ 6.2. Колебания струны. Музыкальная акустика

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
6.2.1	Уравнение упругой струны	!!	
6.2.2	Струна с закрепленным концом: отражение и интерференция волн	!!	
6.2.3	Струна с закрепленными концами: спектр собственных частот	!!	
6.2.4	Несколько слов о музыкальной акустике	!	

А в заключительном параграфе с помощью все того же *второго закона Ньютона* для маленького кусочка натянутой струны, для ее поперечных колебаний, получается именно волновое уравнение — со всеми вытекающими отсюда последствиями. Рассматривается отражение волны в струне с одним закрепленным концом и интерференция падающей и отраженных волн. На основе этого выясняется, какие волны могут возбуждаться в струне с двумя закрепленными концами — получается дискретный спектр собственных частот такой струны. А в самое заключение примерно объясняется, что такое "музыкальная акустика".

Александр Николаевич Земляков,
кандидат педагогических наук,
ведущий научный сотрудник
лаборатории дифференциации образования
Института общего среднего образования
Российской академии образования (ИОСО РАО).