

УДК 621.1.016+536.2

ОДНОСЛОЙНАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КАЖУЩЕЙСЯ ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ И МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ЭФФЕКТИВНОЙ ДЛИНЫ

© 2022 г. **В. В. Горский**^{1, 2, *}¹АО “ВПК “НПО машиностроения”, Реутов, Россия²Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

*E-mail: vpk@vpk.npomash.ru

Поступила в редакцию 07.10.2021 г.

После доработки 04.05.2022 г.

Принята к публикации 07.06.2022 г.

Предложено использование формулы Прандтля–Ван-Дриеста во всей области двумерного ламинарно-турбулентного пограничного слоя для исследования конвективного теплообмена и трения на высокотемпературных элементах конструкций высокоэнергетических устройств. Сформулирована современная модификация метода эффективной длины В.С. Авдуевского для решения данных задач. Проведен анализ полученных при экстремально высоких значениях числа Рейнольдса экспериментальных данных по конвективному теплообмену, для которых имелась возможность установить положение переходной области на поверхности затупленной части испытанных моделей. Предложена новая модификация формулы Прандтля–Ван-Дриеста, учитывающая зависимость константы Кармана от положения переходной области на затупленной части модели. В свою очередь идеология классического метода эффективной длины применена к расчету не ламинарно-турбулентного теплообмена в целом, а только к той его составляющей, которая обусловлена турбулентными пульсациями в газе. Получено удовлетворительное качество описания проанализированных экспериментальных данных на всей поверхности затупленной модели, имеющее место в рамках применения предложенных методов расчета.

DOI: 10.31857/S0040364422050040

ВВЕДЕНИЕ

При обтекании стенки газовым потоком с большими числами Рейнольдса вызываемые в нем возмущения сопровождаются возникновением турбулентных пульсаций в вязкой пристенной области течения.

Широкое распространение в настоящее время получило численное моделирование процесса ламинарно-турбулентного обтекания тел, основанное на использовании различных полуэмпирических алгебраических и дифференциальных моделей турбулентной вязкости. В инженерной же практике широко распространен метод эффективной длины В.С. Авдуевского.

Одной из основных проблем, стоящих на пути обоснованности применения на практике любой полуэмпирической модели расчета, является удовлетворительное качество ее верификации на базе анализа экспериментальных данных. Причем наиболее остро эта проблема стоит при описании турбулентного теплообмена и трения, так как турбулентная вязкость обусловлена газодинамической структурой течения газа. И в этой связи сложно

ожидать существования универсальной модели расчета турбулентной вязкости.

В развитом двумерном турбулентном пограничном слое обычно выделяется несколько принципиально различных областей течения газа: внутренняя пристеночная область, внешняя область закона следа и надслой.

Пристеночная область включает в себя ламинарный подслой с линейным изменением профиля скорости, переходную зону и область логарифмического изменения профиля скорости [1]. Каждая из перечисленных подобластей характеризуется индивидуальными присущими только ей свойствами и закономерностями.

В этой области поток характеризуется мелкокомасштабной турбулентностью с изотропными свойствами, а пульсации в газе, инициированные стенкой, практически полностью затухают к внешней границе этой области [2].

В подобласти закона следа и перемежаемости (надслой), где силы вязкости крайне малы, выполняется закон дефекта скоростей [3].

Естественно, что для различных прикладных задач роль течения газа во внешней части погра-

ничного слоя будет также различной. Нижеизложенные материалы посвящены исследованию этой роли для одного важного для практики случая двумерного конвективного теплообмена, который характеризуется

- рассмотрением затупленных тел достаточно малого удлинения;

- слоистым характером их обтекания высокотемпературным газовым потоком при экстремально высоких значениях числа Рейнольдса.

В этих условиях обоснованным является исследование конвективного теплообмена и трения в рамках ламинарно-турбулентного пограничного слоя в сочетании с алгебраической моделью кажущейся турбулентной вязкости [1, 4]. При этом наиболее часто на практике применяются двухслойные модели Болдуина–Ломакса [5] и Себеchi–Смита [6].

В данных моделях в пристеночной области кажущаяся турбулентная вязкость рассчитывается по формуле Прандтля–Ван-Дриеста [7], учитывающей ее зависимость от градиента осредненной скорости.

Во внешней же области пограничного слоя используются различные формы записи закона следа.

В этой связи необходимо обратить внимание на следующие обстоятельства.

Во-первых, в рассматриваемых условиях сложно ожидать существенного влияния, оказываемого на конвективный теплообмен течением газа во внешней части пограничного слоя при экстремально высоких числах Рейнольдса. А именно такой режим обтекания этих тел вызывает наибольший практический интерес, так как он во многих случаях является определяющим с точки зрения работоспособности фрагментов конструкций изделий, подверженных экстремально высокому нагреву.

Во-вторых, полуэмпирический характер всех моделей кажущейся турбулентной вязкости вызывает необходимость их апробации на широком круге экспериментальных данных, что в свою очередь создает повышенные требования к определению положения переходной зоны на испытываемой модели. Наиболее качественная информация такого рода известна лишь в условиях испытания затупленных конусов при экстремально высоких числах Рейнольдса.

В-третьих, объем экспериментальных данных, пригодных для апробации моделей кажущейся турбулентной вязкости, крайне ограничен. Это препятствует качественному установлению значений констант, входящих в математическое описание течения газа, одновременно как для внутренней, так и внешней областей пограничного слоя.

В-четвертых, опубликованные методы расчета турбулентного теплообмена апробированы на экспериментальных данных, полученных в условиях

практически безградиентного обтекания стенки газовым потоком (см., например, [4]). Однако в работах [8, 9] указано на недопустимость применения этих методов в условиях сугубо градиентного характера обтекания стенки.

По этой причине представляется целесообразным модифицировать существующие модели кажущейся турбулентной вязкости отдельно в условиях, которые существенно различаются вкладом, вносимым течением газа во внешней области пограничного слоя в контролируемые результаты измерений.

В этом плане анализируемые ниже результаты экспериментальных исследований представляются практически идеальной базой для модификации существующих моделей кажущейся турбулентной вязкости во внутренней части ламинарно-турбулентного пограничного слоя.

Это вызывает необходимость в оценке влияния, оказываемого на конвективный теплообмен течением газа во внешней части пограничного слоя, что, естественно, проще всего сделать с использованием однослойной алгебраической модели кажущейся турбулентной вязкости.

Скорректированная при этом модель течения во внутренней части пограничного слоя в принципе может найти определенное применение и в тех случаях, когда изучение течения газа во внешней области пограничного слоя является обязательным. Однако при этом может использоваться полученное в рамках однослойной модели математическое описание кажущейся турбулентной вязкости, обусловленной трением.

Выполнению исследований, направленных на решение сформулированной задачи, и посвящена основная часть данной статьи.

Метод эффективной длины, предложенный в 60-х годах прошлого века и оперирующий суммарным тепловым потоком, широко используется в инженерной практике. Согласно современным воззрениям, этот поток обусловлен как ламинарными, так и турбулентными составляющими процессов переноса в газе. Попытке применения идеологии метода эффективной длины для описания только турбулентной составляющей теплового потока посвящена вторая часть данной статьи.

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Объектом настоящих исследований является осесимметричное обтекание воздухом кругового затупленного конуса малого удлинения с углом полураствора, равным 9° , для сопоставления расчетных и экспериментальных данных. Использовалась методика численного интегрирования дифференциальных уравнений ламинарно-турбулентного пограничного слоя, описанная в работе [10], а

для расчета кажущейся турбулентной вязкости μ_T во всем пограничном слое применялась формула Прандтля–Ван-Дрифта

$$\begin{aligned} \mu_T &= \rho [k y D(y)]^2 |u_y|, \\ D(y) &= 1 - \exp\left(-\frac{y/y^*}{26}\right), \\ y^* &= \frac{\mu_w}{\rho_w v^*}, \quad v^* = \sqrt{\frac{Fr_w}{\rho_w}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь k – константа Кармана; u_y – частная производная тангенциальной проекции вектора скорости по координате y ; ρ – плотность газа; Fr – удельное напряжение трения; y^* , v^* – характерные значения длины и скорости, используемые в качестве масштабов, а индекс w относится к стенке.

В данной формуле принята линейная зависимость масштаба турбулентности от удаления y расчетного узла от стенки, а для плавного сопряжения течения газа в пристеночной области с течением в ламинарном подслое используется демпфирующая функция Ван-Дрифта $D(y)$.

Анализируемые экспериментальные данные, опубликованные в работах [11, 12], соответствуют обтеканию конуса при различных углах атаки, что в свою очередь обеспечивает массовый характер экспериментальных данных по конвективному теплообмену на затуплении. Однако эти данные характеризуются значительным разбросом для различных экспериментов.

Поэтому в подробном анализе этих данных, выполненном в [9], удалось установить только недопустимость применения постоянного значения константы Кармана на всей поверхности затупления конуса и предложить степенную зависимость этой константы от координаты s , отсчитываемой вдоль образующей конуса от его критической точки.

В данной работе используется принципиально другой подход к решению той же задачи, основанный на анализе экспериментальных данных, полученных в одном эксперименте, что позволило учесть влияние на конвективный теплообмен месторасположения переходной области на поверхности затупления конуса за счет применения для расчета константы Кармана формулы вида

$$k = k_{2n} (3 - 2\alpha^n)_{\max}^n,$$

$$\alpha = \begin{cases} 0, & s \leq s_L; \\ 1, & s > s_L \wedge s \geq s_{B1}; \\ (s - s_L) / (s_{B1} - s_L), & s > s_L \wedge s < s_{B1}. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь s – координата, отсчитываемая от критической точки конуса вдоль его образующей в калибрах от радиуса сферического затупления модели; k_{\max} – максимальное значение константы Кармана, достигаемая с ростом координаты s . Индексы L и $B1$ относятся соответственно к концу ламинарного режима течения газа в пограничном слое и к стыку затупления конуса с его боковой поверхностью.

При этом применение формулы (2) обеспечивает монотонное возрастание константы Кармана в пределах $[0, k_{\max}]$ с сохранением ее дифференцируемости на всей области определения координаты s .

Показатель степени n и константа k_{\max} рассматриваются ниже как инструменты согласования расчетных и экспериментальных данных.

При проведении расчетных исследований использовались результаты численного решения уравнений Эйлера, которые удовлетворительно согласуются с приведенными в работах [11, 12] экспериментальными данными.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Объектом настоящего исследования являются экспериментальные данные по ламинарно-турбулентному теплообмену на затупленном конусе, обтекаемом под различными углами атаки, опубликованные в работах [11, 12].

Данные эксперименты проведены при трех режимах обтекания затупленного конуса потоком воздуха, характеризующихся различными значениями числа Рейнольдса Re_∞ , рассчитанного по параметрам газа в набегающем потоке и радиусу R_0 сферического затупления модели.

Условия проведения данных экспериментальных исследований приведены в табл. 1.

В работах [9, 10] проведен подробный анализ всей совокупности экспериментальных данных по

Таблица 1. Условия проведения экспериментов

№	$Re_\infty \times 10^{-6}$	M_∞	ρ_∞ , кг/м ³	T_∞ , К	H_F	$q_{w,0}$, МВт/м ²
I	10	5	0.902	73.65	0.133	0.41224
II	4	5	0.350	73.81	0.232	0.25325
III	2.5	5	0.209	73.07	0.190	0.18965

Примечание. M_∞ , ρ_∞ , T_∞ – число Маха, плотность и температура набегающего на модель потока воздуха; H_F – отношение энтальпии газа на стенке к энтальпии торможения в набегающем потоке; T_w , $q_{w,0}$ – температура стенки и удельный тепловой поток в критической точке сферы, рассчитанные по формуле Фея–Ридделла [13] для случая холодной стенки.

теплообмену на затуплении конуса, приведенных в работах [11, 12] для различных углов его атаки газовым потоком. На базе этого анализа сделан вывод о том, что во всех режимах проведенных испытаний четко прослеживается месторасположение переходной области на поверхности затупления.

Это позволило решить обратную задачу по определению эффективной высоты b_{Tr} шероховатости модели, определяющей положение переходной области на ее поверхности в рамках методики ПАНТ [14].

При этом было установлено, что величина параметра b_{Tr} равна примерно 3, 4.5 и 9 мкм для моделей, использованных при проведении испытаний в режимах I, II, III соответственно.

Данные значения шероховатости и использовались при проведении настоящих исследований, а полученные при этом параметры, характеризующие положение переходной области на поверхности затупления, приведены в табл. 2.

Расчет изменения коэффициента перемежаемости Γ внутри переходной зоны от 0 до 1 производится по кубической полиномиальной зависимости.

Так как величина шероховатости поверхности испытанных моделей ≈ 5 мкм, то в [10] сделан вывод о том, что в данном случае, согласно [4], усилением теплообмена за счет шероховатости стенок можно пренебречь.

Нижеследующий анализ экспериментальных данных ограничен только случаем осесимметричного обтекания модели газовым потоком, которое было реализовано только в одном испытании для каждого из трех указанных в табл. 1 режимов. На каждой модели датчики, использовавшиеся для определения удельного теплового потока, были установлены на семи образующих конуса в 13 сечениях по координате s . Благодаря этому измерения тепловых потоков не являлись единичными.

Таблица 2. Параметры, характеризующие положение переходной области на поверхности модели

№	b_{Tr} , мкм	$Re_{e,\vartheta,L}$	s_L	$Re_{e,\vartheta,T}$	s_T
I	3.0	158	0.185	314	0.373
II	4.5	178	0.339	348	0.701
III	9.0	119	0.288	234	0.589

Примечание. s_L, s_T — значения координаты s , соответствующие началу и концу переходной области; $Re_{e,\vartheta,L}, Re_{e,\vartheta,T}$ — значения числа Рейнольдса, соответствующие началу и концу переходной области и рассчитанные по параметрам течения газа на внешней границе ламинарного пограничного слоя и толщине потери импульса в этом слое.

В табл. 3 приведена предварительная информация о тепловом потоке q_w , полученная в результате данной серии экспериментальных исследований. Здесь $q_{w,m}$ — среднеквадратическая величина теплового потока q_w ; σ — среднеквадратическое отклонение, %; N_D — число сработавших датчиков при фиксированном значении координаты s .

Из 183 показаний тепловых датчиков, приведенных в [12], отбракованы как выбросы только два измерения из них. При этом оставшиеся 181 измерения характеризуются столь низкими среднеквадратическими отклонениями, что делают обоснованным применение среднеквадратических значений удельного теплового потока $q_{w,m}$ для сопоставления расчетных и экспериментальных данных.

Результаты такого сопоставления приведены на рис. 1.

Значения координаты s и удельного теплового потока q_w к холодной стенке измеряются соответственно в калибрах от параметров R_0 и $q_{w,0}$.

Дорожками кривых различного типа на графиках нанесены расчетные данные, полученные в рамках однослойной и двухслойной алгебраической модели.

Таблица 3. Экспериментальные данные по тепловому потоку

s	$q_{w,m}$	σ	N_D	$q_{w,m}$	σ	N_D	$q_{w,m}$	σ	N_D
0	0	0	0	0.903	0	1	1.01	0	1
0.15	0.974	0	3	1.010	1.46	3	1.01	1.57	3
0.30	0	0	0	0.838	1.97	4	0.87	5.07	5
0.45	2.210	4.70	3	1.883	4.38	3	1.24	2.86	2
0.60	2.480	3.58	2	1.580	5.20	3	1.59	3.67	6
0.75	2.070	0.27	2	1.810	0.30	3	1.46	0.94	3
0.90	1.910	1.99	4	1.790	2.19	3	1.38	3.38	6
1.05	1.540	0.63	2	1.380	0.15	3	1.08	0.80	5
1.30	1.140	1.64	3	0.849	5.35	7	0.784	5.80	6
1.50	0.699	3.58	3	0.526	3.2	6	0.456	0.56	6
2.00	0.703	0	1	0.505	3.06	4	0.455	5.75	5
3.50	0.549	8.85	2	0.438	4.17	7	0.371	4.79	7
5.25	0.515	7.45	2	0.371	3.57	7	0.322	2.38	7

ческих моделей кажущейся турбулентной вязкости, а значками различного типа – экспериментальные данные.

При этом верхняя граница дорожки расчетных данных относится к однослойной модели кажущейся турбулентной вязкости.

В рамках обоих расчетных подходов использовалась одинаковая формулировка (1), (2) модифицированной формулы Прандтля–Ван-Дриеста с одинаковыми значениями 0.25 и 0.3 коэффициентов K_{\max} и n , применение которых позволяет обеспечить удовлетворительное качество согласования расчетных и экспериментальных данных для всех рассмотренных режимов экспериментальной отработки.

Однако в одном случае данная формула применяется во всем пограничном слое, а во втором – только в его внутренней части. Для расчета же кажущейся турбулентной вязкости во внешней части пограничного слоя использовался тот же подход, что и в классической формулировке метода Себечи–Смита [5].

Как следует из приведенной на рис. 1 информации, в рассмотренных условиях экспериментальной отработки роль течения газа в конвективном теплообмене во внешней области пограничного слоя оказывается крайне незначительной.

Это обстоятельство в сочетании с отсутствием данных о корректности использования в данных условиях существующих моделей кажущейся турбулентной вязкости для внешней части пограничного слоя свидетельствует об обоснованности применения в данном случае однослойной модели кажущейся турбулентной вязкости.

В свою очередь предложенная модификация формулы Прандтля–Ван-Дриеста может найти применение и при проведении исследований в условиях, в которых нельзя пренебречь течением газа во внешней части пограничного слоя.

В заключение необходимо подчеркнуть, что на сегодняшний день не существует альтернативы использованию указанных экспериментальных данных для решения задач, связанных с апробацией расчетных методов решения уравнений ламинарно-турбулентного пограничного слоя.

Это объясняется прежде всего следующими причинами, учтенными только в работах [11, 12].

Во-первых, апробация должна проводиться в условиях наличия информации о месторасположении переходной области на поверхности модели, что представляется возможным только на ее затуплении при экстремально высоких значениях числа Рейнольдса.

Во-вторых, в этих условиях шероховатость стенки оказывает влияние не только на месторасположение переходной области на поверхности модели, но и на интенсивность конвективного теплообмена. Поэтому необходима тщательная полировка поверхности модели, позволяющая исключить

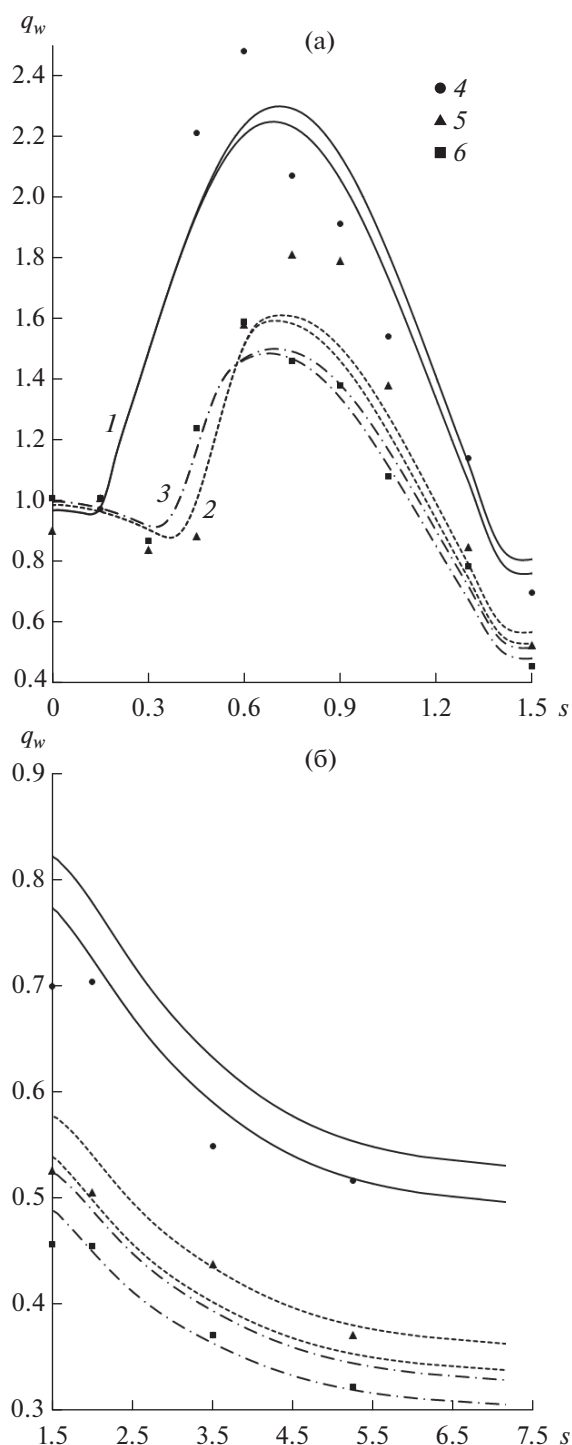


Рис. 1. Сопоставление расчетных (кривые) и экспериментальных (маркеры) данных по теплообмену на затуплении (а) и на боковой поверхности (б) конуса: 1, 4 – для режима I; 2, 5 – II; 3, 6 – III.

из рассмотрения учет усиления теплообмена за счет шероховатости стенки.

Как уже отмечено выше в инженерной практике широкое применение имеет метод эффективной длины [4].

Удовлетворительное качество описания в рамках этого метода ламинарного теплообмена по отношению как к экспериментальным данным, так и к результатам строгого численного интегрирования дифференциальных уравнений пограничного слоя для широкого круга прикладных задач [4], свидетельствует о физической обоснованности допущений, лежащих в основе данного метода.

В то же время можно предположить, что отсутствие аналогичного удовлетворительного согласования для ламинарно-турбулентного теплообмена, наблюдаемого при экстремально высоких числах Рейнольдса, является следствием двух основных причин:

- применение метода эффективной длины для расчета суммарного теплового потока, а не его составляющей, обусловленной турбулентными пульсациями в пограничном слое;
- апробацией этого метода только на экспериментальных данных, полученных при недостаточно высоких числах Рейнольдса.

С целью устранения в первом приближении этих причин производится модернизация классического метода эффективной длины, включающая в себя

- запись уравнения для расчета удельного теплового потока в форме

$$q_w(s) = q_{w,Lam}(s) + q_{w,Turb}(s)\Gamma(s);$$

$$q_{Turb}(s) = A_{Turb} Pr^{-0.6} B_{Turb}(s)/x_{Eff,Turb}^{0.2}(s);$$

$$B_{Turb}(s) = [\rho_{Ecc}(s)u_e(s)]^{0.8} \times \mu_{Ecc}^{0.2}(s)[h_{r,Turb}(s) - h_w(s)];$$

$$h_{r,Turb} = h_e + (h_{00} - h_e)\sqrt[3]{Pr};$$

$$x_{Eff,Turb}(s) = \int_0^s [r(s') B_{Turb}(s')]^{1.25} \times ds' / [r(s) B_{Turb}(s)]^{1.25};$$

- рассмотрение параметра A_{Turb} как единственного элемента рассогласования расчетных и экспериментальных данных по величине суммарного теплового потока q_w .

Здесь ρ , μ , h – плотность (кг/м³), коэффициент динамической вязкости (кг/(м с)) и энтальпия (Дж/кг); Pr – число Прандтля; индексы w , e относятся к стенке и внешней границе пограничного слоя; индексы Lam , $Turb$ относятся к ламинарной и турбулентной составляющей суммарной тепловой нагрузки; индекс Ecc относится к свойствам газа, соответствующим энтальпии Эккерта [15]; индексы 00 , r относятся к энтальпиям торможения и восстановления газового потока.

Решение данной оптимизационной задачи производится на базе тех же экспериментальных данных, описанных выше, а полученные при этом

результаты сопоставления расчетных и экспериментальных данных, соответствующие оптимальному значению параметра A_{Turb} , равному 0.018, приведены на рис. 2.

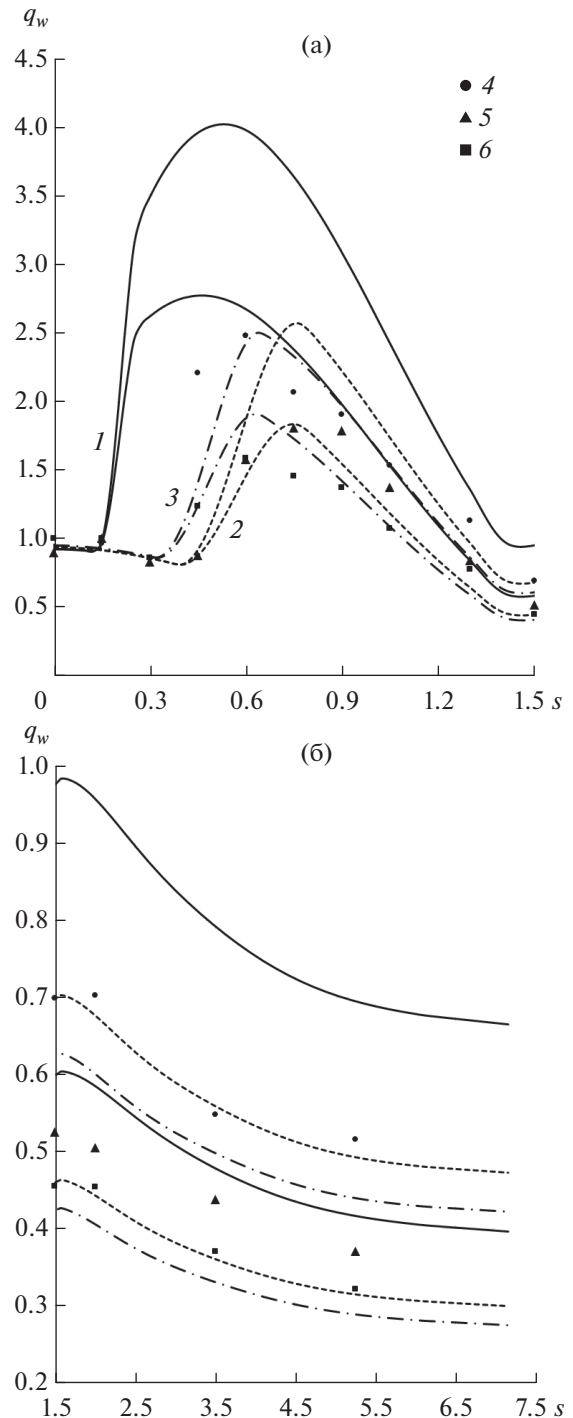


Рис. 2. Сопоставление расчетных (кривые) и экспериментальных (маркеры) данных по теплообмену на затуплении (а) и на боковой поверхности (б) конуса: 1, 4 – для режима I; 2, 5 – II; 3, 6 – III.

Дорожкой кривых различного типа на графики нанесены расчетные данные, полученные в рамках классического и модернизированного методов эффективной длины, а значками различного типа — экспериментальные данные.

При этом верхняя граница дорожки расчетных данных относится к классическому методу эффективной длины.

В рассмотренных условиях экспериментальной отработки применение модифицированного метода эффективной длины действительно позволяет добиться удовлетворительного качества согласования расчетных и экспериментальных данных. При этом имеет место существенное различие между результатами проведенных расчетных исследований, полученных в рамках различных подходов к решению данной задачи из числа рассмотренных не только на затуплении конуса, но и на его боковой поверхности.

Это свидетельствует об обоснованности применения предложенного метода расчета ламинарно-турбулентного теплообмена при решении широкого круга практических задач.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Сформулирована однослойная модель кажущейся турбулентной вязкости, и на основе ее применения получена модификация формулы Прандтля—Ван-Дриеста, обеспечивающая удовлетворительное качество описания экспериментальных данных по конвективному теплообмену на затупленных конусах при экстремально высоких значениях числа Рейнольдса.

2. Показана обоснованность применения этой модели в рассмотренных условиях обтекания модели потоком газа.

3. Отмечена возможность применения предложенной модификации формулы Прандтля—Ван-Дриеста для расчета кажущейся турбулентной вязкости во внутренней части пограничного слоя в тех случаях, когда течением газа во внешней области этого слоя пренебречь нельзя.

4. Предложена модификация классического метода эффективной длины, применение которой позволяет качественно снизить рассогласование между расчетными и экспериментальными данными.

5. В рамках модифицированного метода эффективной длины удовлетворительно описывается широкий круг экспериментальных данных, полученных при экстремально высоких значениях числа Рейнольдса.

6. Представляется обоснованным применение предложенного метода для решения широкого круга прикладных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексин А.В.* Моделирование турбулентных пристенных сжимаемых течений. В кн.: Гиперзвуковая аэродинамика и теплообмен спускаемых космических аппаратов и планетных зондов. М.: Физматлит, 2011. С. 458.
2. *Клаузер Ф.* Турбулентный пограничный слой. В сб. Проблемы механики. Вып. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. С. 297.
3. *Coles D.* The Law of the Wake in Turbulent Boundary Layer // *J. Fluid Mech.* 1956. V. 1. № 2. P. 191.
4. *Землянский Б.А., Лунев В.В., Власов В.И. и др.* Конвективный теплообмен летательных аппаратов / Под ред. Землянского Б.А. М.: Физматлит, 2014. 377 с.
5. *Baldwin B.S., Lomax H.* The Layer Approximation and Algebraic Model of Separated Turbulent Flow // *AIAA Paper* 78-0257. 1978.
6. *Cebeci T., Smith A.M.O.* Analysis of Turbulent Boundary Layers. N.Y.—San Francisco—London: Acad. Press, 1974. 404 p.
7. *Van Driest E.R.* On Turbulent Flow near Wall // *J. Aeronaut. Sci.* 1956. V. 23. № 11. P. 1007.
8. *Горский В.В., Пугач М.А.* Сопоставление расчетных и экспериментальных данных по ламинарно-турбулентному теплообмену на поверхности полусферы, обтекаемой сверхзвуковым потоком воздуха // *ТВТ.* 2015. Т. 53. № 2. С. 231.
9. *Горский В.В.* Методика численного решения уравнений двумерного ламинарно-турбулентного пограничного слоя на проницаемой стенке затупленного тела вращения // *Космонавтика и ракетостроение.* 2017. № 3(96). С. 90.
10. *Горский В.В.* Теоретические основы расчета абляционной тепловой защиты. М.: Научный мир, 2015. 688 с.
11. *Уидхопф Дж.Ф., Холл Р.* Измерение теплопередачи на затупленном конусе под углом атаки при переходном и турбулентном режиме течения // *Ракетная техника и космонавтика.* 1972. Т. 10. № 10. С. 71.
12. *Widhopf G.F.* Laminar, Transitional, and Turbulent Heat Transfer Measurement on a Yawed Blunt Conical Nose Tip. TR-0172 (S2816-60). Aerospace Corp. San Bernardino, California, 1972.
13. *Фэй Дж., Ридделл Ф.* Теоретический анализ теплообмена в лобовой точке, омываемой диссоциированным воздухом. В кн.: Проблемы движения головной части ракет дальнего действия. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. С. 217.
14. *Anderson A.D.* Surface Roughness Effect. Boundary Layer Transition Data Correlation and Analysis // *Passive Nose Tip Technology (PANT) Program.* 1974. Part III. SAMSO TR-74-86.
15. *Эккерт Е.* Инженерные методы расчета ламинарного и турбулентного пограничного слоя при обтекании поверхностей с постоянным давлением и температурой потоком газа большой скорости // *Вопросы ракетной техники.* 1957. № 4. С. 3.