И. П. Рязанцева, Выбор параметра регуляризации для нелинейных уравнений с монотонным приближенно заданным оператором, *Изв. вузов. Матем.*, 1982, номер 9, 49–53

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1982 МАТЕМАТИКА № 9 (244)

И. П. Рязанцева

УДК 519.64

ВЫБОР ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С МОНОТОННЫМ ПРИБЛИЖЕННО ЗАДАННЫМ ОПЕРАТОРОМ

Пусть X—банахово E-пространство, X^*—его сопряженное, причем X^* строго выпукло, оператор $A: X \to X^*$ монотонный [1], вообще говоря, разрывный с областью определения $D(A)$. Рассмотрим в X уравнение

$$Ax = f. \tag{1}$$

Будем считать, что оно имеет непустое множество решений N. Далее, пусть вместо точных A и f заданы их приближения A^h и f^δ, $h > 0$, $\delta > 0$. Предположим, что $\|f - f^\delta\| \leqslant \delta$, оператор $A^h: X \to X^*$ при любом $h > 0$ является монотонным. Обозначим через $M(x)\,(M^h(x))$ множество значений оператора $\bar{A}\,(\bar{A}^h)$ в точке x (здесь $\bar{A}$ и $\bar{A}^h$—максимальные монотонные расширения операторов A и A^h, соответственно). Отметим, что множества $M(x)$ и $M^h(x)$ выпуклы и замкнуты [2]. Пусть $D(\bar{A}^h) = D(\bar{A})$ $\forall h > 0$.

Определение 1 (см., напр., [3]). Расстоянием (отклонением) между множествами P и Q из нормированного пространства B называют величину $r(P, Q) = \max\{\beta(P, Q), \beta(Q, P)\}$, где $\beta(P, Q) = \sup\limits_{x \in P} \rho_B(x, Q)$, $\beta(Q, P) = \sup\limits_{x \in Q} \rho_B(x, P)$, $\rho_B(x, y)$—метрика в B.

Предположим, что семейство операторов A^h удовлетворяет условию

$$r(M^h(x), M(x)) \leqslant g(\|x\|)\cdot h, \tag{2}$$

где $g(t)$ $(t \geqslant 0)$—непрерывная неотрицательная функция.

Отметим, что требование непрерывности функции $g(t)$ не противоречит условию разрывности операторов A и A^h. Это следует из примера. Пусть $A: R^1 \to R^1$,

$$Ax = \begin{cases} a_1 x^3, & |x| \leqslant 1; \\ a_2 x + a_3, & x > 1; \\ a_2 x - a_3, & x < -1, \end{cases}$$

причем $a_1 < a_2 + a_3$. Предположим, что максимальная допустимая ошибка при вычислении коэффициентов a_i $(i = 1, 2, 3)$ равна h. Тогда за $g(t)$ можно взять следующую непрерывную функцию:

$$g(t) = \begin{cases} 2t^3, & 0 \leqslant t < 1; \\ t + 1, & t \geqslant 1. \end{cases}$$

Ставится задача: по приближенным данным A^h и f^δ построить в X последовательность $\{x^\gamma\}$, $\gamma = (\delta, h)$, такую, что $x^\gamma \to x \in N$ при $\gamma \to 0$. Для решения ее в данной работе будет применен операторный метод регуляризации вида

$$A^h x + \alpha U(x - x^0) = f^\delta, \tag{3}$$

где $\alpha > 0$, $x^0 \in D(A)$—некоторая фиксированная точка, $U: X \to X^*$—дуальное отображение в X. Пусть x_α^γ—решение уравнения (3) (считаем, что выполнено одно из условий, обеспечивающих единственность этого решения (см. [2])). Аналогично случаю точно заданного оператора доказывается, что $x_\alpha^\gamma \to x^* \in N$ при $\gamma/\alpha \to 0$, $\alpha \to 0$, элемент x^* удовлетворяет соотношению

$$\|x^* - x^0\| = \min_{x \in N} \|x - x^0\|, \tag{4}$$

при этом для каждого $x \in N$ справедливы неравенства

$$\|x_\alpha^\gamma - x^0\| \leqslant \delta/\alpha + h/\alpha\, g(\|x\|) + 2\|x - x^0\|; \tag{5}$$

$$\|x_\alpha^\gamma - x^0\| \leqslant \delta/\alpha + h/\alpha\, g(\|x_\alpha^\gamma\|) + 2\|x - x^0\|. \tag{6}$$

Теперь естественно встает вопрос о том, как выбирать функцию $\alpha(\gamma)$, чтобы она обеспечивала сходимость регуляризованных решений к решению исходного уравнения. Для случая точно заданного оператора эта задача решена в [2]. При условиях работы [2] и предположении, что расстояние между множествами $M(x)$ и $M^h(x)$ удовлетворяет неравенству $r(M^h(x), M(x)) \leqslant h$ $\forall x \in D(\bar{A})$, нетрудно показать, что параметр регуляризации можно выбирать из принципа невязки в форме: $\rho(\alpha) = K(\delta + h)^p$, $K \geqslant 2$, $0 < p \leqslant 1$, $0 < \delta + h < \bar{\delta} + \bar{h} < 1$, где $\rho(\alpha) = \alpha\|x_\alpha^\gamma - x^0\|$ (см. [2]). Отметим, что в случае нелинейного оператора, заданного с ошибкой, задача о выборе параметра регуляризации непроста. Наиболее полно для метода регуляризации А. Н. Тихонова [4] этот вопрос исследован в [5], там же приведена подробная библиография. Однако для нелинейных уравнений с монотонными операторами применение операторного метода регуляризации типа (3) наиболее удобно, т. к. решение уравнения (3) в этом случае—задача более простая (см., напр., [6]; [7], с. 122), чем минимизация сглаживающего функционала [4], который в этом случае не является, вообще говоря, выпуклым. В данной работе рассмотрен принцип невязки для операторного метода регуляризации (3) при условии, что семейство операторов $\{A^h\}$ удовлетворяет условию (2).

Аналогично [2] показывается, что функции $\sigma(\alpha, x^0) = \|x_\alpha^\gamma - x^0\|$ есть однозначная непрерывная и монотонно невозрастающая функция α $(\alpha > \alpha_0 > 0)$, причем $\sigma(\alpha, x^0) \to 0$ при $\alpha \to \infty$.

Отметим, что в наших условиях найдется элемент $y_\alpha^\gamma \in M^h(x_\alpha^\gamma)$, удовлетворяющий равенству $y_\alpha^\gamma + \alpha U(x_\alpha^\gamma - x^0) = f^\delta$, т. е. такой, что $\rho(\alpha) = \|y_\alpha^\gamma - f^\delta\|$, $\rho(\alpha)$—однозначная непрерывная функция.

Теорема 1. *Пусть X есть E-пространство, X^* строго выпукло, $A: X \to X^*$—произвольный монотонный оператор. Семейство операторов $\{A^h\}$ $\forall h > 0$ $(D(\bar{A}^h) = D(\bar{A}))$ удовлетворяет при $x \in D(\bar{A})$ условию* (2) *с непрерывной функцией $g(t)$, $g(t) \geqslant 0$, $t \geqslant 0$. Операторы A^h хеминепрерывны в некоторой точке $x^0 \in \operatorname{int} D(A^h)$, и для любых δ и h, $0 < \delta + h < \bar{\delta} + \bar{h} < 1$ выполняется неравенство*

$$\|A^h x^0 - f^\delta\| > [K + g(\|x^0\|)](\delta + h)^p,\ K > 1,\ 0 < p \leqslant 1. \tag{7}$$

Тогда найдется по крайней мере одно $\bar{\alpha}$ такое, что

$$\bar{\alpha} > (K-1)(\delta + h)^p/(2\|x^* - x^0\|),$$

и обобщенная невязка

$$\rho(\bar{\alpha}) = [K + g(\|x_\alpha^\gamma\|)](\delta + h)^p, \tag{8}$$

где $x_{\bar{\alpha}}^\gamma$ — решение уравнения (3) *при $\alpha = \bar{\alpha}$ (считается, что однозначная разрешимость уравнения* (3) *имеет место). Кроме того, $\bar{\alpha} \to 0$ при $\gamma \to 0$, и если $0 < p < 1$, то $x_{\bar{\alpha}}^\gamma \to x^*$, $\gamma/\bar{\alpha} \to 0$ при $\gamma \to 0$, где элемент x^* из N определяется равенством* (4). *Если $p = 1$ и $N = \{x_0\}$, то $x_{\bar{\alpha}}^\gamma \xrightarrow{w} x_0$, $\gamma/\bar{\alpha} \leqslant \mathrm{const}$ при $\gamma \to 0$.*

Доказательство. Из (6) имеем $\rho(\alpha) = \alpha\|x_\alpha^\gamma - x^0\| \leqslant 2\alpha\|x^* - x^0\| + \delta + hg(\|x_\alpha^\gamma\|)$. Выберем α настолько малым, чтобы выполнялось неравенство

$$2\alpha\|x^*-x^0\|<(K-1)(\delta+h)^p,\ K>1,\ \ 0<p\leqslant 1. \tag{9}$$

Тогда $\rho(\alpha)<(K-1)(\delta+h)^p+\delta+hg(\|x_\alpha^\gamma\|)\leqslant(K-1)(\delta+h)^p+[1+g(\|x_\alpha^\gamma\|)]\times\times(\delta+h)\leqslant[K+g(\|x_\alpha^\gamma\|)](\delta+h)^p$. Далее покажем, что при $\alpha\to\infty$, $\rho(\alpha)\to\to\|A^hx^0-f^\delta\|$. Как уже отмечалось, $\sigma(\alpha,x^0)=\|x_\alpha^\gamma-x^0\|\to 0$ при $\alpha\to\infty$, т. е. $x_\alpha^\gamma\to x^0$ при $\alpha\to\infty$. Так как оператор $\bar{A}^h$, $h>0$, локально ограничен в точке x^0 (см. [8]), то существует последовательность $y_\beta^\gamma \rightharpoonup \bar{g}$ при $\beta\to\infty$. В силу максимальной монотонности $\bar{A}^h$ имеем $\langle y-\bar{g},x-x^0\rangle\geqslant 0$, $y\in M^h(x)$, $x\in D(\bar{A}^h)$. Значит, $\bar{g}\in\bar{A}^hx^0$. Отметим, что последнее неравенство тем более выполняется для $x\in D(A^h)$, $y\in A^hx$. Так как x^0—внутренняя точка $D(A^h)$, то $x_t=x^0+tz\in\in D(A^h)$, $z\in X$, $t>0$ и $\langle y_t-\bar{g},z\rangle\geqslant 0$, $y_t\in A^hx_t$. Отсюда при $t\to 0$ в силу хеминепрерывности A^h в точке x^0, получим $A^hx^0=\bar{g}$. Значит, вся последовательность $y_\alpha^\gamma\rightharpoonup A^hx^0$ при $\alpha\to\infty$. Из слабой сходимости имеем

$$\|A^hx^0-f^\delta\|\leqslant\varliminf_{\alpha\to\infty}\|y_\alpha^\gamma-f^\delta\|. \tag{10}$$

Кроме того, в [2] доказано неравенство $\langle y_\alpha^\gamma-A^hx^0,\ I(f^\delta-y_\alpha^\gamma)\rangle\geqslant 0$, где I—двойственное отображение к дуальному. Отсюда следует, что $\|y_\alpha^\gamma-f^\delta\|\leqslant\|A^hx^0-f^\delta\|$. Последнее соотношение вместе с (10) дает $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\rho(\alpha)=\|A^hx^0-f^\delta\|$. Рассмотрим функцию $d(\alpha)=\rho(\alpha)-[K+g(\|x_\alpha^\gamma\|)](\delta+h)^p$ $(\alpha>\alpha_0>0)$, которая является непрерывной и, кроме того, обладает свойствами:

а) $\lim\limits_{\alpha\to\infty}d(\alpha)=\|A^hx^0-f^\delta\|-[K+g(\|x^0\|)](\delta+h)^p$, а значит, в силу (7) $\lim\limits_{\alpha\to\infty}d(\alpha)>0$;

б) существует $\alpha>(K-1)(\delta+h)^p/(2\|x^*-x^0\|)$ (см. (9)), что $d(\alpha)<0$.

Отсюда следует первое утверждение теоремы. Далее покажем, что выбор параметра регуляризации как решения уравнения (8) обеспечивает сходимость регуляризованных решений к решению исходного уравнения. Прежде всего отметим, что из (7) следует, что $x^0\notin N$. Пусть $0<p<1$. Так как $\bar{\alpha}>(K-1)\times\times(\delta+h)^p/(2\|x^*-x^0\|)$, то получим $(\delta+h)/\bar{\alpha}\leqslant 2(\delta+h)^{1-p}\|x^*-x^0\|/(K-1)$, т. е. при $\gamma\to 0$ $(\delta+h)/\bar{\alpha}\to 0$, а значит, $h/\bar{\alpha}$, $\delta/\bar{\alpha}\to 0$ при $\gamma\to 0$. Далее, как и в [2], доказывается, что $x_{\bar{\alpha}}^\gamma\to x^*$ при $\gamma\to 0$. Поскольку $x^*\neq x^0$, то существует $\mu>0$ такое, что при достаточно малых γ имеем $\|x_{\bar{\alpha}}^\gamma-x^0\|\geqslant\mu$. Тогда

$$\bar{\alpha}=\frac{[K+g(\|x_{\bar{\alpha}}^\gamma\|)](h+\delta)^p}{\|x_{\bar{\alpha}}^\gamma-x^0\|}\leqslant\frac{K+g(\|x_{\bar{\alpha}}^\gamma\|)}{\mu}(h+\delta)^p.$$

Но из непрерывности функции $g(t)$ и ограниченности последовательности $\{x_{\bar{\alpha}}^\gamma\}$ следует, что $\bar{\alpha}<C(h+\delta)^p$, $C>0$, т. е. $\bar{\alpha}\to 0$ при $\gamma\to 0$. При $p=1$ аналогично доказывается, что $x_{\bar{\alpha}}^\gamma\rightharpoonup x_0$ и $\gamma/\bar{\alpha}\leqslant\mathrm{const}$ при $\gamma\to 0$. Покажем еще, что и в этом случае $\bar{\alpha}\to 0$ при $\gamma\to 0$. Из слабой сходимости следует $\|x_0-x^0\|\leqslant\varliminf_{\gamma\to 0}\|x_{\bar{\alpha}}^\gamma-x^0\|$. Значит, при всех γ, за исключением быть может конечного числа их, $\|x_{\bar{\alpha}}^\gamma-x^0\|\geqslant\geqslant\mu>0$, а значит, $\bar{\alpha}\leqslant C_1(\delta+h)$, $C_1>0$, т. е. $\bar{\alpha}\to 0$ при $\gamma\to 0$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть в условиях теоремы* 1 *функция* $g(t)$ $(t\geqslant 0)$ *не убывает, и* $x^0=0$*—нуль пространства* X, *тогда элемент* $\bar{\alpha}$, *удовлетворяющий* (8), *единственный.*

Доказательство ведем от противного. Предположим, что при заданном γ нашлись два значения $\bar\alpha$ и $\bar\beta$ такие, что

$$\bar\alpha \| x^{\gamma}_{\bar\alpha} \| = [K + g(\| x^{\gamma}_{\bar\alpha} \|)] (\delta + h)^p, \tag{11}$$

$$\bar\beta \| x^{\gamma}_{\bar\beta} \| = [K + g(\| x^{\gamma}_{\bar\beta} \|)] (\delta + h)^p, \tag{12}$$

где $x^{\gamma}_{\bar\alpha}$ и $x^{\gamma}_{\bar\beta}$ — решения регуляризованного уравнения при $\alpha = \bar\alpha$ и $\alpha = \bar\beta$, соответственно, т. е. справедливы равенства

$$y^{\gamma}_{\bar\alpha} + \bar\alpha U x^{\gamma}_{\bar\alpha} = f^{\delta}, \quad y^{\gamma}_{\bar\alpha} \in M^h(x^{\gamma}_{\bar\alpha}); \tag{13}$$

$$y^{\gamma}_{\bar\beta} + \bar\beta U x^{\gamma}_{\bar\beta} = f^{\delta}, \quad y^{\gamma}_{\bar\beta} \in M^h(x^{\gamma}_{\bar\beta}). \tag{14}$$

Если $x^{\gamma}_{\bar\alpha} = x^{\gamma}_{\bar\beta}$, то из (11)—(12) следует, что $\bar\alpha = \bar\beta$. Поэтому далее будем считать, что $x^{\gamma}_{\bar\alpha} \neq x^{\gamma}_{\bar\beta}$. Пусть $l_{\bar\alpha} = x^{\gamma}_{\bar\alpha} / \| x^{\gamma}_{\bar\alpha} \|$ и $l_{\bar\beta} = x^{\gamma}_{\bar\beta} / \| x^{\gamma}_{\bar\beta} \|$. Тогда найдутся однозначно определяемые элементы $l^*_{\bar\alpha}$ и $l^*_{\bar\beta}$, удовлетворяющие соотношениям (см. [1], с. 313): $\| l^*_{\bar\alpha} \| = \| l^*_{\bar\beta} \| = 1$, $\langle l^*_{\bar\alpha}, l_{\bar\alpha} \rangle = \langle l^*_{\bar\beta}, l_{\bar\beta} \rangle = 1$. Тогда $\bar\alpha U x^{\gamma}_{\bar\alpha} = \bar\alpha \| x^{\gamma}_{\bar\alpha} \| \, l^*_{\bar\alpha}$, $\bar\beta U x^{\gamma}_{\bar\beta} = \bar\beta \| x^{\gamma}_{\bar\beta} \| \, l^*_{\bar\beta}$. Теперь, используя (11)—(12), имеем

$$\langle \bar\alpha U x^{\gamma}_{\bar\alpha} - \bar\beta U x^{\gamma}_{\bar\beta}, \; x^{\gamma}_{\bar\alpha} - x^{\gamma}_{\bar\beta} \rangle = \langle \bar\alpha \| x^{\gamma}_{\bar\alpha} \| \, l^*_{\bar\alpha} - \bar\beta \| x^{\gamma}_{\bar\beta} \| \, l^*_{\bar\beta}, x^{\gamma}_{\bar\alpha} - x^{\gamma}_{\bar\beta} \rangle =$$

$$= (h + \delta)^p [K \langle l^*_{\bar\alpha} - l^*_{\bar\beta}, x^{\gamma}_{\bar\alpha} - x^{\gamma}_{\bar\beta} \rangle + \langle g(\| x^{\gamma}_{\bar\alpha} \|) \, l^*_{\bar\alpha} - g(\| x^{\gamma}_{\bar\beta} \|) \, l^*_{\bar\beta}, x^{\gamma}_{\bar\alpha} - x^{\gamma}_{\bar\beta} \rangle].$$

Как и при доказательстве строгой монотонности дуального отображения (см. [1], с. 313), получим

$$\langle l^*_{\bar\alpha} - l^*_{\bar\beta}, x^{\gamma}_{\bar\alpha} - x^{\gamma}_{\bar\beta} \rangle > 0.$$

Так как по условию теоремы функция $g(t)$ неубывающая, то

$$\langle g(\| x^{\gamma}_{\bar\alpha} \|) \, l^*_{\bar\alpha} - g(\| x^{\gamma}_{\bar\beta} \|) \, l^*_{\bar\beta}, x^{\gamma}_{\bar\alpha} - x^{\gamma}_{\bar\beta} \rangle \geqslant [g(\| x^{\gamma}_{\bar\alpha} \|) - g(\| x^{\gamma}_{\bar\beta} \|)] (\| x^{\gamma}_{\bar\alpha} \| - \| x^{\gamma}_{\bar\beta} \|) \geqslant 0.$$

Следовательно,

$$\langle \bar\alpha U x^{\gamma}_{\bar\alpha} - \bar\beta U x^{\gamma}_{\bar\beta}, x^{\gamma}_{\bar\alpha} - x^{\gamma}_{\bar\beta} \rangle > 0.$$

Но тогда из (13)—(14) вытекает, что

$$\langle y^{\gamma}_{\bar\alpha} - y^{\gamma}_{\bar\beta}, x^{\gamma}_{\bar\alpha} - x^{\gamma}_{\bar\beta} \rangle < 0,$$

что противоречит монотонности оператора $\bar{A}^h$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. В условиях теоремы 2 обобщенная невязка $\rho(\alpha)$ есть строго возрастающая функция параметра α.

З а м е ч а н и е 1. В случае, когда регуляризованное уравнение рассматривается в виде (3), то при условиях теоремы 1 достаточным условием единственности решения $\bar\alpha$ уравнения (8) может служить неравенство

$$(\| x^{\gamma}_{\alpha} - x^0 \| - \| x^{\gamma}_{\beta} - x^0 \|) [g(\| x^{\gamma}_{\alpha} \|) - g(\| x^{\gamma}_{\beta} \|)] \geqslant 0 \quad \forall \alpha, \beta > 0.$$

З а м е ч а н и е 2. Если операторы A^h в уравнении (3) не являются монотонными, то вопрос о разрешимости уравнения (3) и справедливости теорем 1 и 2 остается, вообще говоря, открытым.

Замечание 3. Утверждения, подобные доказанным теоремам, можно сформулировать и для задачи вычисления значения неограниченного монотонного оператора, заданного с ошибкой.

Замечание 4. Пусть в уравнении (1) неточно задана только правая часть, а оператор A задан точно, т. е. $h=0$. Тогда можно считать, что $g(t)\equiv 0$. При этих условиях утверждения теоремы 4 из [2] следуют из результатов данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений.—М., 1972.—416 с.

2. Альбер Я. И., Рязанцева И. П. О решении нелинейных задач с монотонными разрывными отображениями.—Дифференц. уравнения, 1979, т. XV, № 2, с. 331—342.

3. Лисковец О. А. Некорректные задачи и устойчивость квазирешений.—Сиб. матем. журн., 1969, т. X, № 2, с. 373—385.

4. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.—М., 1974.—224 с.

5. Леонов А. С. О выборе параметра регуляризации для нелинейных некорректных задач с приближенно заданным оператором.—Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1979, т. 19, № 6, с. 1363—1376.

6. Bruck R. E. The iterative solution of the equation $y\in x+Tx$ for a monotone operator T in Hilbert space.—Bull. Amer. Math. Soc., 1973, v. 79, № 6, p. 1258—1261.

7. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.—М., 1978.—336 с.

8. Rockafellar R. T. Local boundednes of nonlinear, monotone operators.—Mich. Math. J., 1969, v. 16, № 4, p. 397—407.

г. Горький

Поступила
26 XI 1980

В. В. Клоков. Смешанные краевые задачи влияния изоляции на предельную электрохимическую перфорацию

(аннотация статьи, принятой к печати)

Получено решение ряда обратных смешанных краевых задач для аналитической функции комплексного переменного, связанных с расчетом финишной анодной границы при электрохимической перфорации пластин. Рассмотрены варианты частичной изоляции рабочей поверхности катода, локализации области обработки с помощью трафаретов, помещенных в межэлектродном промежутке, и частичной изоляции поверхности катода.

Установлено влияние ширины межэлектродного зазора, расстояний от трафарета, толщины пластины на форму границы сечения перфорации. (Работа поступила в журнал „Математика“ 2 III 1982.)

Б. И. Одвирко-Будко. Об одном способе аналитического продолжения голоморфных функций многих комплексных переменных

(аннотация статьи, принятой к печати)

Доказываются две теоремы, формулирующие в терминах сепаратных аналитических продолжений по счетному множеству лучей достаточные условия продолжения пары голоморфных функций друг в друга. (Работа поступила в журнал „Математика“ 6 IV 1982.)