Ю. И. Манин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков, Я. И. Белопольская, Ю. Л. Далецкий, О. И. Богоявленский, Ф. А. Березин, Е. С. Фрадкин, Е. А. Новиков, Ю. Б. Седов, А. Е. Орданович, Р. Финн, С. И. Андерссон, Заседания семинара им. И. Г. Петровского по дифференциальным уравнениям и математическим проблемам физики, *УМН*, 1978, том 33, выпуск 5, 209–217

ЗАСЕДАНИЯ СЕМИНАРА ИМ. И. Г. ПЕТРОВСКОГО ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ И МАТЕМАТИЧЕСКИМ ПРОБЛЕМАМ ФИЗИКИ

Заседание 1 марта 1978 г.

1. Ю. И. Манин «Об уравнениях длинных волн со свободной поверхностью». Доклад был основан на работах [1] — [3].

ЛИТЕРАТУРА

[1] D. J. Benney, Some properties of long nonlinear waves, Studies in Appl. Math. 52 : 1 (1973), 45—50.
[2] Б. А. Купершмидт, Ю. И. Манин, Уравнения длинных волн со свободной поверхностью. I. Законы сохранения и решения, Функц. анализ 11 : 3 (1977), 31—42.
[3] Б. А. Купершмидт, Ю. И. Манин, Уравнения длинных волн со свободной поверхностью. II. Гамильтонова структура и высшие уравнения, Функц. анализ 12 : 1 (1978), 25—37.

Заседание 15 марта 1978 г.

1. И. М. Кричевер, С. П. Новиков, «Голоморфные расслоения и уравнение Кадомцева — Петвиашвили (КП)».

I. Уравнение КП (или двумерное уравнение КдФ) возникло в 1970 г. при исследовании устойчивости солитонов относительно медленных поперечных возмущений. Степень универсальности его физического вывода такая же, как и для КдФ (см. [1]). В работах [2], [3] указано представление типа Лакса для этого уравнения. Оно имеет вид

$$3(u_y+u_{xx})=4w_x;\qquad w_y-u_t=w_{xx}-\frac{3}{2}uu_x-u_{xxx}\tag{1}$$

и эквивалентно уравнении коммутативности линейных операторов:

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}-L,\ \frac{\partial}{\partial t}-A\right]=0,\tag{2}$$

где $L=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+u(x,y,t)$, $A=\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\frac{3}{2}u\frac{\partial}{\partial x}+w(x,y,t)$. Подстановка $u\to\mu(t)+$ $+u\left(x+\frac{3}{2}\nu(t),\ y,\ t\right)$, $w\to w+y\frac{\partial\mu}{\partial t}$; $\frac{\partial\nu}{\partial t}=\mu$ для любой $\mu(t)$ переводит решение в решение. Отсюда следует, что корректная задача Коши по t возможна лишь для классов функций, ограниченных по y. Для убывающих при $|x|\to\infty$ решений имеем $\frac{\partial}{\partial y}\int u\,dx=0$. Поэтому величина $\int u\,dx\,dy$, являющаяся формально интегралом (1), может существовать только, если $\int u\,dx=0$. При том же условии величина $\int u^2\,dx\,dy$ является также законом сохранения. Остальные законы сохранения (1) выписываются сложнее.

II. Известен целый ряд классов точных решений уравнения КП, обладающих замечательными свойствами.

1. Солитоноподобные решения [2], полученные из методов теории рассеяния, зависящие, по существу, от произвольной функции одной переменной k.

2. Квазипериодические по x, y, t решения (см. обзор [4]), определяемые по любой римановой поверхности Γ рода g с отмеченной точкой и дивизору D степени g (или одномерному голоморфному расслоению над Γ степени g).

3. Рациональные по x, y, t решения, убывающие при $x \to \infty$. Среди неособых решений этого типа содержатся «слабо локализованные» солитоны $u(x - at, y - bt)$, убывающие при $x^2 + y^2 \to \infty$ как $(x^2 + y^2)^{-1}$, а также соответствующие многосолитонные решения [5]. Общие рациональные решения этого класса (возможно с особенностями) имеют вид

$$u(x, y, t) = -2 \sum_{j=1}^{n} (x - x_j(y, t))^{-2}, \tag{3}$$

где зависимость $x_j(y, t)$ от y, t изоморфна полностью «теории Мозера — Калоджеро» частиц на прямой с гамильтонианом

$$H(x, p) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} p_j^2 + 2 \sum_{i<j} (x_i - x_j)^{-2}$$

(см. [4], [6]).

III. Целью новой работы докладчиков [7] является развитие алгебро-геометрических методов построения решений уравнения КП, основанное на теории голоморфных векторных расслоений над алгебраическими кривыми Γ рода g, изучавшихся в работах М. Ф. Атия, Дж. Мамфорда и А. Н. Тюрина начала 60-х годов. Укажем, что стабильное l-мерное расслоение степени lg над Γ рода g, в котором задан набор голоморфных сечений $\eta_1, \ldots, \eta_l$, определяется следующими инвариантами: а) набором точек $\gamma_1, \ldots, \gamma_{lg} \in \Gamma$, в которых сечения линейно зависимы; в) векторами

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{lg}, \quad \alpha_j = \alpha_j^q \quad (q = 1, \ldots, l),$$

$$\sum_{q=1}^{l} \alpha_j^q \eta_q \big|_{P=\gamma_j} = 0 \quad (j = 1, \ldots, lg). \tag{4}$$

Можно считать, что в общем положении $\alpha_j^l = 1$.

Строится векторный (некоммутативный) аналог функции Бейкера — Ахиезера $\psi(\vec{x}, P)$; $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, где $P \in \Gamma$, x_j — параметры, $\psi = (\psi^1, \ldots, \psi^l)$. Она должна удовлетворять следующим требованиям:

а) Вне точки $P_0 \in \Gamma$ функция ψ мероморфна. Ее полюса не зависят от x_j и находятся в точках $\gamma_1, \ldots, \gamma_{lg}$.

б) Вычеты $\varphi^q(\mathrm{x})$ компонент ψ^q в точках γ_j все пропорциональны φ_j^l с постоянными коэффициентами α_j^q

$$\varphi_j^q(\vec{x}) = \alpha_j^q \varphi_j^l(\vec{x}). \tag{5}$$

с) При $P \to P_0$ вектор-функция ψ имеет вид:

$$\psi(\vec{x}, k) = \Big(\xi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(\vec{x}) k^{-1}\Big) \Psi_0(\vec{x}, k),$$

где $\xi_0 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\xi_i(\vec{x})$ — векторы, $k^{-1} = k^{-1}(P)$ — локальный параметр в окрестности P_0. Матричная $(l \times l)$ функция $\Psi_0(\vec{x}, k)$ такова, что все $A_i = \dfrac{\partial \Psi_0}{\partial x_i} \Psi_0^{-1}$ полиномиальны по k. Матрицы $A_i(\vec{x}, k)$ удовлетворяют уравнениям совместности

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i} = [A_j, A_i]. \tag{6}$$

Теорема 1. *Вектор-функция* $\psi(\mathbf{x}, P)$ *с указанными выше аналитическими свойствами* а), б), в) *существует и единственным образом определяется набором* $\{\Gamma, P_0, \gamma_j, \alpha_j, A_i(\vec{x}, k)\}$ *при условии* $\Psi_0(\vec{0}, k) = 1$.

Для одной переменной x эта функция строится в [8] в связи с классификацией коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов.) Рассмотрим $l \times l$ матрицу $\varkappa = (\varkappa_{ij})$, где $\varkappa_{l1} = k$, $\varkappa_{j,j+1} = 1$, а все остальные $\varkappa_{ij} = 0$. Имеем $\varkappa^l = k\hat{1}$. Зададим A_1, A_2, A_3 в виде

1. $l=2$. $\quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_0 & 0 \end{pmatrix} + \varkappa, \quad A_2 = \varkappa^2, \quad A_3 = \varkappa^3 + k\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_{21} & 0 \end{pmatrix} + (q_{ij}),$

2. $l=3$. $\quad A_1 = \varkappa + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ u_0, u_1, & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \varkappa^2 + (q_{ij}), \quad A_3 = \varkappa^3 + (p_{ij}),$

где функции p_{ij}, q_{ij} не зависят от k. Из соотношений (6) зависимость $u_0, u_1, \dots, p_{ij}, q_{ij}$ от x, y, t определяется. В частности, для $l = 2$ все сводится к одной функции $u_0(x, t)$, удовлетворяющей уравнению КдФ. Построим по этим функциям функцию $\Psi_0(x, y, t, k)$, а затем и вектор-функцию ψ.

Теорема 2. *Вектор-функция Бейкера—Ахиезера* $\psi(x, y, t, P)$ *аннулируется скалярными линейными операторами* $\left(\frac{\partial}{\partial y} - L\right)\psi = 0$, $\left(\frac{\partial}{\partial t} - A\right)\psi = 0$. *Вид* L *и* A *тот же, что и выше, а их коэффициенты даются формулами* $u(x, y, t) = -2\frac{\partial}{\partial x}\xi_1^l(x, y, t)$, $w = -\frac{3}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\xi_1^l$. *Пара* u, w *удовлетворяет уравнению КП.*

Точные формулы выводятся и обсуждаются в [7].

Пусть $A_i = \varkappa^i (i = 1, \dots, l(g+1) - 1 = N)$. Построим функцию $\Psi_0(\vec{x}, k)$, а затем $\vec{\psi}(\vec{x}, k)$. Естественно определяется зависимость параметров Тюрина γ, α от $\vec{x} = (x_1, \dots, x_N)$.

Теорема 3. *Существует коммутативная* $(l(g+1) - 1)$*-мерная группа преобразований пространства модулей* l*-мерных векторных голоморфных расслоений степени* lg *над неособой алгебраической кривой рода* g. *Ее генераторы задаются мероморфными векторными полями.*

Заметим, что это пространство модулей l^2g-мерно. Для $l = 1$ оно совпадало с тором Якоби $I(\Gamma)$, который сам и являлся этой группой. При $l > 1$ все пространство модулей уже не является группой. На этом пространстве действует группа $GL(l, C)$, переставляющая оснащение. Важно отметить, что действие построенной нами группы размерности $l(g+1) - 1$ не коммутирует с действием $GL(l, C)$ и тем самым не определено на пространстве модулей расслоений без оснащений.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах, ДАН 192 : 4 (1970), 291—294.

[2] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи теории рассеяния. I, Функц. анализ 8 : 3 (1974), 43—53.

[3] В. С. Дрюма, Об аналитическом решении двумерного уравнения Кортевега — де Фриза, Письма в ЖЭТФ 19 : 12 (1973), 219—225.

[4] И. М. Кричевер, Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений, УМН 32 : 6 (1977), 183—208.

[5] L. A. Bordag, A. R. Its, V. B. Matveev, S. V. Manacov, V. E. Zakharov, Two-dimension solitons of Kadomtzev—Petviashvely equations, Phys. Lett. (1978).

[6] И. М. Кричевер, О рациональных решениях уравнения Кадомцева—Петвиашвили и об интегрируемых системах N частиц на прямой, Функц. анализ 12 : 1 (1978).

[7] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и уравнение Кадомцева—Петвиашвили, Функц. анализ 12 : 4 (1978).

[8] И. М. Кричевер, Коммутативные кольца линейных дифференциальных операторов, Функц. анализ 12 : 3 (1978), 20—31.

Заседание 22 марта 1978 г.

1. Я. И. Белопольская, Ю. Л. Далецкий «Вероятностные методы исследования квазилинейных параболических систем».

Пусть X и Y — вещественные гильбертовы пространства (возможно, конечномерные), $u(x, t)(t \geqslant t_0, x \in X)$ — функция со значениями в Y, $[\nabla \otimes u(x)]h = u'(x)h$ — производная по x в направлении h. Рассматривается задача Коши (в обратной форме, что удобно при использовании теории диффузионных процессов)

$$(1) \qquad \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + l_u(u(t, x)) = 0, \qquad u(\tau, x) = u_0(x), \qquad t \leqslant \tau.$$

Здесь $l_v(u) = \frac{1}{2}(A_v A_v^* \nabla, \nabla) u + (a_v, \nabla) u + b_v(A^*\nabla, u) + c_v u$ — линейный (при фиксированном $v = v(t, x)$) дифференциальный оператор с коэффициентами $A_v = A(t, x, v) \in \mathfrak{S}_2(x)$, $a_v = a(t, x, v) \in X$, $b_v = b(t, x, v) \in L_2(Y \times X, Y)$, $c_v = c(t, x, v) \in L(Y)$, $(t_0 \leqslant t \leqslant \tau, x \in X, v \in Y)$, где $L(X)$, $\mathfrak{S}_2(X)$, $L_2(Y \times X, Y)$ — соответственно пространства линейных, гильберто-шмидтовских и билинейных, гильберто-шмидтовских по второй компоненте операторов, действующих в указанных пространствах.

Наряду с (1), рассматривается стохастическая система

$$(2) \qquad \xi(t) = x + \int_\theta^t a(s, \xi(s), u(s, \xi(s)))\, ds + \int_\theta^t A(s, \xi(s), u(s, \xi(s)))\, dw(s),$$

$$(3) \qquad \eta(t, \theta) y = y + \int_\theta^t c^*(s, \xi(s), u(s, \xi(s)))\, \eta(s, \theta) y\, ds + \int_0^t b^*(s, \xi(s), u(s, \xi(s)))(\eta(s, \theta) y, dw(s)),$$

$$(4) \qquad \langle y, u(t, x)\rangle_Y = M\langle \eta(\tau, t) y, u_0(\xi(\tau))\rangle_Y,$$

где $\langle b^*(y, x), z\rangle_Y = \langle y, b(z, x)\rangle_Y$, $z, y \in Y$, $x \in X$.

Решение этой системы порождает обобщенное решение $u(t, x)$ задачи (1), марковский процесс $\xi(t)$ и операторный мультипликативный функционал $\eta(t, \theta)$ от него, через которые обобщенное решение представляется формулой (4).

Предполагается, что коэффициенты a_v, A_v растут не быстрее $\| x \|$ и $\| v \|^p$ $(p > 0)$ по x и v соответственно, b_v — не быстрее $\| v \|^p$ и ограничены по x, а c_v подчинены оценке $\langle c_v h, h\rangle_Y \leqslant \| h \|^2[\rho_0 + \rho_1 \| v \|^p]$, означающей наличие в системе диссипации при $\rho_0 < 0$.

Кроме того предполагается липшицевость всех коэффициентов. Невырожденность оператора A не предполагается.

При этих предположениях доказывается сходимость метода последовательных приближений $\frac{\partial u_{k+1}}{\partial t} + l_{u_k}(u_{k+1}) = 0$ к единственному обобщенному решению задачи на временном интервале, который при достаточно большой диссипации (зависящей от u_0) сколь угодно велик. При соответствующей гладкости коэффициентов доказывается сходимость производных последовательных приближений и гладкость решения.

Эти результаты обобщают результаты М. И. Фрейдлина [1], который рассматривал случай одного уравнения в конечномерном X с ограниченными по u коэффициентами оператора l_u. Доказательства существенно опираются на свойства операторных мультипликативных функционалов [2].

Более общие системы типа $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}(AA^*\nabla, \nabla)u + b(t, x, u, \nabla \otimes u) = 0$, где $A = A(t, x, u, \nabla \otimes u)$ сводятся к (1) при достаточной гладкости коэффициентов путем многократного почленного дифференцирования. Использование одного приема, принадлежащего С. Д. Эйдельману [3], позволяет таким образом рассмотреть и системы, нелинейные относительно вторых производных.

Описанные результаты распространяются на случай, когда X заменяется гладким многообразием, а $X \times Y$ — векторным расслоением π: $E \to X$ (см. [4]).

ЛИТЕРАТУРА

[1] М. И. Фрейдлин, О существовании в целом гладких решений вырождающихся квазилинейных уравнений, Матем. сб. **78(120)** : 3 (1969), 332—348.

[2] Я. И. Белопольская, Ю. Л. Далецкий, Диффузионные процессы в гладких банаховых пространствах и многообразиях, Труды ММО 37 (1978).

[3] С. Д. Эйдельман, Параболические системы, М., «Наука», 1964.

[4] Ю. Л. Далецкий, Мультипликативные операторы от диффузионных процессов и дифференциальные уравнения в сечениях векторных расслоений, УМН 30 : 2 (1975), 209—210.

Заседание 29 марта 1978 г.

1. О. И. Богоявленский «Исследование автомодельных движений идеального самогравитирующего газа».

Автомодельные сферически-симметричные адиабатические движения идеального самогравитирующего газа при наличии ударных волн впервые были рассмотрены в работах [1], [2] в качестве модели взрыва сверхновых звезд. Уравнения газовой динамики (с учетом ньютоновского тяготения) для автомодельных движений сводятся к некоторой автономной системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящей от двух параметров — $\gamma > 1$ и ω: $1 < \omega < 3$, где γ — показатель адиабаты, ω — показатель автомодельности.

В данной работе проведено полное качественное исследование трехмерной системы автомодельных уравнений с помощью метода максимально невырожденной компактификации динамической системы. А именно, построены компактное многообразие S с границей Γ (имеющей углы) и динамическая система на S, которая эквивалентна исходной системе автомодельных уравнений внутри S, гладко продолжается на границу Γ и имеет только невырожденные особые точки. Исследование особых точек и их сепаратрис позволило получить полное перечисление всех асимптотических режимов поведения автомодельных решений.

Система автомодельных уравнений для показателя автомодельности $\omega = 5/2$ имеет первый интеграл $F = H^{4-3\gamma}\Phi^{-1}$, где H и Φ — монотонные функции автономной системы, являющиеся интегралами энергии и адиабатичности [2] для неавтономной системы автомодельных уравнений. При $\gamma < 4/3$ поверхности уровня интеграла F являются двумерными цилиндрами, которые пересекают одну из компонент границы Γ по циклам — замкнутым интегральным кривым динамической системы. Вследствие этого в некоторых автомодельных решениях при $\gamma < 4/3$, $\omega = 5/2$ газ совершает бесконечное число радиальных колебаний.

Задача о взрыве звезды [1], [2] состоит в отыскании автомодельных решений, которые сопрягаются через ударную волну с равновесным состоянием газа. Все решения параметризуются числом Маха M движения ударной волны ($1 < M < \infty$). В задаче о взрыве звезды получены следующие новые результаты.

1) При $\gamma > 4/3$, $\omega = 5/2$ все решения ($1 < M < \infty$) имеют расширяющуюся пустоту внутри газа, причем газ разлетается от центра монотонно. 2) При $\gamma < 4/3$, $\omega = 5/2$, а также при $\gamma < 2(\omega - 1)/3$, при всех M нет решений с расширяющейся пустотой внутри газа. 3) При $\gamma < 4/3$, $\omega = 5/2$, $M \approx 1$ после прохождения ударной волны возникают замедляющиеся пульсации газа с постоянной амплитудой, связанные с предельными циклами динамической системы. Такие же пульсации (большой амплитуды) возникают при $1 < \gamma < 9/7$, $\omega = 5/2$, $M \gg 1$; при $9/7 < \gamma < 4/3$, $\omega = 5/2$, $M \gg 1$ в рассматриваемом классе движений газа не существует решений задачи о взрыве звезды. 4) При $\gamma < 4/3$, $\omega > 5/2$, $M \approx 1$ после прохождения ударной волны газ при $t \to \infty$

возвращается к состоянию равновесия, при этом при $\gamma < \gamma_1 = 4[3 + (2\omega - 5)^2/8(\omega - 1)]^{-1}$ происходят бесконечные затухающие радиальные пульсации газа. 5) При $\gamma < 4/3$, $10/7 < \omega < 5/2$ в каждом решении реализуется некоторое конечное (и сколь угодно большое при $M \to 1$) число колебаний газа. При $\gamma < \gamma_1$ имеется счетное множество решений, продолжающихся до центра симметрии и соответствующих взрывному типу разрушения равновесия звезды без выделения энергии. Эти решения обобщают одно точное решение работы [2]. Все остальные решения имеют расширяющуюся пустоту внутри газа.

ЛИТЕРАТУРА

[1] P. A. Carrus, P. A. Fox, F. Haas, Z. Kopal, The propagation of shock waves in a stellar model, Astroph. J. 113 : 3 (1951), 496—518.

[2] Л. И. Седов, Методы подобия и размерности в механике, М., «Наука», 1954, 1977.

Заседание 5 апреля 1978 г.

1. Ф. А. Березин «Континуальные интегралы в нерелятивистской квантовой механике».

В докладе был указан способ вычисления символов операторов эволюции и рассеяния с помощью континуальных интегралов. Была описана квазиклассическая асимптотика этих операторов.

Заседание 12 апреля 1978 г.

1. Е. С. Фрадкин «Регулярный метод квантования и получения S-матрицы для произвольной теории со связями».

Проведено квантование и получен производящий функционал всех функций Грина для теории с произвольными связями (как Ферми, так и Бозе). Показано, что «ковариантные» методы (Де-Витта, Фаддеева — Попова и др.) неприменимы к теориям с рангом, большим единицы.

Заседание 19 апреля 1978 г.

1. Е. А. Новиков, Ю. Б. Седов «Пример течения идеальной жидкости со стохастическими свойствами».

Рассмотрим двумерное течение идеальной жидкости, создаваемое системой четырех одинаковых линейных вихрей. Декартовы координаты вихрей $x_\alpha(t)$, $y_\alpha(t)$ ($\alpha = 1, \ldots, 4$) удовлетворяют гамильтоновой системе уравнений

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_\alpha}, \qquad \frac{dy_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_\alpha} \tag{1}$$

$$H = -\sum_{\alpha<\beta} \ln l_{\alpha\beta} \tag{2}$$

где $l_{\alpha\beta}$ — расстояние между вихрями. Из инвариантности относительно сдвигов и поворотов системы отсчета получаются дополнительные три интеграла движения

$$\sum_\alpha x_\alpha, \qquad \sum_\alpha y_\alpha, \qquad \sum_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2) \tag{3}$$

и их комбинация [1]:

$$6r^2 = \sum_{\alpha<\beta} l_{\alpha\beta}^2 \tag{4}$$

(r — среднеквадратичное расстояние между вихрями).

Система (1) интегрировалась численно. При $t = 0$ три вихря помещались в вершины равностороннего треугольника, а четвертый вихрь помещался в различные точки вблизи центра тяжести треугольника в пределах 1/10 радиуса описанной окружности. Расчеты показали, что имеет место локальная экспоненциальная неустойчивость траекторий в восьмимерном фазовом пространстве (координаты четырех вихрей) с евклидовой метрикой.

Фазовое пространство естественным образом разбивается на четырнадцать ячеек, отвечающих различным выпуклым и невыпуклым конфигурациям вихрей. Было прослежено $\sim 1{,}7 \cdot 10^4$ переходов траектории между ячейками. Относительное отклонение от интегралов (2) — (4) к концу счета не превышало сотых долей процента.

С помощью спектрального анализа показано отсутствие квазипериодичности. Это означает, что рассматриваемое течение идеальной жидкости не является вполне интегрируемой системой. Обнаружены глобальные стохастические свойства системы (эргодичность и перемешивание), отвечающие указанному разбиению фазового пространства.

Относительное движение вихрей лиувиллево. Определяющим параметром микроканонического распределения вероятностей, построенного по инвариантам (2) и (4), в случае четырех одинаковых вихрей является введенная в [1] величина $\theta = r^{12} \exp\{2H\}$ (аналог температуры). Выполненные численные эксперименты отвечают $\theta \sim 2{,}4$.

Выражаем признательность В. И. Арнольду за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. А. Новиков, Динамика и статистика системы вихрей, ЖЭТФ, 68 : 5 (1975), 1868—1882.

Заседание 26 апреля 1978 г.

1. А. Е. Орданович «О квазиупорядоченных образованиях в турбулентных потоках (когерентные структуры)».

Заседание 24 мая 1978 г.

1. Р. Финн (США) «О форме висящей капли жидкости».

Описывается наиболее общая равновесная конфигурация симметричной свисающей жидкой капли.

Заседание 7 июня 1978 г.

1. С. И. Андерссон (Швеция) «Келеровы структуры на многообразии решений дифференциальных операторов с частными производными».

Введение. Цель этого доклада — указать один подход к описанию многообразия решений нелинейного оператора с частными производными (ОЧП), а именно — с позиций келеровой геометрии. Можно сказать, что определенные келеровы данные для многообразия решений выражают *естественную меру тривиальности нелинейности изучаемой задачи.*

Предлагаемая теория по существу делится на три разные части: теорию линейных ОЧП (с переменными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами), келерову геометрию банаховых многообразий и некоторые результаты об устойчивости линеаризации (в том смысле, что каждый элемент ядра касательного отображения (производной Фреше) касается интегральной кривой) для нелинейных ОЧП (полиномиального типа). Изложение будет вестись в основном на примерах. Подробная публикация общей теории будет дана в другой статье, для которой данное сообщение является предварительным.

Мне приятно выразить свою благодарность профессорам В. И. Арнольду и О. А. Олейник за приглашение принять участие в заседаниях этого семинара во время моего пребывания в МГУ.

1°. Линейные ОЧП. Пусть $P(D)$ — ОЧП порядка m с постоянными коэффициентами, причем символ $P(\xi)$ подчинен условиям

$$(1) \qquad \operatorname{Im} P(\xi) = 0; \quad P'(\xi) \neq 0; \quad \text{для} \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad \text{и} \quad P(\xi) = 0.$$

Обычным методом строятся фундаментальные (для будущего и прошлого) решения $E_\pm$, осуществляющие непрерывные отображения $H_c^s \to H_{\mathrm{loc}}^{s+m-1}$ и такие, что оператор

$S = E_+ - E_-$ удовлетворяет соотношению

$$(2) \qquad (S(\varphi), \varphi) = \frac{-i}{(2\pi)^{n-1}} \int\limits_{P(\xi)=0} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \frac{ds(\xi)}{|P'(\xi)|} = -\overline{(S(\varphi), \varphi)}, \quad \varphi \in C_0^\infty.$$

Следовательно, S является *кососимметрическим*; в силу равенства $PS = 0$ он осуществляет отображение в множество $\{u \mid Pu = 0\}$.

Простой пример дается уравнением Клейна — Гордона: $P(\xi) = \xi_0^2 - \xi_1^2 - \ldots - \xi_n^2 - m^2$. Здесь

$$E_\pm(f)(x) = \int \pm\theta(\pm(t-s))\,\Delta(t-s, x'-y')\,f(s, y')\,ds\,dy',$$

$x = (t, x')$, $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\theta(t)$ — функция Хевисайда, $\tilde{\Delta}(\xi) = -i(\operatorname{sign}\xi_0)\delta(\xi^2 - m^2)$ (функция Швингера).

Аналогично, например, для оператора $P(D)$ главного типа можно построить (для будущего и прошлого) параметриксы $\mathscr{E}_\pm$ такие, что $P\mathscr{E}_\pm = I$ (по модулю операторов с ядрами класса C^∞), а оператор $\mathscr{S} = \mathscr{E}_+ - \mathscr{E}_-$ *при естественных граничных условиях на бесконечности* является кососимметрическим и осуществляет отображение в множество $\{u \mid Pu = 0$, u удовлетворяет граничным условиям на бесконечности$\}$. Наконец, при естественном выборе граничных условий, аналогичные операторы $\mathscr{S}$ могут быть построены для широких классов ОЧП с *переменными* коэффициентами (а также для псевдодифференциальных операторов). В $\mathbb{R}^n$, например, такое построение использует нелокальный вариант интегральных операторов Фурье, основанный на глобальном исчислении для $S^m_{\rho,\delta}$ — классов Кумано-го. Построение аналогично тому, которое имеется в теореме 6.6.2 статьи [1], но мы фиксируем исчисление граничными условиями на бесконечности.

2°. Келерова геометрия, связанная с ОЧП. Функциональное пространство, в котором действует P (выбранное априори), снабжено, разумеется, комплексной структурой; однако имеются более естественные комплексные структуры, внутренним образом связанные с P. Их свойства дают информацию о том нелинейном операторе, линеаризацией которого является P.

Укажем модель для линейного случая. Пусть $(\mathscr{H}, \omega)$ — симплектическое гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot, \cdot\rangle$. По лемме Рисса $\omega(f, g) = \langle Af, g\rangle$, где A — кососимметрический оператор и $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, если ω невырождена. Полярное разложение $A = |A|\,J$ порождает комплексную структуру J, т. е. $J^2 = -I$ и $\omega(Jf, Jg) = \omega(f, g)$. Введем обозначение $\alpha(f, g) = -\omega(Jf, g) = \langle |A|\,f, g\rangle$; тогда мы получим эрмитово скалярное произведение для J, положив $\Lambda(f, g) = \alpha(f, g) + i\omega(f, g)$.

Для операторов S (заданных посредством (2)) и операторов $\mathscr{S}$, описанных выше, возникают *слабо* симплектические формы

$$\Omega(f, g) = (\mathscr{S}f, g)_{\mathfrak{H}}$$

где $(\cdot, \cdot)_{\mathfrak{H}}$ означает индуцированное скалярное произведение в факторпространстве $\mathscr{H}/\operatorname{Ker}\mathscr{S}$ ($\mathscr{H}$ — исходное пространство, в котором действует P). Например, в ситуации, определяемой соотношениями (1) и (2), получаем $\mathscr{H} = H^s$, $\operatorname{Ker} S = \{u \in H^s \mid \operatorname{supp} u \cap \operatorname{Char} P = \varnothing\}$, где $\operatorname{Char} P = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid P(\xi) = 0\}$. Следовательно, после исправления на этом *большом* ядре, приходим к *слабо* симплектической форме.

Применив построение, изложенное выше на примере, к заданному оператору $P(x, D)$, получаем почти эрмитову структуру (Λ, Ω, J), где Λ — риманова метрика (связанная с энергией), Ω — почти симплектическая форма, а J — почти комплексная структура. На самом деле в линейном случае (Λ, Ω, J) оказывается келеровой структурой, поскольку тривиально проверяются интегрируемость J и глобальная замкнутость Ω.

3°. Нелинейные ОЧП. Описанная выше келерова структура становится интересной лишь тогда, когда указанное построение осуществляется глобально на многообразии решений нелинейного ОЧП (полиномиального типа); обозначим его через P. Если сопоставить линеаризации TP оператора P почти эрмитову структуру (Λ, Ω, J) и доказать *устойчивость линеаризации*, то мы сможем произвести построение (Λ, Ω, J) в каждом касательном пространстве к многообразию решений P. Вопрос об интегрируемости возникшей глобальной почти комплексной структуры и о замкнутости полученной глобальной почти симплектической формы является *в высшей степени нетривиальным*. По существу равенство или неравенство нулю кручения J и $d\Omega$ служит мерой нелинейности рассматриваемой задачи. Другими словами, возможность введения почти келеровой или келеровой глобальной структуры на многообразии решений P существенно зависит от *природы нелинейностей в операторе P*.

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Duistermaat, L. Hörmander, Fourier integral operators. II, Acta Math. 128 : 3—4 (1972), 183—269.