O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, On a principle of linearization and invariant manifolds for problems of magnetic hydrodynamics, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1973, Volume 38, 46–93

О.А.Ладыженская, В.А.Солонников

О ПРИНЦИПЕ ЛИНЕАРИЗАЦИИ И ИНВАРИАНТНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ ДЛЯ ЗАДАЧ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

§ I. Введение.

В работах [I-3] дано оправдание известных принципов линеаризации на стационарных и периодических решениях для уравнений Навье-Стокса в случае несжимаемых жидкостей, заполняющих ограниченный объем. В этих работах, а также в работах по этому принципу для систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений первого порядка в банаховых пространствах с ограниченными операторами, предшествовавших работам [I-3], было выяснено (см. об этом в [4-7]), что оправдание принципа линеаризации и наличие инвариантных многообразий типа "усов седла" (теорема Адамара-Перрона) базируется на корректности и однозначной разрешимости нелинейной задачи в окрестности последуемого (основного) решения, причем в случае устойчивости основного решения разрешимость должна иметь место на всей полуоси $t\geqslant 0$. В задачах гидродинамики приходится иметь дело с задачей Коши

$$\frac{du}{dt} + A(t)u + Ku = f(t), \quad u\big|_{t=0} = u_0 \qquad (I)$$

для уравнений с неограниченными операторами $A(t)$ и K, действующими в гильбертовом пространстве H. Под корректностью задачи (I) понимается то, что ее решение $u(t)$ принадлежит тому же пространству H_1 (H_1 есть гильбертово пространство, плотно вложенное в H), которому оно принадлежит в начальной момент времени, и непрерывно меняется в норме H_1 при непрерывном изменении начального условия в этой же норме.

Помимо этих фактов, касающихся нелинейной задачи (I), надо для соответствующих (I) линеаризованных задач иметь теорему об их однозначной разрешимости в том же пространстве H_1 на всей полупрямой $t\geqslant 0$ и теорему о том, что разрешающие операторы этих задач имеют свойства аналитической полугруппы (см. [II, I2]).

В данной работе мы устанавливаем все эти свойства для уравнений вида (I), где $A(t)=A_0+A_1(t)$, A_0 - линейный самосопряженный положительно определенный оператор с плотной в H областью определения H_2, а $A_1(t)$ и K - подчиненные A_0 в определенном смысле линейный и нелинейный операторы, определенные на H_2. Их доказательства находятся в §§ 2 и 3. С их помощью уже известными способами исследуется принцип линеаризации на стационарных и вынужденных периодических решениях уравнения (I) и устанавливается наличие инвариантных многообразий типа "узлов седла". Мы проводим эти рассуждения в §§ 4,5, не претендуя на оригинальность. Они близки к рассуждениям, имеющимся в работах [4-7, 2d].

В §§ 6,8 результаты §§ 2-5 применяются к двум задачам магнитной гидродинамики, рассмотренным нами ранее в работе [8]. Мы показываем, что они являются частными случаями задачи (I), рассмотренной в §§ 2-5. Этот факт весьма нетривиален для второй задачи. В ней оператор A_0 не является самосопряженным в естественном скалярном произведении пространства H, но оказывается таковым в некотором другом скалярном произведении, порождающем метрику в H, эквивалентную исходной. Обратим внимание и на то, что во второй задаче приходится иметь дело с нелокальными краевыми условиями сингулярного типа.

§ 2. Задача Коши для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве. Исследование соответствующих линеаризированных уравнений.

Пусть H есть комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $|\cdot|$. Рассмотрим в этом пространстве задачу Коши

$$\frac{du}{dt}+A_0u+A_1(t)u+Ku=f(t), \qquad u|_{t=0}=u_0\,, \tag{2.I}$$

для $t\geq 0$. Искомое решение $u(t)$ и свободный член $f(t)$ суть функции со значениями в H, а A_0, $A_1(t)$ и K суть операторы, обладающие следующими свойствами:

I) A_0 - линейный, положительно определенный, самосопряженный оператор с плотной в H областью определения H_2.

Введем два комплексных гильбертовых пространства $H_1=\mathcal{D}(A_0^{1/2})$ и $H_2=\mathcal{D}(A_0)$ со скалярными произведениями

$$(u,v)_1=(A_0^{1/2}u,\,A_0^{1/2}v), \qquad (u,v)_2=(A_0u,A_0v).$$

Соответствующие им нормы обозначим через $|\cdot|_1$ и $|\cdot|_2$ соответственно и будем считать, что

$$\beta^{-1}|u|\leq|u|_1\leq\beta|u|_2\,, \qquad \beta=Const>0. \tag{2.2}$$

Заметим, что $|u|_1^2\leq|u||u|_2$ и H_2 плотно в H_1, а H_1 плотно в H.

2) $A_1(t)$ при каждом $t\in[0,T]$ является линейным оператором в H, удовлетворяющим неравенству

$$|A_1(t)u|\leq\mu(t)|u|_1^{\delta}|u|_2^{1-\delta}, \qquad \forall u\in H_2\,, \tag{2.3}$$

где δ - фиксированное число из $(0,1)$, а $\mu(t)\in L_p(\tau,\tau+1)$, $p>\frac{2}{\delta}$, для $\forall\ \tau\in[0,T]$ и $\hat{\mu}=\sup\limits_{\tau\in[0,T]}\|\mu(t)\|_{L_p(\tau,\tau+1)}<\infty$. Для $\forall u\in H_2$ функция $A_1(t)u$ является элементом $L_p(\tau,\tau+1;H)$, $\forall\tau\in[0,T)$.

Наконец, K есть нелинейный оператор из H в H, удовлетворяющий одному из следующих двух условий:

3) при $\forall u,\ u'\in H_2$

$$|Ku|\le \varepsilon(|u|_1)|u|_1^{\delta}\,|u|_2^{1-\delta} \tag{2.4}$$

и

$$\begin{aligned}|Ku-Ku'|\le \varepsilon_1(|u|_1+|u'|_1)|u-u'|_1^{\delta}\,|u-u'|_2^{1-\delta}+\\ +\mu_1(|u|_1+|u'|_1)(|u|_2^{1-\delta}+|u'|_2^{1-\delta})|u-u'|_1,\end{aligned} \tag{2.5}$$

где $\varepsilon(\tau),\ \varepsilon_1(\tau),\ \mu_1(\tau)$ – неотрицательные неубывающие, непрерывные функции $\tau\ge 0$, причем $\varepsilon(0)=\varepsilon_1(0)=0$, или

3$'$) $Ku=K(u,u)$, где $K(v,w)$ -линейно зависит от w и удовлетворяет при $\forall v,\ v',\ w\in H_2$ неравенствам:

$$|K(v,w)|\le\mu_1(|v|_1)|w|_1^{\delta}\,|w|_2^{1-\delta}, \tag{2.6}$$

$$|K(v,w)-K(v',w)|\le\mu_2(|v|_1+|v'|_1)|w|_1^{\delta}\,|w|_2^{1-\delta}\,|v-v'|_1, \tag{2.7}$$

в которых $\mu_1(\tau)$ и $\mu_2(\tau)$ – неотрицательные, неубывающие, непрерывные функции τ. Нетрудно видеть, что из (2.6) следует (2.4) с $\varepsilon(\tau)=\mu_1(\tau)$, а из (2.6) и (2.7) следует (2.5) с $\varepsilon_1(\tau)=\mu_1(\tau)$ и $\mu_1(\tau)=\mu_2(\tau)\tau^{\delta}$. Операторы $A_1(t)$ и K, вообще говоря, неограничены и их областью определения является $H_2\subset H$.

Введем два пространства: $L_2(0,T;H)$ и W_T. Элементами первого являются измеримые по t функции $u(t)$ со значениями в H, имеющие конечную норму

$$\|u\|_T=\Big(\int_0^T|u(t)|^2dt\Big)^{1/2}.$$

$L_2(0,T;H)$ есть комплексное гильбертово пространство (полное, как и все другие рассматриваемые в данной работе пространства) со скалярным произведением

$$((u,v))_T=\int_0^T(u(t),v(t))\,dt.$$

W_T – есть комплексное банахово пространство, состоящее из тех элементов $u(t)\in L_2(0;T;H)$, для которых $\frac{du(t)}{dt}$ и $A_0u(t)$ суть элементы $L_2(0,T;H)$, а $A_0^{1/2}u(t)$ при $\forall t\in[0,T]$ есть элемент H_1, непрерывно зависящий от t в норме H_1, причем, $\left(\frac{du(t)}{dt},A_0u(t)\right)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|_1^2\in L_1(0,T)$. Норма в W_T определяется равенством

$$\|u\|_{W_T}=\Big[\Big\|\frac{du}{dt}\Big\|_T^2+\|A_0u\|_T^2+\sup_{0\le t\le T}|u(t)|_1^2\Big]^{1/2}.$$

Известно, что в W_T можно ввести гильбертову структуру с помощью скалярного произведения

$$\int_0^T\Big[\Big(\frac{du(t)}{dt},\frac{dv(t)}{dt}\Big)+(A_0u(t),A_0v(t))\Big]dt,$$

причем соответствующая ему норма эквивалентна норме $\|\cdot\|_{W_T}$. Здесь и ниже T может быть любым положительным числом, а также ∞. В данном параграфе мы исследуем разрешимость задачи Коши для линейного уравнения

$$\frac{du(t)}{dt}+A(t)u=f(t), \quad u\big|_{t=0}=u_0, \tag{2.8}$$

где $A(t)=A_0+A_1(t)$. Докажем, прежде всего, следующую теорему:

Теорема 2.I. При $\forall u_0\in H_1$ и $f(t)\in L_2(0,T;H)$ задача (2.8) однозначно разрешима в W_T. Для ее решения $u(t)$ справедлива оценка

$$\|u\|^2_{W_t}\le 6e^{M(t)}(|u_0|_1^2+\|f\|_t^2),\quad t\le T, \tag{2.9}$$

где $M(t)=2^{\frac{2-\delta}{\delta}}\delta(1-\delta)^{\frac{1-\delta}{\delta}}\int\limits_0^t\mu^{\frac{2}{\delta}}(\tau)\,d\tau$.

Доказательство. Проверим сначала справедливость неравенства (2.9) для решений $u(t)$ задачи (2.8), принадлежащих W_T (из него, очевидно, следует теорема единственности для задачи (2.8) в классе W_T). Для этого перенесем слагаемое $A_1(t)u$ в правую часть уравнения (2.8) и затем подсчитаем квадрат нормы $|\cdot|$ от обеих частей полученного равенства. Это дает

$$|u_t|^2+|u|_2^2+\frac{d}{dt}|u|_1^2=|f-A_1(t)u|^2\le 2(|f|^2+|A_1(t)\,u|^2). \tag{2.10$_1$}$$

Величину $2|A_1(t)u|^2$ оценим с помощью (2.3) и неравенства Юнга так:

$$2|A_1(t)u|^2\le 2\mu^2(t)|u|_1^{2\delta}|u|_2^{2-2\delta}\le\frac{1}{2}|u|_2^2+2^{\frac{2-\delta}{\delta}}\delta(1-\delta)^{\frac{1-\delta}{\delta}}\mu^{\frac{2}{\delta}}(t)|u|_1^2.$$

Ввиду этого

$$|u_t|^2+\frac{1}{2}|u|_2^2+\frac{d}{dt}|u|_1^2\le 2|f|^2+M'(t)|u|_1^2, \tag{2.10$_2$}$$

где $M(t)$ - определенная в теореме 2.I функция. Из (2.10) для $y(t)\equiv|u(t)|_1^2$ следует неравенство

$$y'(t)\le 2|f(t)|^2+M'(t)y(t),$$

которое, в свою очередь, гарантирует оценку

$$y(t)\le e^{M(t)}y(0)+2e^{M(t)}\int\limits_0^t|f(\tau)|^2d\tau. \tag{2.10$_3$}$$

Их (2.10$_2$) и (2.10$_3$) легко получить (2.9).

Разрешимость задачи (2.8) в W_T установим с помощью метода последовательных приближений и того факта, что разрешимость задачи (2.8) в W_T для $A(t)=A_0$ уже доказана ([9_a]). Положим $u^{(0)}=0$, а $u^{(m+1)}$ для $m\ge 0$ определим как решения задач

634 4

$$\frac{du^{(m+1)}}{dt}+A_0u^{(m+1)}=f(t)-A_1(t)u^{(m)},\quad u^{(m+1)}\big|_{t=0}=u_0$$

Покажем, что $\{u^{(m)}\}$ сходятся в норме W_{T_0} при некотором положительном T_0. Разность $v^{(m+1)}=u^{(m+1)}-u^{(m)}$ есть решение задачи

$$\frac{dv^{(m+1)}}{dt}+A_0v^{(m+1)}=-A_1(t)v^{(m)},\qquad v^{(m+1)}\big|_{t=0}=0,$$

принадлежащее, как и все $u^{(m)}$, к W_T. Для него равенство (2.10_I) гарантирует оценку:

$$\|v^{(m+1)}\|^2_{W_t}\leq 2\int_0^t|A_1(\tau)v^{(m)}|^2d\tau\leq$$

$$\leq 2\int_0^t\mu^2(\tau)|v^{(m)}|_1^{2\delta}|v^{(m)}|_2^{2-2\delta}d\tau\leq$$

$$\leq 2\max_{0\leq\tau\leq t}|v^{(m)}(\tau)|_1^{2\delta}\Big(\int_0^t|v^{(m)}|_2^2d\tau\Big)^{1-\delta}\Big(\int_0^t\mu^{\frac{2}{\delta}}(\tau)d\tau\Big)^{\delta}\leq$$

$$\leq 2t^{\delta-\frac{2}{p}}\Big(\int_0^t\mu^p(\tau)d\tau\Big)^{\frac{2}{p}}\|v^{(m)}\|^2_{W_t}$$

Выберем такое положительное $T_0\leq 1$, чтобы

$$2T^{\delta-\frac{2}{p}}\hat{\mu}\equiv q<1.$$

Из последнего неравенства для $v^{(m+1)}$ ясно, что $\{u^{(m)}\}$ будут сходиться в норме W_{T_0} к элементу $u\in W_{T_0}$, являющемуся искомым решением задачи (2.8) на интервале $[0,T_0]$. Т.к. величина T_0 не зависит от u_0 и $u|_{t=T_0}\in H_1$, то аналогичное рассуждение позволит доказать желаемую разрешимость уравнения (2.8) на интервале $[T_0, 2T_0]$ и т.д. пока не исчерпаем весь интервал $[0,T]$.

С помощью неравенства (2.9) выведем другие оценки, необходимые нам при исследовании вопросов устойчивости решений на полубесконечном промежутке $(0,\infty)$ оси t.

<u>Теорема 2.2.</u> Для решения $u(t)$ задачи (2.8) (отметим, что мы будем иметь дело только с решениями из пространства W_T) справедливы неравенства

$$\|u\|^2_{W_\tau}\leq c_1(|u_0|_1^2+\|f\|^2_\tau)+c_2\|u\|^2_\tau \tag{2.11}$$

$$\|ue^{-\sigma t}\|^2_{W_\tau}\leq 2c_1(|u_0|_1^2+\|fe^{-\sigma t}\|^2_\tau)+(2|\sigma|^2c_1+c_2)\|ue^{-\sigma t}\|^2_\tau, \tag{2.12}$$

$$\|u\|^2_{W_\tau} \le c_1 e^{2\gamma\tau}(|u_0|_1^2 + \|f\|^2_\tau), \quad \gamma = \tfrac{1}{2} C_2 \beta^2, \quad \tau \le T \tag{2.13}$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются δ и $\hat{\mu}$ *) и не зависят от T, β — постоянная из (2.2), а σ — произвольное вещественное число.

Доказательство. Неравенства (2.11)-(2.13) доказываются так же, как оценки (4.15), (4.20), (4.21′) работы [10]. Их план получения следующий: представим на $[0,T]$ функцию, равную тождественной единице, в виде $1 = \sum_{k=0}^{N} \psi(t - \frac{3}{4}k) \equiv \sum_{k=0}^{N} \psi_k(t)$, где $\psi(t)$ — неотрицательная гладкая функция, равна 1 для $|t| \le \frac{1}{4}$ и равная нулю для $|t| \ge \frac{1}{2}$. Функции $v_k(t) = u(t)\psi_k(t)$ являются решениями задач

$$\frac{dv_k}{dt} + A(t)v_k = f(t)\psi_k(t) + u(t)\psi_k'(t) \equiv f_k(t)$$

$$v_k\Big|_{t=t_k} = u_0^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{для } k \ge 1 \\ u_0 & \text{для } k = 0 \end{cases}; \qquad t_k = \begin{cases} \frac{3}{4}k - \frac{1}{2} & \text{для } k \ge 1 \\ 0 & \text{для } k = 0 \end{cases}$$

и следовательно для $v_k(t)$ на интервалах $[t_k, \frac{3}{4}k + \frac{1}{2}]$, справедливы неравенства (2.9) с $f = f_k$. Из этих неравенств следует (2.11). Оценка (2.12) получается в результате применения (2.11) к функции $u(t)e^{-\sigma t}$, как решению уравнения вида (2.8) со свободным членом $f(t)e^{-\sigma t} - \sigma u(t)e^{-\sigma t}$. Наконец, из (2.11) и (2.2) следует, что функция $y(t) = \int_0^t |u(\tau)|_1^2 d\tau$ подчиняется неравенству

$$y'(t) \le c_1(|u_0|_1^2 + \int_0^t |f(\tau)|^2 d\tau) + C_2\beta^2 y(t),$$

из которого вытекает, что

$$y(t) \le c_1 \int_0^t e^{C_2\beta^2(t-\tau)} d\tau \,(|u_0|_1^2 + \int_0^\tau |f(\xi)|^2 d\xi) \le$$

$$\le \frac{c}{C_2\beta^2}(e^{C_2\beta^2 t} - 1)(|u_0|_1^2 + \int_0^t |f(\tau)|^2 d\tau).$$

Отсюда и из (2.11), (2.2) получается (2.13).

Обозначим через $Z(t,s)$, $t \ge s$, разрешающий оператор задачи (2.8). Точнее, он сопоставляет любому элементу φ пространства H решение $z(t) = Z(t,s)\varphi$ задачи

$$\frac{dz(t)}{dt} + A(t)z(t) = 0, \qquad z\Big|_{t=s} = \varphi, \qquad t \ge s. \tag{2.14}$$

---

*) В данной теореме вместо конечности $\hat{\mu}$ достаточно знать, что конечна постоянная $\tilde{\mu} = \sup_{0 \le \tau \le T} \|\mu\|_{L_{\frac{2}{\delta}}(\tau,\tau+1)}$.

Операторы $Z(t,s)$ образуют полугруппу: $Z(t,\tau)Z(\tau,s)=Z(t,s)$, $s\le\tau\le t$; $Z(t,t)=I$, и являются ограниченными линейными операторами в пространстве H_1. В силу (2.I3)

$$|Z(t,s)\varphi|_1\le c_1 e^{c_2\beta^2(t-s)}|\varphi|_1. \tag{2.I5}$$

Теорема 2.3. Пусть $A=A_0+A_1$, где A_1 – линейный оператор, не зависящий от t и удовлетворяющий условию (2.3) с $\mu(t)=\hat\mu$. Тогда существуют такие положительные числа ρ и θ, что любая точка λ комплексной плоскости, лежащая в области $\sum_{\rho,\theta}=\{\lambda: |\lambda|\ge\rho,\ |\arg\lambda|\le\frac{\pi}{2}+\theta\}$ является регулярной точкой оператора $-A$, причем для $\forall u\in H_2$

$$|u|_2^2+(|\lambda|^2+1)|u|^2\le c|(A+\lambda)u|^2, \tag{2.I6}$$

где постоянная c не зависит от λ.

Доказательство. Для проверки (2.I6) воспользуемся соотношениями

$$|(A_0+\lambda)u|^2=|A_0u|^2+|\lambda|^2|u|^2+2\operatorname{Re}\lambda(A_0u,u),$$

$$|(A+\lambda)u|^2=|(A_0+\lambda)u|^2+|A_1u|^2+2\operatorname{Re}((A_0+\lambda)u,A_1u)\ge\frac{1}{2}|(A_0+\lambda)u|^2-|A_1u|^2$$

и нашим предположением: $|A_1u|\le\hat\mu|u|_1^{\delta}|u|_2^{1-\delta}\le\hat\mu|u|^{\frac{\delta}{2}}|u|_2^{1-\frac{\delta}{2}}$.

Из них следует:

$$\begin{aligned}|(A+\lambda)u|^2&\ge\frac{1}{2}[|u|_2^2+|\lambda|^2|u|^2-2\hat\mu^2|u|^{\delta}|u|_2^{2-\delta}]+\\&+\operatorname{Re}\lambda|u|_1^2\ge c_1[|u|_2^2+(|\lambda|^2+1)|u|^2]+\operatorname{Re}\lambda|u|_1^2,\end{aligned} \tag{2.I7}$$

где c_1 – какое-либо фиксированное положительное число, меньшее $\frac{1}{2}$, а $|\lambda|$ – не меньше достаточно большего числа $\rho>0$. При $\operatorname{Re}\lambda\ge0$ неравенство (2.I7) дает желаемую оценку (2.I6). Для $\operatorname{Re}\lambda<0$ воспользуемся неравенством $|\operatorname{Re}\lambda||u|_1^2\le|\operatorname{Re}\lambda||u|_2|u|\le\frac{|\operatorname{Re}\lambda|}{2|\lambda|}(|u|_2^2+|\lambda|^2|u|^2)$

Из него и (2.I7) следует оценка (2.I6) в секторе $\{\lambda:\operatorname{Re}\lambda\le0;\ |\lambda|\ge\rho,\ \frac{|\operatorname{Re}\lambda|}{\lambda}\le\frac{c_1}{4}\}$ с $c=\frac{2}{c_1}$. Итак, мы нашли область $\sum_{\rho,\theta}$ описанного в теореме 2.3 вида, в которой выполняется наравенство (2.I6). Более того, из данного вывода видно, что это неравенство в той же области $\sum_{\rho,\theta}$ и с той же постоянной c имеет место для всех операторов A вида $A_\tau\equiv A_0+\tau A_1$, $\tau\in[0,1]$. Из этого факта методом продолжения по параметру $\tau\in[0,1]$ доказывается однозначная разрешимость уравнений $(A_0+\tau A_1+\lambda I)u=f$ при $\forall f\in H$ для $\lambda\in\sum_{\rho,\theta}$ (надо только учесть, что при $\tau=0$ эти уравнения однозначно разрешимы при $\forall f\in H$ и $\forall\lambda\in\sum_{\rho,\theta}$, в силу свойств оператора A_0). Но это и означает, что точки $\lambda\in\sum_{\rho,\theta}$ являются регулярными точками для оператора $-A$.

Если оператор $A(t)$, входящий в уравнение (2.14), удовлетворяет условиям теоремы 2.3 (в том числе, не зависит от t), то разрешающий оператор $Z(t,s),\ t\geqslant s$ задачи (3.14) имеет вид $Z(t,s)=Z(t-s)$, где $Z(t)$ как известно, выражается через резольвенту $(-A-\lambda)^{-1}$ оператора $-A$ формулой

$$Z(t)\varphi=e^{-At}\varphi=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}(A+\lambda)^{-1}\varphi\,d\lambda, \tag{2.18}$$

в которой в качестве Γ можно взять границу области $\sum_{\rho,\theta}$.

Теорема 2.4. Пусть A удовлетворяет условиям теоремы 2.3, и пусть спектр оператора A лежит в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda\leqslant\gamma_0$. Тогда при $\forall\gamma>\gamma_0$ справедливы оценки

$$|Z(t)\varphi|\leqslant c_0(\gamma)e^{\gamma t}|\varphi|\ ,\quad t\geqslant 0, \tag{2.19}$$

$$|Z(t)\varphi|_1\leqslant c_1(\gamma)t^{-1/2}e^{\gamma t}|\varphi|,\ t>0, \tag{2.20}$$

$$|Z(t)\varphi|_2\leqslant c_2(\gamma)t^{-1}e^{\gamma t}|\varphi|,\ t>0. \tag{2.21}$$

Оценка (2.20) следует из (2.19) и (2.21), ибо $|u|_1^2\leqslant|u||u|_2$. Для доказательства (2.21) воспользуемся представлением (2.18) и тем, что в нем в качестве контура Γ можно взять часть границы области $\sum_{\rho,\theta}$, лежащую в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda\leqslant\gamma'$, $\gamma'\in(\gamma_0,\gamma)$ и отрезок прямой $\operatorname{Re}\lambda=\gamma$, лежащий вне области $\sum_{\rho,\theta}$ (последний может отсутствовать). Из этого представления и оценки (2.16) следует

$$|Z(t)\varphi|_2\leqslant\frac{\sqrt{C}}{2\pi}e^{\gamma t}|\varphi|\int_\Gamma e^{(\operatorname{Re}\lambda-\gamma)t}|d\lambda|\leqslant c_2(\gamma)t^{-1}e^{\gamma t}|\varphi|.$$

т.е. (2.21). Из (2.21) вытекает справедливость (2.19) при $t\geqslant 1$. Для доказательства (2.19) при $t\in[0,1]$, введем две функции:

$$w(\tau)=\int_0^\tau Z(\xi)\varphi\,d\xi \qquad \text{и} \qquad v(\tau)=\left[\eta\left(\tfrac{\tau}{t}\right)-1\right]Z(\tau)\varphi,$$

где $\eta(\xi)$ есть какая-либо неотрицательная гладкая функция, равная 1 при $\xi\leqslant\frac{1}{2}$ и нулю при $\xi\geqslant 1$. При фиксированном из $(0,1]$ значении t , функции $w(\tau)$ и $v(\tau)$ являются решениями задач

$$\frac{dw(\tau)}{d\tau}+Aw(\tau)=\varphi, \qquad w\big|_{t=0}=0,$$

и

$$\frac{dv(\tau)}{d\tau}+Av(\tau)=\frac{1}{t}\eta'\left(\frac{\tau}{t}\right)Z(\tau)\varphi=\frac{1}{t}\eta'\left(\frac{\tau}{t}\right)\frac{dw}{d\tau},\ v\big|_{t=0}=0,$$

на промежутке $\tau\in[0,t]$. В силу (2.I3) для них справедливы оценки:

$$\int_0^t\left|\frac{dw}{d\tau}\right|^2 d\tau\leqslant ct|\varphi|^2$$

и

$$\int_0^t\left|\frac{dv}{d\tau}\right|^2 d\tau\leqslant\frac{c}{t^2}\int_0^t\left|\frac{dw}{d\tau}\right|^2 d\tau,$$

из которых следует, что

$$|Z(t)\varphi|^2=\int_0^t\frac{d}{d\tau}|v(\tau)|^2 d\tau\leqslant 2\int_0^t|v(\tau)|\left|\frac{dv(\tau)}{d\tau}\right|d\tau\leqslant$$

$$\leqslant 2\|v\|_t\left\|\frac{dv}{d\tau}\right\|_t\leqslant 2\left\|\frac{dw}{d\tau}\right\|_t\left\|\frac{dv}{d\tau}\right\|_t\leqslant\frac{2\sqrt{c}}{t}\left\|\frac{dw}{d\tau}\right\|_t^2\leqslant 2c^{3/2}|\varphi|^2.$$

Это завершает доказательство теоремы 2.4.

Замечание 2.I. Оценка (2.I9) позволяет распространить линейный оператор $Z(t)$, определенный нами на H_1 , на все H по непрерывности.

Теорема 2.4 обобщается на случай разрешающего оператора $Z(t,s), t\geqslant s$, задачи (2.I4) следующим образом:

Теорема 2.5. *Пусть операторы A_0 и $A_1(t)$ удовлетворяют условиям I) и 2). Тогда существуют такие вещественные числа c и γ_1, что*

$$|Z(t,s)\varphi|\leqslant ce^{\gamma_1(t-s)}|\varphi|,\ t\geqslant s. \tag{2.22}$$

Более того, если одно из трех неравенств

$$|Z(t,s)\varphi|\leqslant c_1(\gamma)e^{\gamma(t-s)}|\varphi|,\ t\geqslant s, \tag{2.23}$$

$$|Z(t,s)\varphi|_1 \le C_4(\gamma)e^{\gamma(t-s)}|\varphi|_1,\ t \ge s \qquad (2.24)$$

$$\|u(t)e^{-\gamma t}\|^2_{W_T} \le C_5(\gamma)\left(|u_0|_1^2 + \|f(t)e^{-\gamma t}\|_T^2\right) \qquad (2.25)$$

справедливо при всех γ, превосходящих какое-либо число γ_0, то два других неравенства справедливы при тех же γ. В (2.25) $u(t)$ есть решение задачи (2.8). Постоянные $C_i(\gamma)$ не зависят от величины T, и T может принимать значение, равное ∞.

Для доказательства первого утверждения рассмотрим $v(t) = Z(t,s)\varphi$ как решение неоднородной задачи

$$\frac{dv}{dt} + A_0 v = -A_1(t)v,\quad v|_{t=s} = \varphi,\quad t \ge s.$$

Хорошо известно, что оно может быть представлено с помощью разрешающего оператора $Z_0(t)$ задачи (2.14) с $A(t)=A_0$ в виде:

$$v(t) = Z_0(t-s)\varphi - \int_s^t Z_0(t-\tau)A_1(\tau)v(\tau)d\tau,\ t \ge s. \qquad (2.26)$$

В силу условия (2.3) и неравенств (2.20), (2.21) для оператора $A=A_0$, взятых с $\gamma=0$, верна оценка

$$|A_1(t)Z_0(t-s)\varphi| \le \mu(t)|Z_0(t-s)\varphi|_1^{\delta}|Z_0(t-s)\varphi_0|_2^{1-\delta} \le \hat{c}_1(t)|t-s|^{-1+\frac{\delta}{2}}|\varphi|, \qquad (2.27)$$

в которой $\hat{c}_1(t) = \mu(t)c_1^{\delta}(0)c_2^{\delta}(0)$. Применим к обеим частям (2.26) оператор $A_1(t)$ и затем воспользуемся неравенством (2.27). Это дает следующее соотношение для $\eta(t) \equiv |A_1(t)v(t)|$:

$$\eta(t) \le \hat{c}_1(t)\left[|t-s|^{-1+\frac{\delta}{2}}|\varphi| + \int_s^t |t-\tau|^{-1+\frac{\delta}{2}}\eta(\tau)d\tau\right]. \qquad (2.28)$$

Из него для $t-s$, не превосходящих какое-либо число, например I, следует оценка

$$\eta(t) \le c_1'\hat{c}_1(t)|t-s|^{-1+\delta/2}|\varphi| \qquad (2.29)$$

с некоторой постоянной C_1', которая определяется числами $\delta, C_1(0), C_2(0)$ и постоянными $\hat{\mu}$ и p из условия 2) § 2 (см. по этому поводу доказательство теоремы 5.1 работы [10]). Благодаря ей и (2.19) для A_0 с $\gamma=0$ из (2.26) следует

$$|v(t)|=|Z(t,s)\varphi|\leqslant C_0(0)\Big[1+C\int_s^t \hat{C}_1(\tau)|\tau-s|^{-1+\frac{\delta}{2}}d\tau\Big]|\varphi|\leqslant C_2|\varphi| \qquad (2.30)$$

при $t-s\in[0,1]$. Если же $t-s\in[k,k+1)$, где k – натуральное число, то, разбив интервал $[s,t]$ на отрезки $[s,s+1),[s+1,s+2),\dots[s+k,t]$ и воспользовавшись (2.30) и полугрупповым свойством оператора $Z(t,s)$, убедимся, что для $v(t)$ верно неравенство

$$|v(t)|=|Z(t,s+k)\dots Z(s+1,s)\varphi|\leqslant C_2^{k+1}|\varphi|$$

или, что то же, неравенство (2.22) с некоторым γ_1. Аналогично, из (2.26) и (2.20) выводится оценка

$$|Z(t,s)\varphi|_1\leqslant \frac{C}{\sqrt{t-s}}e^{\gamma_1(t-s)}|\varphi|. \qquad (2.31)$$

Перейдем к доказательству других утверждений теоремы. Пусть выполняется (2.23) при $\forall\gamma>\gamma_0$. Проверим, что тогда справедливо (2.25) при $\forall\gamma>\gamma_0$. Представим $u(t)$ в виде

$$u(t)=Z(t,0)u_0+\int_0^t Z(t,s)f(s)ds \qquad (2.32)$$

и воспользуемся (2.23) с $\gamma'\in(\gamma_0,\gamma)$, т.е.

$$|u(t)|\leqslant C_3(\gamma')\Big[e^{\gamma' t}|u_0|+\int_0^t e^{\gamma'(t-s)}|f(s)|ds. \qquad (2.33)$$

Из нее следует

$$\|u(t)e^{-\gamma t}\|_T\leqslant C_3(\gamma')\Big(\int_0^T e^{-2(\gamma-\gamma')t}dt\Big)^{1/2}|u_0|+$$

$$+C_3(\gamma')\Big[\int_0^T\Big(\int_0^t e^{-(\gamma-\gamma')(t-s)}|f(s)|e^{-\gamma s}ds\Big)^2dt\Big]^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_3(\gamma')}{\sqrt{2(\gamma-\gamma')}}|u_0|+C_3(\gamma')\Big[\int_0^T\Big(\int_0^t e^{-(\gamma-\gamma')(t-s)}|f(s)|^2e^{-2\gamma s}ds\Big)\times$$

$$\times\Big(\int_0^t e^{-(\gamma-\gamma')(t-s)}ds\Big)dt\Big]^{1/2}\leqslant\frac{C_1(\gamma')}{\sqrt{2(\gamma-\gamma')}}|u_0|+\Big[\int_0^T|f(s)|^2e^{-2\gamma s}ds\times$$

$$\times\int_s^T e^{-(\gamma-\gamma')(t-s)}dt\Big]^{1/2}\leqslant\frac{C_3(\gamma')}{\sqrt{2(\gamma-\gamma')}}|u_0|+\frac{C_3(\gamma')}{\gamma-\gamma'}\|f(s)e^{-\gamma s}\|_T \qquad (2.34)$$

Отсюда и неравенства (2.12) с $\sigma=\gamma$ вытекает (2.25). Неравенство же (2.24) следует из (2.25) при $f\equiv 0$ и $u|_{t=s}=\varphi$. Осталось проверить, что (2.24) с $\forall\gamma>\gamma_0$ влечет (2.23) с $\forall\gamma>\gamma_0$. Из (2.22) ясно, что (2.23) верно с $\forall\gamma>\gamma$ для $t-s\in[0,1]$. Для $t-s>1$ из (2.2), (2.24) и (2.3I) получим

$$|Z(t,s)\varphi|\leq\beta|Z(t,s)\varphi|_1\leq\beta|Z(t,s+1)Z(s+1,s)\varphi|_1\leq$$

$$\leq\beta c_4(\gamma)e^{\gamma(t-s-1)}|Z(s+1,s)\varphi|_1\leq\beta c_4(\gamma)ce^{\gamma(t-s-1)+\gamma_1}|\varphi|,$$

т.е., по-существу, (2.23).

<u>Следствие 2.I.</u> Пусть выполнено (2.23) с $\forall\gamma>\gamma_0$ существование такого γ_0 гарантировано теоремой 2.5). Тогда для решения задачи (2.8) справедлива оценка

$$\|u\|^2_{W_T}\leq c_6(\gamma)(1+e^{2\gamma T})(|u_0|_1^2+\|f\|_T^2) \tag{2.35}$$

с $\forall\gamma>\gamma_0$ и постоянной $C(\gamma)$, не зависящей от T.

Действительно, из (2.33) с $\gamma'=\gamma$ (без ограничения общности считаем, что $\gamma\neq 0$) следует

$$\int_0^T|u(t)|^2dt\leq 2c_3^2(\gamma)\Big[\int_0^T e^{2\gamma t}dt|u_0|_1^2+\int_0^T dt\Big(\int_0^t e^{\gamma(t-s)}|f(s)|ds\Big)^2\Big],$$

откуда, почти так же, как в (2.34), получим

$$\int_0^T|u(t)|^2dt\leq c_7(\gamma)(1+e^{2\gamma T})(|u_0|_1^2+\|f\|_T^2).$$

Из этого неравенства и неравенства (2.II) вытекает (2.35).

<u>Важное замечание.</u> Во всех утверждениях данного параграфа в качестве T можно взять любое положительное число, а также $T=\infty$, если в правых частях соответствующих им неравенств стоят конечные величины.

Оценка (2.35) будет использована нами в случае, когда $\gamma_0<0$ и когда, тем самым, число γ в (2.35) можно взять ≤ 0.

<u>§ 3. О разрешимости задачи Коши для нелинейных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве</u>.

В данном параграфе мы исследует разрешимость задачи Коши в пространстве W_T для нелинейного уравнения (2.I) в предположении, что операторы A_0, A_1 и K удовлетворяют условиям, сформулированным в начале § 2. Решения строятся с помощью метода последовательных приближений, имеющего разную форму в зависимости от того, какому из условий 3) или 3$'$) удовлетворяет нелинейный оператор K.

<u>Теорема 3.I.</u> П у с т ь в ы п о л н е н ы у с л о в и я

I) - 3) § 2. Тогда задача (2.I) однозначно разрешима в W_T при любых $f(t) \in L_2(0,T;H)$ и $u_0 \in H_1$, для которых числа

$$\int_0^T |f(t)|^2 dt + |u_0|_1^2 \equiv R^2 \qquad (3.I)$$

и T связаны соотношением

$$2c(T)R^2 < \sup_{\eta>0} \eta[1-2\varepsilon^2(\sqrt{\eta})c(T)\min(\beta^{2\delta}, T^\delta)], \qquad (3.2)$$

в котором $c(T) = C(\gamma)(1+e^{2\gamma T})$ - постоянная из неравенства (2.35), а β - постоянная из неравенства (2.2). Для $\forall \eta_0 \in (0,\infty)$, для которого

$$2c(T)R^2 \le \eta_0[1-2\varepsilon^2(\sqrt{\eta_0})c(T)\min(\beta^{2\delta}, T^\delta)] \qquad (3.3)$$

верна оценка

$$\|u\|_{W_T}^2 \le \frac{2c(T)}{1-2\varepsilon^2(\sqrt{\eta_0})c(T)\min(\beta^{2\delta}, T^\delta)}(\|f\|_T^2 + |u_0|_1^2). \qquad (3.4)$$

<u>Доказательство.</u> Будем искать решение задачи (2.I) методом последовательных приближений, полагая $u^{(0)}=0$ и определяя $u^{(m+1)}$ для $m \ge 0$, как решения задач

$$\frac{du^{(m+1)}}{dt} + A(t)u^{(m+1)} = -Ku^{(m)} + f(t), \quad u^{(m+1)}\big|_{t=0} = u_0. \qquad (3.5)$$

Из результатов § 2 следует, что $u^{(m)}(t)$, $m \ge 1$, однозначно определяются и принадлежат W_T. Покажем, что $\|u^{(m)}\|_{W_T}$ равномерно ограничены. В силу (2.4) и (2.35)

$$\|u^{(m+1)}\|_{W_T}^2 \le 2c(T)\Big[R^2 + \int_0^T \varepsilon^2(|u^{(m)}|_1)|u^{(m)}|_1^{2\delta}|u^{(m)}|_2^{2-2\delta}dt\Big]$$

Обозначим левую часть через U_{m+1}. Интеграл I_m, стоящий в правой части последнего неравенства, мажорируется так:

$$I_m \le \varepsilon^2(\sqrt{U_m})\int_0^T |u^{(m)}|_1^{2\delta}|u^{(m)}|_2^{2-2\delta}dt \le$$

$$\le \begin{cases} \varepsilon^2(\sqrt{U_m})\beta^{2\delta}\int_0^T |u^{(m)}|_2^2 dt \\ \varepsilon^2(\sqrt{U_m})U_m^\delta \int_0^T |u^{(m)}|_2^{2-2\delta}dt \end{cases} \le \min(\beta^{2\delta}, T^\delta)\varepsilon^2(\sqrt{U_m})U_m.$$

Ввиду этого

$$U_{m+1} \leq 2c(T)\left[R^2+\varepsilon^2(\sqrt{U_m})U_m \min(\beta^{2\delta}, T^{\delta})\right] \qquad (3.6)$$

Возьмем произвольное $\eta_0 > 0$, удовлетворяющее неравенству (3.3), и покажем, что все $U_m \leq \eta_0$. При $m=0$ это очевидно. Пусть $U_m \leq \eta_0$, тогда или $U_{m+1} \leq U$ (и следовательно $U_{m+1} \leq \eta_0$), или $U_{m+1} > U_m$. В последнем случае из (3.6) следует:

$$U_{m+1} \leq 2c(T)[R^2+\varepsilon^2(\sqrt{\eta_0})U_{m+1} \min(\beta^{2\delta}, T^{\delta})],$$

т.е., в силу (3.3), $U_{m+1} \leq \eta_0$. Убедимся теперь, что $\{u^{(m)}\}$ сходится в норме W_T к некоторому элементу $u \in W_T$, который, очевидно, и будет искомым решением – задачи (2.I). Разность $v^{(m+1)} = u^{(m+1)} - u^{(m)}$ является решением задачи

$$\frac{dv^{(m+1)}}{dt} + A(t)v^{(m+1)} = -Ku^{(m)} + Ku^{(m-1)}, \quad v^{(m+1)}\big|_{t=0} = 0.$$

Благодаря (2.35) и (2.5), а также неравенству Гельдера

$$\|v^{(m+1)}\|^2_{W_T} \leq c(T)\int_0^T |Ku^{(m)} - Ku^{(m-1)}|^2 dt \leq$$

$$\leq 2c(T)\varepsilon_1^2(2\sqrt{\eta_0})\int_0^T |v^{(m)}|_1^{2\delta} |v^{(m)}|_2^{2-2\delta} dt +$$

$$+ 4c(T)\mu^2(2\sqrt{\eta_0})\int_0^T (|u^{(m)}|_2^{2-2\delta} + |u^{(m-1)}|_2^{2-2\delta})|v^{(m)}|_1^2 dt \leq$$

$$\leq 2c(T)\varepsilon_1^2(2\sqrt{\eta_0})\left(\int_0^T |v^{(m)}|_1^2 dt\right)^{\delta}\left(\int_0^T |v^{(m)}|_2^2 dt\right)^{1-\delta} +$$

$$+ 4c(T)\mu^2(2\sqrt{\eta_0})\max_{0\leq t\leq T}|v^{(m)}(t)|^{2-2\delta}\left[\left(\int_0^T |u^{(m)}|_2^2 dt\right)^{1-\delta} + \right.$$

$$\left. + \left(\int_0^T |u^{(m-1)}|_2^2 dt\right)^{1-\delta}\right]\left(\int_0^T |v^{(m)}|_1^2 dt\right)^{\delta} \leq$$

$$\leq c_1(T,\eta_0)\|v^{(m)}\|^{2-2\delta}_{W_T}\left(\int_0^T |v^{(m)}(t)|_1^2 dt\right)^{\delta}, \quad m \geq 1, \qquad (3.7)$$

где $c_1(T,\eta_0) = 2c(T)\varepsilon_1^2(2\sqrt{\eta_0}) + 8c(T)\mu^2(2\sqrt{\eta_0})\eta_0^{1-\delta}$.

Отсюда, рассуждая по индукции, непосредственно проверяется справедливость неравенств

$$\|v^{(m+1)}\|^2_{W_T} \le \frac{c_1^m(T,\eta_0)T^{m\delta}}{(1+\delta)^\delta \dots [1+(m-1)\delta]^\delta}\|u^{(1)}\|^2_{W_T}, \quad m=1,2,\dots,$$

гарантирующих сходимость ряда $\sum_{m=1}^{\infty} v^{(m)}$ в норме W_T к решению u задачи (2.I). Переходя в (3.6) к пределу по $m\to\infty$ и вспоминая выбор η_0, получим для решения u оценку

$$\|u\|^2_{W_T} \le 2c(T)[R^2+\varepsilon^2(\sqrt{\eta_0})\|u\|^2_{W_T}\min(\beta^{2\delta},T^\delta)],$$

т.е. (3.4). Единственность решения задачи (2.I) в классе W_T следует из того, что разность $v=u-u'$ двух возможных таких решений удовлетворяет соотношениям

$$\frac{dv}{dt}+A(t)v=-Ku+Ku', \quad v|_{t=0}=0,$$

из которых аналогично (3.7) выводится неравенство

$$\|v\|^2_{W_\tau} \le c_2\|v\|^{2-2\delta}_{W_\tau}\left(\int_0^\tau |v|_1^2\,dt\right)^\delta, \quad \tau\le T,$$

из которого, как известно, следует, что $v=0$.

<u>Замечание 3.I</u>. Предположение $\varepsilon_1(0)=0$ о функции $\varepsilon_1(\tau)$, входящей в условие (2.5), в теореме 3.I не используется.

Проанализируем предположение (3.2) теоремы 3.I. Будем считать, что $A_1(t)$ и $f(t)$ заданы для $t\in[0,\infty]$, причем $\hat{\mu}$ в условии (2.3) – конечна для $T=\infty$, а $f\in L_2(0,\infty;H)$. Обозначим сумму $\int_0^\infty |f(t)|^2dt+|u_0|_1^2$ через R^2. Тогда теорема 3.I гарантирует однозначную разрешимость задачи 2.I в $W_{T(R)}$, где $T(R)$ – положительная функция $R\ge 0$, стремящаяся к ∞ при $R\to 0$. Действительно, условие (3.2) заведомо будет выполняться, если $T=T(R)$ выбрано так, что для него справедливы неравенства

$$c(T(R))(T(R))^\delta \le \frac{1}{4}\varepsilon^{-2}(\sqrt{\lambda R}) \qquad (3.8)$$

и

$$c(T(R)) < \frac{1}{4}\lambda R^{-1} \qquad (3.9)$$

с каким-нибудь $\lambda>0$. В самом деле, из (3.8) и (3.9) следует, что

$$1-2\varepsilon^2(\sqrt{\lambda R})c(T(R))(T(R))^\delta \ge \frac{1}{2},$$

а

$$2c(T(R))R^2 < \frac{1}{2}\lambda R,$$

и потому правая часть в (3.2) при $T=T(R)$ больше левой (достаточно в (3.2) положить $\eta=\lambda R$). Ограничения же (3.8) и (3.9) на $T(R)$, очевидно, таковы, что при любом фиксированном $R>0$ найдется $T(R)>0$,удовлетворяющее(3.8-9)с некоторым $\lambda>0$, причем при $R\to 0$ значение $T(R)\to\infty$ (напомним, что $\varepsilon(\tau)\to 0$ при $\tau\to 0$). Рассмотрим теперь другую ситуацию, когда длина интервала T задана, а требуется подобрать $R=R(T)$, удовлетворяющее неравенству(3.2). Вместо (3.2) подчиним T и R более сильным ограничениям (3.8) + (3.9), считая в них $T(R)\equiv T$, а $R\equiv R(T)$ (из (3.8) + (3.9) следует (3.2)). Ясно, что при $\forall T$ найдется $R=R(T)>0$,причем такое, что при $T\to 0$ величина $R=R(T)\to\infty$.

Отметим особо случай, когда в неравенстве (2.35) параметр $\gamma\leqslant 0$ и следовательно, когда в качестве $C(T)$ можно взять число $2c_6(\gamma)$, не зависящее от T . В этом случае условие (3.2) будет выполнено при $\forall T>0$, в том числе и при $T=\infty$, если R удовлетворяет неравенству

$$R^2<\frac{1}{4c(\gamma)}\sup_{\eta>0}\eta\left[1-4\varepsilon^2(\sqrt{\eta})c_6(\gamma)\beta^{2\delta}\right]\equiv R_0^2 \tag{3.10}$$

(ясно, что $R_0>0$). Это означает, что задача (2.I) разрешима в W_∞ , если $R<R_0$, и ее решение $u(t)$ подчиняется неравенству

$$\|u\|^2_{W_\infty}\leqslant\frac{4c_6(\gamma)}{1-4c_6(\gamma)\varepsilon^2(\sqrt{\eta_0})\beta^{2\delta}}\left(|u_0|_1^2+\|f\|_\infty^2\right), \tag{3.11}$$

где η_0 - произвольное число из $(0,\infty)$, для которого

$$4c_6(\gamma)R^2\leqslant\eta_0\left[1-4c_6(\gamma)\varepsilon^2(\sqrt{\eta_0})\beta^{2\delta}\right]. \tag{3.12}$$

<u>Теорема 3.2</u>. Пусть выполнены условия I) -3) § 2, и пусть для решений линеаризированной задачи (2.I4) справедливо неравенство (2.23) с $\forall\gamma>\gamma_0$, где $\gamma_0<0$. Тогда существует такое положительное $R_1<R_0$, что при любых $f(t)$ и u_0 , удовлетворяющих условию

$$\|f\|_\infty^2+|u_0|_1^2\equiv R^2\leqslant R_1^2 \tag{3.13}$$

нелинейная задача (2.I) однозначно разрешима в W_∞, и для ее решения $u(t)$ справедлива оценка

$$\|ue^{-\gamma t}\|^2_{W_\infty}\leqslant 4c_5(\gamma)\left[\|fe^{-\gamma t}\|_\infty^2+|u_0|_1^2\right], \tag{3.14}$$

где $c_5(\gamma)$ - постоянная из неравенства (2.25).

Разрешимость задачи (2.I) в W_∞ и оценка (3.II) уже доказаны для $\forall R<R_0$ (см. (3.I0) и следствие 2.I). Возьмем такое положитель-

ное η_0 , что

$$1-4c_6(\gamma)\varepsilon^2(\sqrt{\eta_0})\beta^{2\delta} \geq \frac{1}{2}, \tag{3.15}$$

а

$$\frac{1}{4c_6(\gamma)}\eta_0\left[1-4c_6(\gamma)\varepsilon^2(\sqrt{\eta_0})\,\beta^{2\delta}\right] \equiv R_2^2 < R_0^2. \tag{3.16}$$

Для $R \leq R_2$ условия (3.10) и (3.12) выполняются и потому для $\|u\|^2_{W_\infty}$ верно неравенство (3.11) и, тем более, неравенство

$$\|u\|^2_{W_\infty} \leq 8c_6(\gamma)(|u_0|_1^2+\|f\|^2_\infty). \tag{3.17}$$

С другой стороны, для $u(t)$, как решения линейного уравнения(2.8) со свободным членом $f(t)-Ku$, верно неравенство (2.25), из которого следует

$$\|ue^{-\gamma t}\|^2_{W_\infty} \leq c_5(\gamma)\left[|u_0|_1^2+2\|fe^{-\gamma t}\|^2_{W_\infty}+2\int_0^\infty |Ku|^2 e^{-2\gamma t}dt\right]. \tag{3.18}$$

Но в силу (2.4) и (3.17) при $R \leq R_2$

$$\int_0^\infty |Ku|^2 e^{-2\gamma t}dt \leq \varepsilon^2(\sup_{t\geq 0}|u|_1)\beta^{2\delta}\int_0^\infty |u|_2^2 e^{-2\gamma t}dt \leq$$

$$\leq \varepsilon^2(\sqrt{8c_6(\gamma)R})\beta^{2\delta}\|ue^{-\gamma t}\|^2_{W_\infty}. \tag{3.19}$$

Выберем R_1 столь малым, чтобы $R_1 \leq R_2$ и

$$1-2c_5(\gamma)\varepsilon^2(\sqrt{8c_6(\gamma)R_1})\beta^{2\delta} \geq \frac{1}{2}. \tag{3.20}$$

Тогда из (3.18)-(3.20) будет следовать (3.14), если $R \leq R_1$.

Рассмотрим теперь случай, когда Ku вместо условия 3) удовлетворяет условию $3'$).

<u>Теорема 3.3.</u> Пусть операторы $A_0, A_1(t)$ и K, входящие в уравнение (2.1), удовлетворяют условиям 1),2) и $3'$), сформулированным в начале §2. Тогда задача (2.1) однозначно разрешима в классе W_T при $\forall f \in L_2(0,T;H)$ и $u_0 \in H_1$, для которых величина R^2 ,определенная равенством (3.1), удовлетворяет условию

$$4\tilde{c}(T)R^2 < \sup_{\eta>0}\eta\exp\left[-\tilde{c}^{\frac{1}{\delta}}(T)T\varphi(\eta)\right], \tag{3.21}$$

где $\varphi(\eta)=\delta(1-\delta)^{\frac{1-\delta}{\delta}}2^{\frac{2}{\delta}}\mu_1^{\frac{2}{\delta}}(\sqrt{\eta})$, $\tilde{c}(T)=max[2c_6(\gamma), c_6(\gamma)(1+e^{2\gamma T})]$,

а γ и $c_6(\gamma)$ — постоянные из неравенства (2.35). При этом существует такое $\eta_0\in(0,\infty)$, что

$$\|u\|^2_{W_T}\leq 4\tilde{c}(T)\exp[\tilde{c}^{\frac{1}{\delta}}(T)T\varphi(\eta_0)](|u_0|_1^2+\|f\|_T^2). \qquad (3.22)$$

Решение задачи (2.I) найдем с помощью следующего метода последовательных приближений: $u^{(0)}=0$, а $u^{(m+1)}$, $m\geqslant 0$, есть решение линейной задачи

$$\frac{du^{(m+1)}}{dt}+A(t)u^{(m+1)}+K(u^{(m)},u^{(m+1)})=f(t),\quad u^{(m+1)}\big|_{t=0}=u_0 \qquad (3.23)$$

Однозначная разрешимость задач (3.23) в классе W_T вытекает из наших предположений об операторах $A(t)$ и K и результатов § 2. Покажем, что $U_m(T)\equiv\|u^{(m)}\|^2_{W_T}$ равномерно ограничены. В силу (2.35)

$$U_{m+1}(t)\leq 2\tilde{c}(t)[|u_0|_1^2+\|f\|_t^2+\|K(u^{(m)},u^{(m+1)})\|_t^2], \qquad (3.24)$$

а в силу (2.6) и неравенства Юнга

$$\|K(u^{(m)},u^{(m+1)})\|_t^2\leq\mu_1(\sup_{0\leq\tau\leq t}|u^{(m)}(\tau)|_1)\Big(\int_0^t|u^{(m+1)}(\tau)|_1^2\,d\tau\Big)^{\delta}\times$$

$$\times\Big(\int_0^t|u^{(m+1)}(\tau)|_2^2\,d\tau\Big)^{1-\delta}\leq(1-\delta)\varepsilon\int_0^t|u^{(m+1)}(\tau)|_2^2\,d\tau+$$

$$+\delta\varepsilon^{\frac{\delta-1}{\delta}}\mu_1^{\frac{2}{\delta}}\big(\sup_{0\leq\tau\leq t}|u^{(m)}(\tau)|_1\big)\int_0^t|u^{(m+1)}(\tau)|_1^2\,d\tau$$

с $\forall\varepsilon>0$. Из (3.24) и последнего неравенства с $\varepsilon=[4\tilde{c}(t)(1-\delta)]^{-1}$ элементарно выводится оценка

$$U_{m+1}(t)\leq 4\tilde{c}(t)[|u_0|_1^2+\|f\|_t^2]+\varphi(U_m(t))\tilde{c}^{\frac{1}{\delta}}(t)\int_0^t U_{m+1}(\tau)\,d\tau. \qquad (3.25)$$

(При этом, как и во многих других местах, использовано то, что норма $\|u\|_{W_T}$ мажорирует как $\sup_{0\leq t\leq T}|u(t)|$, так и $\left(\int_0^t|u(t)|_2^2\,dt\right)^{1/2}$). Функция $\varphi(\eta)$ определена в теореме 3.3. Из огрубленного неравенства (3.25)

$$U_{m+1}(t)\leq 4\tilde{c}(T)R^2+\varphi(U_m(T))\tilde{c}^{\frac{1}{\delta}}(T)\int_0^t U_{m+1}(\tau)\,d\tau$$

известным образом выводится соотношение

$$U_{m+1}(t) \leq 4\tilde{c}(T)R^2 \exp[\tilde{c}^{\frac{1}{\delta}}(T)\varphi(U_m(T))t]. \tag{3.26}$$

Если T и R^2 удовлетворяют условию (3.2I), то из (3.26) легко находится единая мажоранта для всех $U_{m+1}(T)$. Действительно, в силу (3.2I) существует $\eta_0 \in (0,\infty)$ такое, что

$$4\tilde{c}(T)R^2 \exp[\tilde{c}^{\frac{1}{\delta}}(T)T\varphi(\eta_0)] \leq \eta_0. \tag{3.27}$$

Из (3.26) и (3.27) следует, что если $U_m(T) \leq \eta_0$, то и

$$U_{m+1}(T) \leq 4\tilde{c}(T)R^2 \exp[\tilde{c}^{\frac{1}{\delta}}(T)T\varphi(\eta_0)] \leq \eta_0. \tag{3.28}$$

Но $U_0(T)=0$, и потому $U_m(T) \leq \eta_0$ при $\forall m \geq 0$. Оценка $\|u^{(m+1)} - u^{(m)}\|_{W_T}$ проводится так же, как в случае теоремы 3.I, и позволяет сделать заключение о сходимости $\{u^{(m)}(t)\}$ в норме W_T к решению $u(t)$ задачи (2.I). Наконец, неравенство (3.22) следует из (3.28).

Условие (3.2I) таково, что если T задано и $T<\infty$, то ему можно удовлетворить, взяв достаточно малое $R=R(T)$. Напротив, если фиксировано $R>0$, то по нему можно подобрать столь малое $T = T(R)>0$, что условие (3.2I) будет выполнено, причем $T(R) \to \infty$ когда $R \to 0$.

Обозначим через $V(t)$ разрешающий оператор задачи

$$\frac{dv}{dt} + A(t)v + Kv = 0, \quad v\big|_{t=0} = \varphi, \tag{3.29}$$

т е. нелинейный оператор, сопоставляющий элементу φ из H_1 решение $v(t) = V(t)\varphi$ задачи (3.29). Из доказанных в этом параграфе теорем следует

<u>Теорема 3.4.</u> Если выполнены условия I) -3) или I) - 3′) начала § 2, то оператор $V(t)$ определен на $\forall$ шаре $K_R = \{\varphi : |\varphi|_1 \leq R\}$ пространства H_1 для $t \in [0, T(R)]$, причем $T(R)$ есть невозрастающая функция R, стремящаяся к ∞ при $R \to 0$. Оператор $V(t)$ непрерывен на K_R и для $\forall \varphi, \varphi' \in K_R$

$$|V(t)\varphi|_1 \leq C_1(t,R)|\varphi|_1, \tag{3.30}$$

$$|V(t)\varphi - V(t)\varphi'|_1 \leq C_2(t,R)|\varphi - \varphi'|_1, \tag{3.3I}$$

где $C_i(t,R)$ - непрерывные функции.

Оценка (3.30) следует из (3.4) и (3.22) соответственно. Для проверки (3.3I) рассмотрим разность $w(t) = V(t)\varphi - V(t)\varphi' \equiv v(t) - v'(t)$ как решение линейной задачи

$$\frac{dw}{dt}+A(t)w=-Kv+Kv', \quad w\big|_{t=0}=\varphi-\varphi'.$$

Для нее аналогично (3.7) получим неравенство

$$\|w\|^2_{W_t}\leq c(t,R)\Big[|\varphi-\varphi'|_1^2+\|w\|^{2-2\delta}_{W_t}\Big(\int_0^t|w(\tau)|_1^2\,d\tau\Big)^{\delta}\Big],$$

из которого, используя неравенство Юнга, выведем неравенство

$$\|w\|^2_{W_t}\leq 2c(t,R)|\varphi-\varphi'|_1^2+c'(t,R)\int_0^t\|w\|^2_{W_\tau}d\tau.$$

Отсюда же, как известно, следует

$$\|w\|^2_{W_T}\leq 2c(T,R)|\varphi-\varphi'|_1^2\exp[c'(T,R)T] \tag{3.32}$$

и, тем более, (3.31).

Несколько большую информацию об операторе $V(t)$ можно дать при условии, что K удовлетворяет условиям 3) § 2.

<u>Теорема 3.5</u>. Если выполнены условия 1) – 3) начала § 2, то оператор $V(t)$, соответствующий задаче (3.29), имеет дифференциал Фреше в нуле пространства H_1. Этот дифференциал есть линейный оператор $Z(t,0)$, соответствующий задаче (2.14). Для оператора $\hat{R}(t)=V(t)-Z(t,0)$ верны неравенства

$$|\hat{R}(t)\varphi|_1\leq\theta_1(T,R,|\varphi|_1)|\varphi|_1 \tag{3.33$_1$}$$

и

$$|\hat{R}(t)\varphi-\hat{R}(t)\varphi'|_1\leq\theta_2(T,R,|\varphi|_1+|\varphi'|_1)|\varphi-\varphi'|_1, \tag{3.33$_2$}$$

в которых φ и φ' – произвольные элементы $K_R=\{\varphi:|\varphi|_1\leq R\}$, $t\in[0,T=T(R)]$, а $\theta_i(T,R,\tau)$ – непрерывные функции, стремящиеся к нулю при $\tau\to 0$.

<u>Доказательство</u>: Функции $w(t)=\hat{R}(t)\varphi$ и $\tilde{w}(t)=\hat{R}(t)\varphi-\hat{R}(t)\varphi'$ являются решениями задач

$$\frac{dw}{dt}+A(t)w=-Kv, \quad w\big|_{t=0}=0 \tag{3.34}$$

и

$$\frac{d\tilde{w}}{dt}+A(t)\tilde{w}=-Kv+Kv', \quad \tilde{w}\big|_{t=0}=0 \tag{3.35}$$

634 5

соответственно, где $v=V(t)\varphi$, а $v'=V(t)\varphi'$. Из (2.35) и (2.4) следует

$$\|w\|^2_{W_T} \le c(T)\varepsilon^2(\sup_{0\le t\le T}|v|_1)\beta^{2\delta}\int_0^T|v|_2^2\,dt \le c(T)\varepsilon^2(\|v\|_{W_T})\beta^{2\delta}\|v\|^2_{W_T}. \tag{3.36}$$

Согласно (3.4)

$$\|v\|^2_{W_T} \le c_3(T,R)|\varphi|_1^2, \tag{3.37}$$

где $c_3(T,R)=2c(T)[1-2\varepsilon^2(\sqrt{\eta_0})c(T)\min(\beta^{2\delta},T^\delta)]^{-1}$.

Из (3.36) и (3.37) следует оценка

$$\|w\|_{W_T} \le \theta_1(T,R,|\varphi|_1)|\varphi|_1 \tag{3.38}$$

и, тем более, оценка (3.33$_1$) с

$$\theta_1^2(T,R,|\varphi|_1)=c(T)c_3(T,R)\beta^{2\delta}\varepsilon^2(\sqrt{c_3(T,R)}|\varphi|_1).$$

Аналогично получаем

$$\|\tilde{w}\|^2_{W_T} \le 2c(T)\beta^{2\delta}[\varepsilon_1^2(\|v\|_{W_T}+\|v'\|_{W_T})+$$

$$+2\mu^2(\|v\|_{W_T}+\|v'\|_{W_T})(\|v\|^{2-2\delta}_{W_T}+\|v'\|^{2-2\delta}_{W_T})]\|v-v'\|^2_{W_T},$$

откуда, в силу (3.32$_1$)для v и v', следует (3.33$_2$) с $\theta_2(T,R,\tau)\to 0$ при $\tau\to 0$.

§ 4. Об устойчивости стационарных и вынужденных периодических решений нелинейной задачи.

В этом параграфе будет дано обоснование принципа линеаризации для задачи (2.I). Предположим, что оператор K удовлетворяет условиям 3) § 2 и дифференцируем по Фреше . Более того, для $\forall$ $u, v, v' \in H_2$

$$K(u+v)-K(u)=A_2(u)v+B(u,v), \tag{4.I}$$

где $A_2(u)v$ - линейный по v , а $B(u,v)$ - нелинейный операторы, обладающие следующими свойствами:

$$|A_2(u)v|\le \nu(|u|_1)|v|_1^\delta|v|_2^{1-\delta}, \tag{4.2}$$

$$|B(u,v)|\le \nu(|u|_1)\varepsilon(|v|_1)|v|_1^\delta|v|_2^{1-\delta}, \tag{4.3}$$

$$|B(u,v)-B(u,v')| \leq \nu(|u|_1)[\varepsilon_1(|v|_1+|v'|_1)|v-v'|_1^{\delta}\,|v-v'|_2^{1-\delta}+ \tag{4.4}$$
$$+\mu_1(|v|_1+|v'|_1)(|v|_2^{1-\delta}+|v'|_2^{1-\delta})|v-v'|_1,$$

где $\varepsilon(\tau), \varepsilon_1(\tau), \mu_1(\tau), \nu(\tau)$ - неотрицательные, неубывающие, непрерывные функции $\tau \geq 0$, причем $\varepsilon(0)=\varepsilon_1(0)=0$.

Пусть уравнение (2.I) имеет решение при $0 \leq t < \infty$, принадлежащее классу $\tilde{W}_\infty = \{u \in W_T,\ \forall T<\infty,\ \sup\limits_{t>0}|u(t)|_1 < \infty\}$. Мы хотим исследовать поведение решений $v(t)$ уравнения (2.I), мало отличающихся (в норме H_1) от $u(0)$ в момент времени $t=0$. Разность $w(t)=v(t)-u(t)$ есть решение задачи

$$\frac{dw}{dt}+A(t)w+A_2(u)w+B(u,w)=0,\quad w|_{t=0}=v(0)-u(0)\equiv\varphi, \tag{4.5}$$

где $A(t)=A_0+A_1(t)$ - линейный оператор, свойства которого описаны в начале § 2 (см. I) -2)). Из (4.2) и принадлежности $u(t)$ к $\tilde{W}_\infty$ следует, что линейный оператор $A(t)+A_2(u(t))$ также удовлетворяет условиям I) -2) § 2. Сопоставим (4.5) линеаризованную задачу

$$\frac{dz}{dt}+A(t)z+A_2(u)z=0,\quad z|_{t=s}=\varphi,\quad t\geq s\geq 0. \tag{4.6}$$

Обозначим через $W(t)$ и $Z(t,s)$ разрешающие операторы задач (4.5) и (4.6) соответственно.

Теорема 4.I. Пусть для $A_0, A_1(t)$ и K выполнены условия I) -3) § 2 и условия (4.I) - (4.4) данного параграфа, и пусть для оператора $Z(t,s)$ задачи (4.6) справедливо неравенство (2.23) с $\forall\gamma>\gamma_0$, причем $\gamma_0<0$. Тогда задача (4.5) однозначно разрешима в W_∞ при $\forall\varphi\in K_R\equiv\{\psi: |\psi|_1\leq R\}$, если R достаточно мало, и

$$|W(t)\varphi|_1 \leq c_8(R)e^{\gamma t}|\varphi|_1. \tag{4.7}$$

Эта теорема гарантирует однозначную разрешимость задачи (2.I) в $\tilde{W}_\infty$ при начальных данных, мало отличающихся (в норме H_1) от начального значения u_0 исследуемого ее решения $u(t)$, и стремление (экспоненциальное) этих решений $v(t)$ к $u(t)$ при $t\to\infty$. Она есть следствие теоремы 3.2. Действительно, линейный оператор $A(t)+A_2(u)$ и нелинейный оператор $B(u,w)$, входящие в (4.5), обладают всеми свойствами, требуемыми в теореме 3.2 от операторов $A(t)$ и K, входящих в уравнение (2.I). Правда, в данном случае нелинейный оператор, $Kw\equiv B(u,w)=B(u(t),w),\ u(t)\in\tilde{W}_\infty$ явно зависит от t. Но такая зависимость K от t, как легко видеть из рассуждений § 3, ничего не меняет. Из теоремы 4.I вытекают два следствия.

Следствие 4.I. Пусть оператор A_1 и свободный член f в уравнении (2.I) не зависит от t, и пусть u есть стационарное решение уравнения (2.I), принадлежащее H_2. Тогда, если A_0, A_1 и K — удовлетворяют условиям I) –3) § 2 и условиям (4.I)–(4.4) и если спектр линейного оператора $-(A_0+A_1+A_2(u))=-(A+A_2(u))$ лежит в левой полуплоскости, то решение u устойчиво по отношению к малым (в норме H_1) отклонениям.

Действительно, в этом случае разрешающий оператор $Z(t,s)$ задачи (4.6) имеет вид: $Z(t,s)=Z(t-s)$ и для него в силу теоремы 2.4 справедливо неравенство (2.I9) с $\forall \gamma>\gamma_0$, где $\gamma_0<0$, или, что то же, неравенство (2.23) — условие на $Z(t,s)$ из теоремы 4.I.

Пусть теперь $A_1(t)$ и $f(t)$ из (2.I) являются ω –периодическими функциями t, а $u(t)$— соответствующим им ω-периодическим решением (2.I). В этом случае оператор $Z(\omega,0)$ соответствующий задаче (4.6), называется оператором монодромии. Он удовлетворяет условию $Z((k+1)\omega, k\omega)=Z(\omega,0)=Z(\omega)$ с любым целым $k\geqslant 0$.

Следствие 4.2. Если спектр оператора монодромии лежит внутри единичного круга, то решение $u(t)$ устойчиво.

Для доказательства этого факта воспользуемся формулами Рисса

$$Z(\omega)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda(\lambda I - Z(\omega))^{-1}\,d\lambda \tag{4.8}$$

и

$$Z^n(\omega)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^n(\lambda I - Z(\omega))^{-1}\,d\lambda. \tag{4.9}$$

В них в качестве контура Γ можно взять окружность $|\lambda|=q<1$. Из (4.9) следует, что для $\forall \varphi\in H_1$

$$|Z^n(\omega)\varphi|_1\leqslant c q^n|\varphi|_1. \tag{4.I0}$$

Представляя оператор $Z(t,s)$ в виде $Z(t,s)=Z(t,n\omega)Z(n\omega,(n-1)\omega)\ldots Z(l\omega,s)$ с целыми n, $l>0$ и $t-n\omega>0$, $l\omega-s>0$, получим

$$|Z(t,s)\varphi|_1=|Z(t,n\omega)Z^{n-l}(\omega)\,Z(l\omega,s)\varphi|_1\leqslant C_1 c q^{n-l}|\varphi|_1\leqslant C_2 e^{\gamma(t-s)}|\varphi|_1, \tag{4.II}$$

где $\gamma=\frac{1}{\omega}\ln q$. Тем самым $Z(t,s)$ удовлетворяет требованиям теоремы 4.1 и следовательно $u(t)$ устойчиво по отношению к малым возмущениям.

Стационарное решение u задачи (2.I) (о нем может идти речь, если, конечно, A_1 и f не зависят от t) можно рассматривать как периодическое решение с любым периодом ω; а в качестве оператора монодромии взять оператор $Z(\omega)=e^{-(A+A_2(u))\omega}$ с $\forall\omega>0$. Если спектр оператора $-(A+A_2(u))$ находится в левой полуплоскости, то при достаточно большом ω спектр $Z(\omega)$ будет лежать внутри единичного круга, и для $Z(\omega)$ будет справедлива оценка

$$|Z(\omega)\varphi|_1 \leq q|\varphi|_1, \quad q<1. \tag{4.12}$$

Ввиду этого, в дальнейшем мы будем рассматривать стационарные решения, как частный случай периодических, и все условия выговаривать в терминах оператора монодромии, обозначая его просто через Z. Кроме того, не оговаривая это особо, будем считать, что для операторов A_0, A_1 и K выполнены условия I)-3) § 2 и условия (4.I) - (4.4).

Теорема 4.2. *Пусть спектр $\sigma(Z)$ оператора монодромии Z распадается на две замкнутые компоненты: $\sigma(Z)=\sigma_1(Z)\cup\sigma_2(Z)$ из которых $\sigma_1(Z)$ лежит вне круга радиуса $\beta_1>1$, а $|\sigma_2(Z)|\leq 1$ (в случае стационарного решения и это означает, что у оператора $-(A+A_2(u))$ имеются точки спектра, лежащие в правой полуплоскости). Тогда существует такое $\varepsilon>0$, что для любого сколь угодно малого $\delta>0$ найдутся такой элемент $\varphi\in H_1$, с $|\varphi|_1\leq\delta$ и такое n, что $|W(n\omega)\varphi|_1\geq\varepsilon$. Иными словами, исследуемое решение u будет неустойчивым.*

Доказательство: Представим Z в виде суммы $Z=Z_1+Z_2$, где

$$Z_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k}\lambda(\lambda I-Z)^{-1}d\lambda.$$

В качестве Γ_1 возьмем две окружности $|\lambda|=\beta_1$ и $|\lambda|=\beta^{(1)}$ (последняя должна охватывать весь спектр Z), а в качестве Γ_2 - окружность $|\lambda|=\beta_2<\beta_1$. Это разложение Z порождает разложение H_1 в прямую сумму: $H_1=X_1\dot{+}X_2$, причем операторы

$$P_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k}(\lambda I-Z)^{-1}d\lambda$$

являются проекторами на X_k, $k=1,2$. Известно, что

$$P_1P_2=P_2P_1=0,\quad P_k^2=P_k,\quad Z_k=P_kZ=ZP_k,\quad Z_1Z_2=0,$$

и $\sigma_k(Z_k)=\sigma(Z_k)$ - есть спектр оператора Z_k на подпространстве X_k. Из формул

$$Z_1^{-n}\psi=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\lambda^{-n}(\lambda I-Z)^{-1}\psi\, d\lambda,$$

$$Z_2^{n}\varphi=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\lambda^{n}(\lambda I-Z)^{-1}\varphi\, d\lambda,$$

справдливых для $\forall\psi\in X_1$, и $\varphi\in X_2$, вытекает, что

$$|Z_1^{-n}\psi|_1\leq c\beta_1^{-n}|\psi|_1,\quad |Z_2^{n}\varphi|_1\leq c\beta_2^{n}|\varphi|_1$$

и, следовательно, $|Z_1^{n}\psi|_1\geq c^{-1}\beta_1^{n}|\psi|_1$. При достаточно большом n число $c^{-1}\beta_1^n=b>1$, а $c\beta_2^n<b$. Фиксируем такое n и введем новые обозначения:

$$\mathcal{Z}=Z^n,\quad \mathcal{Z}_i=Z_i^n,\quad \mathcal{W}=W(n\omega),\quad \mathcal{R}=\hat{R}(n\omega), \tag{4.13}$$

где $W(t)$ - нелинейный оператор, соответствующий задаче (4.5), а $\hat{R}(t)=W(t)-Z(t,0)$, где $Z(t,s)$ - оператор, соответствующий задаче (4.6). В силу теоремы 3.5 $Z(t,0)$ есть дифференциал Фреше оператора $W(t)$ в нуле пространства H_1. Легко видеть, что

$$\mathcal{W}=\mathcal{Z}+\mathcal{R},\quad \mathcal{Z}=\mathcal{Z}_1+\mathcal{Z}_2,\quad |\mathcal{Z}_1|>b>1,\quad |\mathcal{Z}_2|<b \tag{4.14}$$

(здесь $|\mathcal{Z}_i|$ - есть норма оператора $\mathcal{Z}_i$ в пространстве X_i). По теореме 3.5

$$|\mathcal{R}\varphi|_1\leq\theta(|\varphi|_1)|\varphi|_1,\quad \theta(\tau)\to 0 \qquad \tau\to 0. \tag{4.15}$$

Обозначим через $\sum_\varepsilon$ множество элементов шара $K_\varepsilon=\{\varphi:|\varphi|_1\leq\varepsilon\}$, для которых $|P_1\varphi|_1\geq 2|P_2\varphi|_1$. Для них

$$\begin{aligned}|P_1\mathcal{W}\varphi|_1&=|P_1(\mathcal{Z}\varphi+\mathcal{R}\varphi)|_1\geq|\mathcal{Z}_1\varphi|_1-|P_1|\theta(|\varphi|_1)|\varphi|_1\geq\\&\geq b|P_1\varphi|_1-|P_1|\theta(|\varphi|_1)(|P_1\varphi|+|P_2\varphi|)\geq\\&\geq[b-\tfrac{3}{2}|P_1|\theta(|\varphi|_1)]|P_1\varphi|_1,\end{aligned} \tag{4.16}$$

а

$$|P_2\mathcal{W}\varphi|_1\leq|\mathcal{Z}_2||P_2\varphi|_1+\tfrac{3}{2}|P_2|\theta(|\varphi|_1)|P_1\varphi|_1.$$

Отсюда следует, что

$$|P_1\mathcal{W}\varphi|_1-2|P_2\mathcal{W}\varphi|_1\geq[b-|\mathcal{Z}_2|-\tfrac{3}{2}(|P_1|+2|P_2|)\theta(\varepsilon)]|P_1\varphi|_1\geq 0, \tag{4.17}$$

если ε столь мало, что

$$b-|\mathcal{Z}|_2-\tfrac{3}{2}(|P_1|+2|P_2|)\theta(\varepsilon)\geq 0. \tag{4.18}$$

Подчиним ε еще одному ограничению:

$$b-\tfrac{3}{2}|P_1|\theta(\varepsilon)\geq b_1>1. \tag{4.19}$$

Тогда в силу (4.15) для $\forall\varphi\in\sum_{\varepsilon}$
$$|P_1 \mathcal{W}\varphi|_1 \geq b_1 |P_1\varphi|_1. \tag{4.20}$$

Пусть ε таково, что (4.18) и (4.19) выполнены. Тогда, если $|\mathcal{W}^j\varphi|_1 \leq \varepsilon$ для $j=1,\dots,n-1$, то в силу (4.16) элементы $\mathcal{W}^j\varphi$, $j=1,\dots,n-1$ будут принадлежать $\sum_\varepsilon$, и потому для них будут выполняться неравенства:
$$|P_1\mathcal{W}^n\varphi|_1 \geq b_1|P_1\mathcal{W}^{n-1}\varphi|_1 \geq \dots \geq b_1^n|P_1\varphi|, \quad b_1 > 1,$$
из которых следует, что при достаточно большом $n|\mathcal{W}^n\varphi|_1$ окажется больше ε. Теорема доказана.

§ 5. Построение инвариантных многообразий

Теорема 4.2 допускает существенную детализацию в отношении поведения всех решений $v(t)$ уравнения (2.1), начальные значения которых лежат в ε-окрестности начального значения выделенного ω-периодического (в частности, стационарного) решения $u(t)$ этого же уравнения, если известно, что спектр $\sigma(Z)$ оператора монодромии не пересекает единичной окружности. А именно, справедлива следующая теорема:

Теорема 5.1. *Пусть выполнены все условия теоремы 4.2 (в том числе операторы $A_0, A_1(t)$ и K удовлетворяют условиям 1)-3) § 2 и условиям (4.1)-(4.4)) и пусть дополнительно известно, что спектр $\sigma(Z)$ оператора монодромии Z распадается на две замкнутые компоненты $\sigma_1(Z)$ и $\sigma_2(Z)$, из которых $\sigma_1(Z)$ лежит вне, а $\sigma_2(Z)$ внутри единичной окружности, так что $|\sigma_1(Z)|>1$, а $|\sigma_2(Z)|<1$. Тогда в шаре $K_\varepsilon = \{\varphi: |\varphi|_1 \leq \varepsilon\}$ достаточно малого радиуса ε существуют два многообразия Y_1 и Y_2, инвариантные относительно нелинейного оператора $\mathcal{W}$, касающиеся подпространств X_1 и X_2 в точке $\varphi=0$ и обладающие следующими свойствами: 1) для $\forall\varphi\in Y_2$ элементы $\mathcal{W}^n\varphi$, $n=1,2,\dots$, принадлежат Y_2 и стремятся к при $n\to\infty$; 2) для $\forall\varphi\in Y_1$ определены отрицательные степени $\mathcal{W}^{-n}\varphi$, $n=1,2,\dots$ оператора $\mathcal{W}$ и $\mathcal{W}^{-n}\varphi\to 0$ при $n\to\infty$; 3) если $\varphi\,\overline{\in}\,Y_2$, то найдется такое $n>2$, что точка $\mathcal{W}^n\varphi$ выйдет из шара K_ε.*

Замечание 5.1. В задачах гидродинамики для уравнений Навье-Стокса в ограниченной области и в задачах магнитной гидрадинамики, рассматриваемых нами в следующих параграфах, оператора W, а следовательно и его дифференциал Фреше Z, являются вполне непрерывными. Благодаря этому часть спектра $\sigma_1(Z)$ состоит из конечного числа собственных значений, подпространство X_1 и многообразие Y_1 конечномерны, а X_2 и Y_2 имеют конечную коразмерность. Для абстрактного уравнения (2.I) это соответствует случаю, когда оператор A_0^{-1} вполне непрерывен.

Используем обозначения, введенные при доказательстве теоремы 4.2. В частности, для операторов $\mathcal{Z}_1$ и $\mathcal{Z}_2$ считаем выполненными нарвенства

$$|\mathcal{Z}_1| \geqslant \beta_1 > 1, \quad |\mathcal{Z}_2| \leqslant \beta_2 < 1,$$

а для операторов $\mathcal{R} = \hat{R}(n\omega) = W(n\omega) - Z(n\omega, 0)$, $\mathcal{R}_1 = P_1\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_2 = P_2\mathcal{R}$ — неравенства

$$|\mathcal{R}\varphi|_1 \leqslant \theta(|\varphi|_1)|\varphi|_1, \tag{5.I}$$

$$|\mathcal{R}\varphi - \mathcal{R}\varphi'|_1 \leqslant \theta(max\{|\varphi|_1, |\varphi'|_1\})|\varphi - \varphi'|_1 \tag{5.2}$$

с непрерывной положительной неубывающей функцией $\theta(\tau)$, равной нулю при $\tau = 0$ (см. теорему 3.5). В этих неравенствах φ и φ' – произвольные элементы некоторого шара $K_\varepsilon = \{\psi : |\psi|_1 \leqslant \varepsilon\}$, внутри которого ведутся все последующие рассуждения.

Будем строить многообразие Y_2, считая, что оно задается уравнением

$$\varphi_1 = \Phi(\varphi_2), \tag{5.3}$$

где $\varphi_k = P_k\varphi$. Условие его инвариантности относительно преобразования $\mathcal{W}$ запишем в виде

$$P_1 \mathcal{W}\varphi\Big|_{\varphi_1 = \Phi(\varphi_2)} = \Phi(P_2\mathcal{W}\varphi)\Big|_{\varphi_1 = \Phi(\varphi_2)}, \tag{5.4}$$

т.е.

$$\mathcal{Z}_1\Phi(\varphi_2) + \mathcal{R}_1(\Phi(\varphi_2) + \varphi_2) = \Phi(\mathcal{Z}_2\varphi_2 + \mathcal{R}_2(\Phi(\varphi_2) + \varphi_2)).$$

Применив к последнему соотношению оператор $\mathcal{Z}_1^{-1}$, получим

$$\Phi(\varphi_2) = \mathcal{Z}_1^{-1}\Phi(\mathcal{Z}_2\varphi_2 + \mathcal{R}_2(\Phi(\varphi_2) + \varphi_2)) - \mathcal{Z}_1^{-1}\mathcal{R}_1(\Phi(\varphi_2) + \varphi_2) \equiv \mathcal{F}(\Phi, \varphi_2). \tag{5.5}$$

Это соотношение рассмотрим как уравнение для определения преобразования Φ, которое мы будем искать в классе $A_{\tau,\gamma}$ всех непрерывных отображений $\Phi(\varphi_2)$, $\mathcal{D}_\tau \to X_1$, где $\mathcal{D}_\tau$ – шар $\{|\varphi_2|_1 \leqslant \tau\}$ пространства X_2 удовлетворяющих условиям: $\Phi(0) = 0$ и

$$|\Phi(\varphi_2') - \Phi(\varphi_2'')|_1 \leqslant \gamma|\varphi_2' - \varphi_2''|_1, \quad \gamma > 0,$$

а следовательно и

$$|\Phi(\varphi_2)|_1 \leqslant \gamma |\varphi_2|_1 .$$

Определим также отображение

$$\tilde{\Phi}(\varphi_2) = \Phi(\varphi_2) + \varphi_2 : \mathcal{D}_\tau \to H_1 = X_1 + X_2 .$$

Если $\Phi \in A_{\tau,\gamma}$, то

$$|\tilde{\Phi}(\varphi_2)|_1 \leqslant (\gamma+1)|\varphi_2|_1 ,$$

$$|\tilde{\Phi}(\varphi_2') - \tilde{\Phi}(\varphi_2'')|_1 \leqslant (\gamma+1)|\varphi_2' - \varphi_2''|_1 .$$

Проверим теперь, что оператор $\mathcal{F}$ отображает $A_{\tau,\gamma}$ в себя, если τ достаточно мало. Согласно (5.5),

$$\mathcal{F}(\Phi,\varphi_2) = \mathcal{Z}_1^{-1}\Phi(T_2(\varphi_2)) - \mathcal{Z}_1^{-1}\mathcal{R}_1(\tilde{\Phi}(\varphi_2)), \tag{5.6}$$

где $T_2(\varphi_2) = \mathcal{Z}_2\varphi_2 + \mathcal{R}_2(\tilde{\Phi}(\varphi_2))$ удовлетворяет неравенствам

$$|T_2(\varphi_2)|_1 \leqslant [\beta_2 + \theta((\gamma+1)\tau)(\gamma+1)]|\varphi_2|_1 \leqslant |\varphi_2|_1 , \tag{5.7}$$

$$|T_2(\varphi_2') - T_2(\varphi_2'')|_1 \leqslant |\varphi_2' - \varphi_2''|_1 , \tag{5.8}$$

если только τ таково, что

$$\beta_2 + \theta((\gamma+1)\tau)(\gamma+1) \leqslant q_1 < 1. \tag{5.9}$$

Следовательно,

$$|\mathcal{F}(\Phi,\varphi_2)|_1 \leqslant \beta_1^{-1}[\gamma + \theta((\gamma+1)\tau)(\gamma+1)]|\varphi_2|_1 ,$$

$$|\mathcal{F}(\Phi,\varphi_2') - \mathcal{F}(\Phi,\varphi_2'')|_1 \leqslant \beta_1^{-1}[\gamma + \theta((\gamma+1)\tau)(\gamma+1)]|\varphi_2' - \varphi''|_1 ,$$

так что $\mathcal{F}(\Phi,\varphi_2) \in A_{\tau,\gamma}$, если, кроме (5.9), выполняется неравенство

$$\beta_1^{-1}[\gamma + \theta((\gamma+1)\tau)(\gamma+1)] \leqslant \gamma . \tag{5.10}$$

Теперь покажем, что при малом τ $\mathcal{F}$ является оператором сжатия над Φ в метрике $C(\mathcal{D}_\tau)$: $\max\limits_{\varphi_2 \in \mathcal{D}_\tau} |\Phi(\varphi_2)|_1 \equiv \|\Phi\|$. Положим $T_2'(\varphi_2) \equiv \mathcal{Z}_2\varphi_2 + \mathcal{R}_2(\Phi'(\varphi_2) + \varphi_2)$, $T_2''(\varphi_2) \equiv \mathcal{Z}_2\varphi_2 + \mathcal{R}_2(\Phi''(\varphi_2) + \varphi_2)$. Тогда

$$\mathcal{F}(\Phi',\varphi_2) - \mathcal{F}(\Phi'',\varphi_2) = \mathcal{Z}_1^{-1}\{[\Phi'(T_2'(\varphi_2)) - \Phi''(T_2''(\varphi_2))] -$$

$$-[\mathcal{R}_1(\Phi'(\varphi_2)+\varphi_2) - \mathcal{R}_1(\Phi''(\varphi_2)+\varphi_2)]\} = \mathcal{Z}_1^{-1}\{[\Phi'(T_2'(\varphi_2)) - \Phi''(T_2'(\varphi_2))] +$$

$$+[\Phi''(T_2'(\varphi_2)) - \Phi''(T_2''(\varphi_2))] - [\mathcal{R}_1(\Phi'(\varphi_2)+\varphi_2) - \mathcal{R}_1(\Phi''(\varphi_2)+\varphi_2)]\},$$

откуда с помощью (5.I),(5.2),(5.7),(5.8) получаем

$$|\mathcal{F}(\Phi',\varphi_2)-\mathcal{F}(\Phi'',\varphi_2)|_1\leqslant\beta_1^{-1}\{\|\Phi'-\Phi''\|+(1+\gamma)\theta((\gamma+1)\tau)\|\Phi'-\Phi''\|\}=$$

$$=\beta_1^{-1}\left[1+(1+\gamma)\theta((\gamma+1)\tau)\right]\|\Phi'-\Phi''\|.$$

Отсюда следует $\|\mathcal{F}(\Phi',\varphi_2)-\mathcal{F}(\Phi'',\varphi_2)\|<\|\Phi'-\Phi''\|$, если

$$\beta_1^{-1}\left[1+(1+\gamma)\theta((\gamma+1)\tau)\right]\leqslant q<1. \tag{5.II}$$

Поэтому при условиях (5.9)–(5.II) можно решить уравнение (5.5) методом последовательных приближений: $\Phi_0=0$, $\Phi_{n+1}=\mathcal{F}(\Phi_n,\varphi_2)$. Решением уравнения (5.5) будет отображение $\Phi(\varphi_2)\in A_{\tau,\gamma}$. Таким образом, инвариантное многообразие Y_2 вида (5.5) построено. Покажем, что оно касается X_2 в точке $\varphi_2=0$, т.е. что $|\Phi(\varphi_2)|_1\leqslant\leqslant|\varphi_2|_1\,\theta_1(|\varphi_2|_1)$, $\theta_1(\tau)\to 0$ при $\tau\to 0$. Для этого запишем уравнение (5.5) в виде

$$\Phi(\varphi_2)=\mathcal{Z}_1^{-1}\Phi(\mathcal{Z}_2\varphi_2)+\mathcal{F}_1(\Phi,\varphi_2), \tag{5.I2}$$

где

$$\mathcal{F}_1(\Phi,\varphi_2)=\mathcal{Z}_1^{-1}\left[\Phi(\mathcal{Z}_2\varphi_2+\mathcal{R}_2(\Phi(\varphi_2)+\varphi_2))-\Phi(\mathcal{Z}_2\varphi_2)\right]-\mathcal{Z}_1^{-1}\mathcal{R}_1(\Phi(\varphi_2)+\varphi_2).$$

Отображение $\mathcal{F}_1(\Phi,\varphi_2)$ удовлетворяет неравенству

$$|\mathcal{F}_1(\Phi,\varphi_2)|_1\leqslant\beta_1^{-1}\theta((\gamma+1)|\varphi_2|_1)(1+\gamma)^2|\varphi_2|_1\equiv\tilde{\theta}(|\varphi_2|_1)|\varphi_2|_1 \tag{5.I3}$$

с непрерывной монотонно возрастающей функцией $\tilde{\theta}(\tau)$, равной нулю при $\tau=0$. Из (5.I2) следует

$$\Phi(\mathcal{Z}_2\varphi_2)=\mathcal{Z}_1^{-1}\Phi(\mathcal{Z}_2^2\varphi_2)+\mathcal{F}_1(\Phi,\mathcal{Z}_2\varphi_2)$$

и

$$\Phi(\varphi_2)=\mathcal{F}_1(\Phi,\varphi_2)+\mathcal{Z}_1^{-1}\mathcal{F}_1(\Phi,\mathcal{Z}_2\varphi_2)+\mathcal{Z}_1^{-2}\Phi(\mathcal{Z}_2^2,\varphi_2).$$

Дальнейший процесс итерации уравнения (5.I2) дает

$$\Phi(\varphi_2)=\sum_{j=0}^{N}\mathcal{Z}_1^{-j}\mathcal{F}_1(\Phi,\mathcal{Z}_2^{j}\varphi_2)+\mathcal{Z}_1^{-N-1}\Phi(\mathcal{Z}_2^{N+1}\varphi_2).$$

Благодаря (5.I3) и сжимающим свойствам операторов $\mathcal{Z}_1^{-1}$ и $\mathcal{Z}_2$,

$$|\mathcal{Z}_1^{-j}\mathcal{F}_1(\Phi,\mathcal{Z}_2^{j}\varphi_2)|_1\leqslant\beta_1^{-j}\tilde{\theta}(\beta_2^{j}|\varphi_2|_1)\beta_2^{j}|\varphi_2|_1$$

и потому

$$|\Phi(\varphi_2)|_1\leqslant\frac{1}{1-\beta_2\beta_1}\tilde{\theta}(|\varphi_2|_1)|\varphi_2|_1,$$

т.е. поверхность Y_2 действительно касается подпространства X_2 в точке $\tau=0$.

Пусть $\varphi=\tilde{\Phi}(\varphi_2)\in Y_2$. Тогда в силу (5.4)

$$\mathcal{W}\varphi = P_1\mathcal{W}\varphi + P_2\mathcal{W}\varphi = \Phi(P_2\mathcal{W}\varphi)+P_2\mathcal{W}\varphi$$

и аналогично для всех $n\geqslant 1$

$$\mathcal{W}^n\varphi = \Phi(P_2\mathcal{W}^n\varphi)+P_2\mathcal{W}^n\varphi = \Phi((\mathcal{W}^n\varphi)_2)+(\mathcal{W}^n\varphi)_2.$$

Далее

$$|(\mathcal{W}\varphi)_2|_1 = |P_2\mathcal{W}\varphi|_1 = |P_2(\mathcal{Z}+\mathcal{R})\varphi|_1 = |\mathcal{Z}_2\varphi_2+\mathcal{R}_2(\tilde{\Phi}(\varphi_2))|_1 \leqslant$$

$$\leqslant \beta_2|\varphi_2|_1+\theta((\gamma+1)\tau)(\gamma+1)|\varphi_2|_1 \leqslant q_1|\varphi_2|_1,$$

где $q_1<1$ (см. (5.9)). Следовательно, при $n\to\infty$ $|(\mathcal{W}^n\varphi)_2|_1$ и $|\mathcal{W}^n\varphi|_1 \leqslant (1+\gamma)|(\mathcal{W}^n\varphi)_2|_1 \to 0$.

Другое инвариантное многообразие Y_1, касающееся в нуле подпространства X_1, строится аналогично. А именно, будем искать его в виде

$$\varphi_2=\Psi(\varphi_1),\quad \varphi_1\in\mathcal{D}_\tau=\{\varphi_1\in X_1,\ |\varphi_1|_1\leqslant\tau\}.$$

Условие его инвариантности имеет вид $(\mathcal{W}\varphi)_2=\Psi((\mathcal{W}\varphi)_1)$, или, что то же,

$$\mathcal{Z}_2\Psi(\varphi_1)+\mathcal{R}_2(\varphi_1+\Psi(\varphi_1)) = \Psi(\mathcal{Z}_1\varphi_1+\mathcal{R}_1(\varphi_1+\Psi(\varphi_1))). \tag{5.14}$$

Отображение $\Psi(\varphi_1):\mathcal{D}_2\to X_2$ будем искать в классе $A_{\gamma,\tau_{\gamma^{-1}}}$, определяемом так же, как и выше. Заменим в (5.14) φ_1 на $\mathcal{Z}_1^{-1}\varphi_1$ и результат запишем так:

$$\Psi(\varphi_1+\mathcal{R}_1(\mathcal{Z}_1^{-1}\varphi_1+\Psi(\mathcal{Z}_1^{-1}\varphi_1)) = \mathcal{Z}_2\Psi(\mathcal{Z}_1^{-1}\varphi_1)+\mathcal{R}_2(\mathcal{Z}_1^{-1}\varphi_1+\Psi(\mathcal{Z}_1^{-1}\varphi_1)). \tag{5.15}$$

Преобразование $\varphi_1\to\mathcal{T}\varphi_1=\varphi_1+\mathcal{R}_1(\mathcal{Z}_1^{-1}\varphi_1+\Psi(\mathcal{Z}_1^{-1}\varphi))\equiv\chi_1$ при $\Psi\in A_{\gamma,\tau}$ с τ, не превосходящим некоторого $\tau_1>0$, устанавливает взаимно однозначное соответствие между $\mathcal{D}_\tau$ и некоторой замкнутой окрестностью нуля $\tilde{\mathcal{D}}_\tau$ в X_1. Благодаря этому уравнение (5.15) эквивалентно уравнению

$$\Psi(\chi_1)=\mathcal{Z}_2\Psi(\mathcal{Z}_1^{-1}\mathcal{T}^{-1}\chi_1)+\mathcal{R}_2(\mathcal{Z}_1^{-1}\mathcal{T}^{-1}\chi_1+\Psi(\mathcal{Z}_1^{-1}\mathcal{T}^{-1}\chi_1))\equiv\mathcal{F}(\chi_1,\Psi)$$

того же типа, что и уравнение (5.5). Оно решается по методу последовательных приближений и определяет инвариантное многообразие Y_1 (точнее, его малый кусок), касающееся X_1 в точке $\varphi=0$.

Докажем, что на многообразии Y_1 определен оператор $\mathcal{W}^{-1}$, т.е. что уравнение $\chi=\mathcal{W}(\xi)$ имеет единственное решение $\xi\in Y_1$ для любого $\chi\in Y_1$ (напомним, что Y_1 определено лишь в некоторой малой окрестности нуля пространства H_1). Это уравнение можно записать в виде

$$\chi_1 = \mathcal{Z}_1 \xi_1 + \mathcal{R}_1(\xi_1 + \xi_2), \ \chi_2 = \psi(\chi_1) = \mathcal{Z}_2 \xi_2 + \mathcal{R}_1(\xi_1 + \xi_2), \tag{5.16}$$

причем $\xi_2 = \psi(\xi_1)$. Вспоминая определение оператора $\mathcal{T}$, видим, что первое из этих уравнений таково: $\chi_1 = \mathcal{T}\mathcal{Z}_1 \xi_1$. Оно однозначно определяет $\xi_1 = \mathcal{Z}_1^{-1} \mathcal{T}^{-1} \chi_1$. Это ξ_1 и $\xi_2 = \psi(\xi_1)$ удовлетворяют второму уравнению (5.16), ибо тождество

$$\chi_2 = \psi(\chi_1) = \psi(\mathcal{T}\mathcal{Z}_1 \xi_1) = \mathcal{Z}_2 \psi(\xi_1) + \mathcal{R}_2(\xi_1 + \psi(\xi_1))$$

есть не что иное, как тождество (5.14), в котором $\varphi_1 = \mathcal{Z}_1 \xi_1$.Оценим $|\xi|_1 = |\mathcal{W}^{-1}\chi|_1$ для $\chi, \xi \in Y_1$. Ясно, что

$$|\xi_1|_1 = |\mathcal{Z}_1^{-1}\mathcal{T}^{-1}\chi_1|_1 \leqslant \beta_1^{-1} |\mathcal{T}^{-1}\chi_1|_1 .$$

При достаточно малом τ оператор $\mathcal{T}^{-1}$ близок к тождественному и потому $\beta_1^{-1} |\mathcal{T}^{-1}\chi_1|_1 \leqslant q|\chi_1|_1$ с $q<1$, т. $|\xi_1|_1 = |P_1 \mathcal{W}^{-1}\chi|_1 \leqslant$ $\leqslant q|P_1\chi|_1$. Отсюда следует, что $|P_1\mathcal{W}^{-n}\chi|_1 \leqslant$ $|P_1 \mathcal{W}^{-n+1}\chi|_1 \leqslant \ldots$ $\leqslant q^n |P_1\chi|_1 \to 0$ при $n \to \infty$ и $P_2 \mathcal{W}^{-n}\varphi = \psi(P_1 \mathcal{W}^{-n}\varphi) \to 0$ при $n \to \infty$.

Осталось доказать, что если точка $\varphi \overline{\in} Y_2$, то найдется такое n , что $|\mathcal{W}^n \varphi| \geqslant \varepsilon$, где ε - некоторое фиксированное положительное число.

Преобразование

$$\varphi_1 - \Phi(\varphi_2) = \psi_1 , \ \varphi_2 - \psi(\varphi_1) = \psi_2 \tag{5.17}$$

которое мы будем коротко записывать так: $\varphi = S\psi$, устанавливает взаимно однозначное соответствие между шаром $K_\varepsilon = \{\psi : |\psi|_1 \leqslant \varepsilon\}$ пространства H_1 и некоторой замкнутой окрестностью нуля $\tilde{K}_\varepsilon$. Так как

$$|\Phi(\varphi_2)| \leqslant \theta_1(|\varphi_2|_1)|\varphi_2|_1, \ |\psi(\varphi_1)| \leqslant \theta_1(|\varphi_1|_1)|\varphi_1|_1,$$

то

$$|(I - S^{-1})\varphi|_1 \leqslant \theta_2(|\varphi|_1)|\varphi|_1, \ |(I - S)\varphi|_1 \leqslant \theta_2(|\varphi|_1)|\varphi|_1,$$

где $\theta_i(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$, и нетрудно показать, что при достаточно малом ε $K_{2\varepsilon} \supset \tilde{K}_\varepsilon \supset K_{\frac{\varepsilon}{2}}$. Для любого $\psi \in K_\varepsilon$ имеем $S^{-1}\mathcal{W}S\psi = \mathcal{Z}\psi + \tilde{\mathcal{R}}\psi$, где $\tilde{\mathcal{R}}\psi = S^{-1}\mathcal{R}S\psi + S^{-1}[\mathcal{Z}(S-I) - (S-I)\mathcal{Z}]\psi$ - преобразование, удовлетворяющее тем же условиям (5.1), (5.2), что и $\mathcal{R}$. Многообразия Y_1 и Y_2 преобразование (5.13) переводит в линейные подпространства X_1 и X_2 , которые, таким образом, в окрестности нуля инвариантны относительно преобразований $S^{-1}\mathcal{W}S, \mathcal{Z}$, $\tilde{\mathcal{R}}$. Следовательно, $P_1 \tilde{\mathcal{R}} P_2 = 0$ и

$$P_1 S^{-1}\mathcal{W}S\psi = P_1 \mathcal{Z}\psi + P_1[\tilde{\mathcal{R}}\psi - \tilde{\mathcal{R}}P_2\psi] = \mathcal{Z}_1\psi_1 - P_1[\tilde{\mathcal{R}}(\psi_1 + \psi_2) - \tilde{\mathcal{R}}(\psi_2)]$$

Отсюда следует, что

$$|P_1 S^{-1} \mathcal{W} S \psi|_1 \geq [\beta_1 - |P_1| \theta((1+|P_2|)|\psi|_1)] |\psi_1|_1 \geq [\beta_1 - |P_1|\theta((1+|P_2|)\varepsilon)] |P_1 \psi|_1 \geq \mu |P_1 \psi|_1,$$

если только ε настолько мало, что

$$\beta_1 - |P_1|\theta((1+|P_2|)\varepsilon) \geq \mu > 1.$$

Это неравенство показывает, что для любого элемента $\psi \overline{\in} X_2$ (т.е. $\varphi \overline{\in} Y_2$)

$$|P_1 (S^{-1} \mathcal{W} S)^n \psi|_1 \geq \mu^n |P_1 \psi|_1,$$

если только $(S^{-1} \mathcal{W} S)^j \psi \in K_\varepsilon$ при $j = 1, \ldots, n-1$. Ясно, что найдется такое n, что $S^{-1} \mathcal{W} S \psi \overline{\in} K_\varepsilon$, тогда $\mathcal{W}^n \varphi \in K_{\frac{\varepsilon}{2}}$, что и требовалось. Теорема доказана.

Замечание 5.2. Мы назвали Y_2 и Y_1 многообразиями, не вкладывая в это слово другого содержания, как то, что они задаются уравнениями: $\varphi_1 = \Phi(\varphi_2)$, $\varphi_2 \in X_2$, и $\varphi_2 = \Psi(\varphi_1)$, $\varphi_1 \in X_1$, соответственно (напомним, что $\varphi_k = P_k \varphi$, $k = 1, 2$), в которых Φ и Ψ суть непрерывные функции своих аргументов, изменяющихся в некоторых окрестностях нуля подпространств X_2 и X_1. При дополнительных предположениях относительно нелинейного оператора K, входящего в уравнение (2.I), можно показать, что Φ и Ψ являются гладкими функциями своих аргументов.

§ 6. Постановка начально-краевых задач магнитной гидродинамики.

Движение несжимаемой проводящей жидкости в магнитном поле описывается системой уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + \sum_{k=1}^{3} (v_k v_{x_k} - \mu H_k H_{x_k}) + \operatorname{grad}\left(p + \frac{\mu H^2}{2}\right) = f(x,t), \qquad (6.I)$$

$$\operatorname{div} v = 0,$$

$$\operatorname{rot} H = \sigma(E + \mu[v \times H]) + j, \qquad (6.2)$$

$$\operatorname{rot} E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} H = 0, \qquad (6.3)$$

в которой $v(x,t) = (v_1(x,t), v_2(x,t), v_3(x,t))$ – вектор скорости движения жидкости, $H(x,t)$ и $E(x,t)$ – вектора напряженности магнитного и электрического поля, $p(x,t)$ – давление, $f(x,t), j(x,t)$ – заданные внешние силы и токи, μ – магнитная проницаемость, σ – проводимость, ν – кинематическая вязкость жидкости; плотность жидкости положена равной единице. Токами смещения мы, как и в большинстве рассматриваемых в магнитной гидродинамике ситуациях, пренебрегаем.

Будем предполагать, что жидкость находится в ограниченном сосуде Ω с границей S и что на границе выполнено условие прилипания

$$v|_S = \alpha(x,t). \tag{6.4}$$

По физическому смыслу задачи нормальная компонента вектора v на S равна нулю, т.е.

$$\alpha_n|_S = 0. \tag{6.5}$$

Что касается векторов H и E, то мы будем их рассматривать как внутри, так и вне Ω, предполагая, что вне Ω $\sigma = 0$ (это соответствует тому, что вне находится вакуум или диэлектрик). Тогда вектора H и E должны будут удовлетворять вне Ω системе уравнений

$$\mathrm{rot}\, H = 0, \quad \mathrm{div}\, H = 0, \tag{6.6}$$

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} + \mathrm{rot}\, E = 0, \quad \mathrm{div}\, E = 0. \tag{6.7}$$

Краевые условия, которым должны удовлетворять вектора H и E, следующие: на поверхности, являющейся идеальным проводником, должно быть

$$H_n = 0, \tag{6.8}$$

$$E_\tau = 0, \tag{6.9}$$

а на границе раздела двух сред с различными значениями μ ($\mu = \mu_1$ и $\mu = \mu_2$)

$$\begin{gathered} H_\tau^{(1)} = H_\tau^{(2)}, \\ \mu_1 H_n^{(1)} = \mu_2 H_n^{(2)}, \end{gathered} \tag{6.10}$$

$$E_\tau^{(1)} = E_\tau^{(2)}. \tag{6.11}$$

Здесь и ниже $H_\tau = H - n H_\tau$ – касательная составляющая вектора H; $H^{(k)}$ означает предельное значение вектора H на поверхности раздела с той ее стороны, где $\mu = \mu_k$, $k = 1, 2$.

Наконец, для v и H задаются начальные условия

$$\begin{gathered} v|_{t=0} = v_0(x), \\ H|_{t=0} = H_0(x). \end{gathered} \tag{6.12}$$

Ниже рассматриваются следующие две задачи.

Задача I. Жидкость заключена в ограниченный сосуд Ω, поверхность которого S является идеальным проводником, и находится под действием известных гидродинамических и магнитных сил f и j. Сосуд может двигаться, но так, что область Ω, занимаемая им в пространстве R^3, не меняется. Задача состоит в определении v, p, E и H в области $Q_T=\Omega\times[0,T](x\in\Omega, t\in[0,T])$ из системы (6.I)-(6.3), граничных условий (6.4), (6.8), (6.9) и начальных условий (6.I2).

Вектор E можно из уравнений (6.2) и краевых условий исключить и получить для v, p, H начально-краевую задачу:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial v}{\partial t}-\nu\Delta v+\sum_{k=1}^{3}(v_k v_{x_k}-\mu H_k H_{x_k})+\operatorname{grad}\left(p+\mu\frac{H^2}{2}\right)=f,\\
\operatorname{div} v=0,\\
\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{1}{\sigma\mu}\operatorname{rot}\operatorname{rot} H-\operatorname{rot}[v\times H]=\frac{1}{\sigma\mu}\operatorname{rot} j,\\
\operatorname{div} H=0
\end{gathered}\tag{6.I3}$$

при начальных условиях (6.I2) и краевых условиях (6.4), (6.8) и

$$\operatorname{rot}_\tau H\big|_S=j_\tau\big|_S \tag{6.I4}$$

(последнее условие вытекает из (6.2), (6.5), (6.9), поскольку

$$[v\times H]_\tau\big|_S=[\alpha\times H]_\tau\big|_S=0).$$

Если v и H удовлетворяют указанным соотношениям, то вектор

$$E=\frac{1}{\sigma}(\operatorname{rot} H-j-\mu[v\times H]) \tag{6.I5}$$

будет удовлетворять уравнениям (6.2) и краевому условию (6.9).

Задача 2. Сосуд Ω_1 с жидкостью окружен диэлектриком или вакуумом, занимающим ограниченную область Ω_2, внешняя граница которой S_2 является идеальным проводником. Магнитная проницаемость жидкости равна μ_1, диэлектрика $-\mu_2$. Требуется определить v, p, E и H из системы уравнаний (6.I)-(6.3) в Ω_1, (6.6), (6.7) в Ω_2, краевых условий (6.4), (6.I0), (6.II) на поверхности $S_1=\partial\Omega_1$ (6.8), (6.9) на S_2 и начальных условий (6.I2) в Ω_1. В этой задаче вектор E также можно исключить и определить v, p, H из системы уравнений (6.I3) в Ω_1, (6.6) в Ω_2, начальных условий (6.I2) в Ω_1 и краевых условий (6.4), (6.I0) на S_1, (6.8) на S_2. После этого вектор E можно определить следующим образом: в Ω_1 – из формулы (6.I5), а в Ω_2 – из задачи

$$\operatorname{rot} E=-\mu_2\frac{\partial H}{\partial t},\quad \operatorname{div} E=0,$$

$$E_\tau^{(2)}\big|_{S_1}=E_\tau^{(1)}\big|_{S_1}=\frac{1}{\sigma}(\operatorname{rot}_\tau H^{(1)}-j_\tau)\big|_{S_1},\quad E_\tau\big|_S=0.$$

Хотя мы будем считать область Ω_2 ограниченной, точно так же исследуется случай, когда $\Omega_2 = R^3 \setminus \bar{\Omega}_1$. В этом случае краевые условия на S_2 заменяются на

$$H \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad E \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

§ 7. Основные функциональные пространства и некоторые предложения о них.

Введем функциональные пространства, необходимые для исследования задач I и II.

$L_2(\Omega)$ – вещественное гильбертово пространство квадратично интегрируемых вектор-функций (короче – векторов) $u(x) = (u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x))$, заданных в ограниченной области Ω эвклидова пространства R^3, со скалярным произведением

$$(u,v)_\Omega = \int_\Omega u \cdot v\, dx, \quad u \cdot v = \sum_{i=1}^{3} u_i(x) v_i(x) \tag{7.I}$$

и нормой $\|u\|_\Omega = \sqrt{(u,u)}$.

$L_p(\Omega)$, $p \geq 1$ – банахово пространство векторов $u(x)$ с нормой $\|u\|_{L_p(\Omega)} = (\int_\Omega |u(x)|^p dx)^{1/p} < \infty$.

$W_2^\ell(\Omega)$ – гильбертово пространство векторов, принадлежащих $L_2(\Omega)$ вместе со своими производными до порядка ℓ включительно. Скалярное произведение и норма в $W_2^\ell(\Omega)$ определяются формулами

$$(u,v)_\Omega^{(\ell)} = \sum_{|\alpha|\leq \ell} (\mathcal{D}^\alpha u, \mathcal{D}^\alpha v)_\Omega, \quad \|u\|_\Omega^{(\ell)} = \sqrt{(u,u)_\Omega^{(\ell)}} \tag{7.2}$$

$\overset{\circ}{W}{}_2^\ell(\Omega)$ – подпространство $W_2^\ell(\Omega)$, являющееся замыканием в норме $W_2^\ell(\Omega)$ множества бесконечно дифференцируемых финитных в векторов. Символы $L_2(\Omega)$, $W_2^\ell(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^\ell(\Omega)$ будут употребляться также и для обозначения пространств, элементами которых являются вектора с m компонентами (m = I,3,6). В них скалярные произведения определяются теми же формулами (7.I), (7.2), но $u \cdot v = \sum_{i=1}^{m} u_i(x) v_i(x)$.

В данном параграфе речь будет идти только о векторах с тремя компонентами.

Известно, что

$$L_2(\Omega) = \overset{\circ}{J}(\Omega) \oplus G(\Omega),$$

где $G(\Omega)$ – подпространство векторов вида $u = \operatorname{grad} \varphi$, $\varphi \in W_2^1(\Omega)$, а $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ – замыкание множества $\dot{J}(\Omega)$ бесконечно дифференцируемых финитных в Ω соленоидальных векторов (см. [9_6]). Пространство

$L_2(\Omega)$ может быть представлено также в виде

$$L_2(\Omega) = J(\Omega) \oplus \overset{\circ}{G}(\Omega),$$

где $\overset{\circ}{G}(\Omega)$ - подпространство векторов вида $u = grad\,\psi$, $\psi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, а $J(\Omega)$ - пространство, в котором плотным множеством является множество всех непрерывно дифференцируемых соленоидальных векторов и даже множество непрерывно дифференцируемых соленоидальных векторов, удовлетворяющих краевому условию

$$u_\tau\big|_S = 0. \qquad (7.3)$$

Оба из приведенных разложений $L_2(\Omega)$ являются ортогональными. Границу области мы предполагаем, как минимум, дважды непрерывно дифференцируемой, хотя указанные разложения имеют место и для более широкого класса областей Ω. Построение ортогональных проекций любого вектора $u \in L_2(\Omega)$ на подпространства $\overset{\circ}{J}(\Omega)$, $J(\Omega)$, $\overset{\circ}{G}(\Omega)$, $G(\Omega)$ сводится к решению задач Дирихле и Неймана для оператора Лапласа. Из результатов, относящихся к дифференциальным свойствам решений этих задач, следует, что при $S \in C^{\ell+1}$ проекции любого вектора $u \in W_2^\ell(\Omega)$ на все эти подпространства также принадлежат $W_2^\ell(\Omega)$ и их нормы оцениваются через $c\,\|u\|_\Omega^{(\ell)}$.

Введем следующие подпространства пространств $W_2^\ell(\Omega)$, $\ell \geqslant 1$: $J^\ell(\Omega) = W_2^\ell(\Omega) \cap J(\Omega)$ - множество всех соленоидальных векторов из $W_2^\ell(\Omega)$,

$\overset{\circ}{J}{}_\tau^\ell(\Omega)$, $\overset{\circ}{J}{}_n^\ell(\Omega)$, $\overset{\circ}{J}{}_{n,\tau}^\ell(\Omega)$ - подпространства векторов из $J^\ell(\Omega)$, удовлетворяющих на S соответственно условиям (7.3),

$$u_n\big|_S = 0 \qquad (7.4)$$

или обоим этим условиям. В силу вышесказанного множество $\overset{\circ}{J}{}_{n,\tau}^\ell(\Omega)$, $\ell \geqslant 1$, плотно в $\overset{\circ}{J}(\Omega)$, а $\overset{\circ}{J}{}_\tau^\ell(\Omega)$, $\ell \geqslant 1$ - в $J(\Omega)$. Условимся под $\overset{\circ}{J}{}_n^\circ(\Omega)$ и $\overset{\circ}{J}{}_{n,\tau}^\circ(\Omega)$ понимать $\overset{\circ}{J}(\Omega)$, а под $\overset{\circ}{J}{}_\tau^\circ(\Omega)$ пространство $J(\Omega)$.

<u>Теорема 7.1</u>. Если $S \in C^{\ell+1}$, $\ell \geqslant 1$, то оператор rot устанавливает взаимно однозначное соответствие между пространствами $\overset{\circ}{J}{}_\tau^\ell(\Omega)$ и $\overset{\circ}{J}{}_n^{\ell-1}(\Omega)$, а также между $\overset{\circ}{J}{}_n^\ell(\Omega)$ и $J^{\ell-1}(\Omega)$, причем для всех $u \in \overset{\circ}{J}{}_n^\ell(\Omega)$ и $u \in \overset{\circ}{J}{}_\tau^\ell(\Omega)$ справедливы оценки

$$c_1 \|rot\, u\|_\Omega^{(\ell-1)} \leqslant \|u\|_\Omega^{(\ell)} \leqslant c_2 \|rot\, u\|_\Omega^{(\ell-1)} \qquad (7.5)$$

с не зависящими от $u(x)$ постоянными c_1, c_2.

Для $\ell = 1$ это утверждение доказано в [13,14]; для $\ell > 1$ оно устанавливается аналогично, поскольку решение уравнения $rot\, u = f$ в указанных пространствах, как показано в [13,14], выражается че-

634 6

рез электростатические потенциалы и решения задачи Дирихле и Неймана для оператора Лапласа.

Пусть $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$, где Ω_1 и Ω_2 – области, определенные выше при подстановке задачи II. Введем гильбертовы пространства $\mathcal{H}^\ell(\Omega)$, $\ell\geq 1$, элементами которых являются все вектора $H(x)$, в каждой из областей Ω_k, $k=1,2$, принадлежащие $J^\ell(\Omega_k)$ и, кроме того, удовлетворяющие в Ω_2 уравнениям (6.6), на S_1 -условиям сопряжения (6.10) и на S_2 – условию (6.8). Скалярное произведение в $\mathcal{H}^\ell(\Omega)$ определим равенством

$$(H,h)_{\mathcal{H}^\ell(\Omega)}=(H,h)^{(\ell)}_{\Omega_1}+(H,h)^{(\ell)}_{\Omega_2}.$$

В Ω_2 всякий вектор $H\in\mathcal{H}^\ell(\Omega)$ в силу (6.6) представим в виде $H(x)=\operatorname{grad}\varphi$, где φ – решение задачи

$$\Delta\varphi=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{S_1}=\frac{\mu_1}{\mu_2}H^{(1)}_n\Big|_{S_1},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{S}=0,\quad \int_{\Omega_2}\varphi\,dx=0 \tag{7.6}$$

(здесь n – внешняя относительно области Ω_1 нормаль к S_1). Необходимое условие разрешимости этой задачи $\int_{S_1}H^{(1)}_n\,dS=0$ выполнено, так как $\int_{S_1}H^{(1)}_n\,dS=\int_{\Omega_1}\operatorname{div}H\,dx=0$. Известно, что при S_1, $S_2\in C^{\ell+1}$, $\ell>0$ задача (7.6) однозначно разрешима в $W_2^{\ell+1}(\Omega_2)$ и

$$\|H\|^{(\ell)}_{\Omega_2}\leq\|\varphi\|^{(\ell+1)}_{\Omega_2}\leq c\|H\|^{(\ell)}_{\Omega_1}. \tag{7.7}$$

Таким образом, вектор $H\in\mathcal{H}^\ell(\Omega)$ целиком определяется своим значением в области Ω_1. Пространство сужений векторов $H\in\mathcal{H}^\ell(\Omega)$ на область Ω_1 обозначим через $\mathcal{H}^\ell(\Omega_1)$. Оно может быть также определено как пространство всех векторов из $J^\ell(\Omega_1)$, удовлетворяющих нелокальному краевому условию

$$H^{(1)}_\tau\Big|_{S_1}=\operatorname{grad}_\tau\varphi\Big|_{S_1}, \tag{7.8}$$

где φ – решение задачи (7.6). Это условие удобно записать в виде

$$H^{(1)}\Big|_{S_1}=BH^{(1)}_n\Big|_{S_1}, \tag{7.8 }$$

где B – линейный оператор, такой, что $(BH^{(1)}_n|_{S_1})_n|_{S_1}=H^{(1)}_n|_{S_1}$. Оператор B ограничен в пространстве $W_2^{\ell-1/2}(S_1)$ ($W_2^{\ell-1/2}(S_1)$ – пространство следов на S_1 функций из $W_2^\ell(\Omega_1)$, определение см. в [15,16]) и который легко выразить через функцию Грина для задачи (7.6). В качестве $H^{(1)}_n|_{S_1}$ может быть взята любая функция из $W_2^{\ell-1/2}(S_1)$, удовлетворяющая условию $\int_{S_1}H^{(1)}_n\,dS=0$. Равенство (7.8) накладывает ограничения лишь на касательные составляющие вектора $H^{(1)}$. Можно показать (ниже это будет сделано для $\ell=1$

и $l_1 = 1$), что замыкание $\mathcal{H}^l(\Omega_1)$ в норме $W_2^{l_1}(\Omega_1)$, $l_1 < l$, дает $\mathcal{H}^{l_1}(\Omega_1)$. Обозначим через $\mathcal{H}^\circ(\Omega)$ замыкание $\mathcal{H}^1(\Omega)$ в норме $L_2(\Omega)$, а через $\mathcal{H}^\circ(\Omega_1)$ – пространство сужений элементов из $\mathcal{H}^\circ(\Omega)$ на Ω_1.

Пространство $\mathcal{H}^\circ(\Omega)$ характеризуется следующим образом.

Теорема 7.2. $\mathcal{H}^\circ(\Omega_1) = \mathfrak{J}(\Omega_1)$; $\mathcal{H}^\circ(\Omega)$ совпадает с множеством векторов вида

$$H(x) = \begin{cases} H^{(1)}(x) \in \mathfrak{J}(\Omega_1), & x \in \Omega_1, \\ \operatorname{grad} \varphi(x), & x \in \Omega_2, \end{cases} \tag{7.9}$$

где φ – обобщенное решение задачи (7.6) из $W_2^1(\Omega_2)$, удовлетворяющее интегральному тождеству

$$\mu_1 \int_{\Omega_2} \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \eta \, dx = -\mu_2 \int_{\Omega_1} H^{(1)} \operatorname{grad} \eta \, dx, \tag{7.10}$$

при всех $\eta \in W_2^1(\Omega)$. Это решение φ подчиняется неравенству

$$\| \operatorname{grad} \varphi \|_{\Omega_2} \leq c \, \| H^{(1)} \|_{\Omega_1}. \tag{7.11}$$

Наконец, если $H \in \mathcal{H}^\circ(\Omega)$, то $\mu H \in \mathring{\mathfrak{J}}(\Omega)$, причем

$$\mu(x) = \begin{cases} \mu_1, & x \in \Omega_1, \\ \mu_2, & x \in \Omega_2. \end{cases}$$

Доказательство. Совпадение $\mathcal{H}^\circ(\Omega_1)$ с $\mathfrak{J}(\Omega_1)$ будет доказано, если мы аппроксимируем в норме $L_2(\Omega_1)$ всякий вектор $H \in \mathfrak{J}^1(\Omega_1)$ векторами $H^m \in \mathcal{H}^1(\Omega_1)$. Для этого построим вектор $H' \in \mathfrak{J}^1(\Omega_1)$, принимающий на S_1 значение

$$H'|_{S_1} = B(H_n|_{S_1}).$$

Так как $\int_{S_1} H'_n dS = \int_{S_1} H_n dS = 0$, то это можно сделать (явная конструкция дана, например, в [9б]). Такой вектор $H' \in \mathcal{H}^1(\Omega_1)$ (ибо $H'_n|_{S_1} = H_n|_{S_1}$ и $H'|_{S_1} = B(H'_n|_{S_1})$). Вектор $\tilde{H} = H - H' \in \mathring{\mathfrak{J}}^1(\Omega_1)$, имеет нулевую нормальную компоненту на S_1, т.е принадлежит $\mathring{\mathfrak{J}}(\Omega_1)$, и его можно аппроксимировать в норме $L_2(\Omega_1)$ бесконечно дифференцируемыми финитными в Ω_1, соленоидальными векторами $\tilde{H}^m \in \mathcal{H}^1(\Omega_1)$. Следовательно, $H^m = \tilde{H}^m + H' \xrightarrow{L_2(\Omega_1)} H$, $H^m \in \mathcal{H}^1(\Omega_1)$, что и требовалось.

Чтобы охарактеризовать вектора $u \in \mathcal{H}^\circ(\Omega)$, заметим, что решение задачи (7.6) при $H^{(1)} \in \mathfrak{J}^1(\Omega_1)$ удовлетворяет интегральному тождеству (7.10). Действительно, при любом $\eta \in W_2^1(\Omega)$ имеем

$$0=-\int_{\Omega_2}\Delta\varphi\cdot\eta\,dx=\int_{\Omega_2}\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\eta\,dx+\int_{S_1}\frac{\mu_2}{\mu_1}H_n^{(1)}\eta\,dS=$$

$$=\int_{\Omega_2}\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\eta\,dx+\frac{\mu_2}{\mu_1}\int_{\Omega_1}H^{(1)}\cdot\operatorname{grad}\eta\cdot dx.$$

Взяв в (7.10) в качестве η функцию, которая в Ω_2 совпадает с φ, а в Ω_1 такова, что

$$\|\eta\|^{(1)}_{\Omega_1}\leqslant c_1\|\eta\|^{(1)}_{\Omega_2}=c_1\|\varphi\|^{(1)}_{\Omega_2}\leqslant c_2\|\operatorname{grad}\varphi\|_{\Omega_2}$$

(последняя оценка вытекает из неравенства Пуанкаре), получаем неравенство (7.11) с $C=C_2\mu_2/\mu_1$. Пусть теперь $H\in\mathcal{H}^{0}(\Omega)$, $H^m\in\mathcal{H}^{1}(\Omega)$ и $H^m\xrightarrow{L_2(\Omega)}H$. Из доказанной оценки (7.11) следует, что $H^m=\operatorname{grad}\varphi^m\xrightarrow{L_2(\Omega)}\operatorname{grad}\varphi$, и φ удовлетворяет тождеству (7.10) и неравенству (7.11). Таким образом, каждый элемент $\mathcal{H}^{0}(\Omega)$ выражается формулой (7.9). Очевидно также, что всякий вектор (7.9) принадлежит $\mathcal{H}^{0}(\Omega)$. Наконец, из тождества (7.10) следует, что вектор μH, $H\in\mathcal{H}^{0}(\Omega)$ ортогонален в $L_2(\Omega)$ любому $\operatorname{grad}\eta$, $\eta\in W_2^1(\Omega)$, что и завершает доказательство теоремы

Теорема 7.3. Пусть $S_1, S_2\subset C^{\ell+1}$. Тогда для любого $H\in\mathcal{H}^{\ell}(\Omega)$, $\ell\geqslant 1$ справедливы оценки

$$c_1\|\operatorname{rot}H\|^{(\ell-1)}_{\Omega_1}\leqslant\|H\|^{(\ell)}_{\Omega_1}+\|H\|^{(\ell)}_{\Omega_2}\leqslant c_2\|\operatorname{rot}H\|^{(\ell-1)}_{\Omega_1}. \tag{7.12}$$

Оператор rot устанавливает взаимно однозначное соответствие между $\mathcal{H}^{\ell}(\Omega)$ и пространством векторов, которые в Ω_1 принадлежит $\mathring{J}_n^{\ell-1}(\Omega_1)$, а в Ω_2 равны нулю.

Доказательство. Покажем, что уравнение

$$\operatorname{rot}H=j^*=\begin{cases} j\in\mathring{J}_n^{\ell-1}(\Omega_1),\\ 0,\quad x\in\Omega_2\end{cases} \tag{7.13}$$

однозначно разрешимо в $\mathcal{H}^{\ell}(\Omega)$ и что

$$\|H\|^{(\ell)}_{\Omega_1}+\|H\|^{(\ell)}_{\Omega_2}\leqslant c_2\|j\|^{(\ell-1)}_{\Omega_1} \tag{7.14}$$

(остальные утверждения теоремы легко выводятся из определения $\mathcal{H}^{\ell}(\Omega)$). Пусть $h\in\mathring{J}_\tau^{\ell}(\Omega_1)$ - вектор, удовлетворяющий в Ω_1 уравнению $\operatorname{rot}h=j$ (см. теорему 7.1) и $H'=\begin{cases}h(x), & x\in\Omega_1\\ 0, & x\in\Omega_2\end{cases}$. Решение уравнения (7.13) можно искать в виде $H=H'+\operatorname{grad}\varphi$, где φ определяется из задачи

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\varphi=0 \quad \text{для} \quad x\in\Omega_1,\ x\in\Omega_2 \\ &[\varphi]\Big|_{S_1}=0,\ \Big[\mu\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big]\Big|_{S_1}=-\mu_1 h_n\Big|_{S_1},\ \ \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{S_2}=0, \end{aligned}\right\} \tag{7.15}$$

в которой $[\psi]\big|_{S_1}=(\psi^{(1)}-\psi^{(2)})\big|_{S_1}$.

Решение задачи (7.15), в свою очередь, ищем в виде суммы

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2,$$

где φ_1 – какая-либо функция, удовлетворяющая следующим условиям: $\varphi_1=0$ в Ω_2, $[\varphi_1]\big|_{S_1}=\varphi_1^{(1)}\big|_{S_1}=0$, $\Big[\mu\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\Big]\Big|_{S_1}=\mu_1\frac{\partial\varphi_1^{(1)}}{\partial n}\Big|_{S_1}=-\mu h_n\big|_{S_1}$, $\varphi_1\in W_2^{l+1}(\Omega_1)$ и неравенству

$$\|\varphi_1\|_{\Omega_1}^{(l+1)}\leq c\|h\|_{\Omega_1}^{(l)}\leq c_1\|j\|_{\Omega_1}^{(l-1)}.$$

Тогда φ_2 есть решение задачи

$$\Delta\varphi_2=\begin{cases}-\Delta\varphi_1, & x\in\Omega_1\\ 0, & x\in\Omega_2,\end{cases}$$

$$[\varphi_2]\Big|_{S_1}=0,\quad \Big[\mu\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\Big]\Big|_{S_1}=0,\quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\Big|_{S_2}=0.$$

Эта задача исследована в § 2 работы [8] для случая $l=1$: доказана ее разрешимость и оценка

$$\|\varphi_2\|_{\Omega_1}^{(l+1)}+\|\varphi_2\|_{\Omega_2}^{(l+1)}\leq c\|\Delta\varphi_1\|_{\Omega_1}^{(l-1)}\leq c_1\|j\|_{\Omega_1}^{(l-1)}$$

при $l=1$. Рассуждая аналогичным образом, можно доказать все это и при $l>1$. Отсюда и из уже установленных оценок норм φ_1 и h (см.(7.5)) для функции φ получается оценка $\|\varphi\|_{\Omega_1}^{(l+1)}\leq c\|j\|_{\Omega_1}^{(l-1)}$, а из нее вытекает (7.14). Теорема доказана.

Определим оператор $\mathfrak{T}: \mathcal{H}^l(\Omega_1)\to\mathring{J}_\tau^l(\Omega_1)$, $l\geq1$, сопоставляющий вектору $H\in\mathcal{H}^l(\Omega_1)$ решение u задачи: $\operatorname{rot}u=\operatorname{rot}H$, $\operatorname{div}u=0$, $u_\tau\big|_{S_1}=0$. Из теорем 7.1 и 7.3 следует, что при $S_1\subset C^{l+1}$ этот оператор устанавливает взаимно однозначное соответствие между указанными пространствами, ограничен и имеет ограниченный обратный $\mathfrak{T}^{-1}$. Согласно теоремам 7.2 и 7.1 всякий вектор $H\in\mathcal{H}^1(\Omega)$ может быть представлен в виде

$$\mu H=\operatorname{rot}\omega,\quad \omega\in\mathring{J}_\tau^1(\Omega).$$

Поэтому для любых $h, H\in\mathcal{H}^1(\Omega)$ справедливы равенства

$$(H, \mathfrak{T}h)_{\Omega_1} = \frac{1}{\mu_1}(\operatorname{rot}\omega, \mathfrak{T}h)_{\Omega_1} = \frac{1}{\mu_1}(\omega, \operatorname{rot}\mathfrak{T}h)_{\Omega_1} =$$

$$= \frac{1}{\mu_1}(\omega, \operatorname{rot}h)_{\Omega_1} = \frac{1}{\mu_1}(\omega, \operatorname{rot}h)'_{\Omega} = \frac{1}{\mu_1}(\operatorname{rot}\omega, h)_{\Omega} = \frac{1}{\mu_1}(\mu H, h)_{\Omega}.$$

При этом мы использовали свойства оператора $\mathfrak{T}$, свойства векторов пространств $\mathcal{H}^1(\Omega)$ и $\overset{\circ}{\mathfrak{J}}{}^1_\tau(\Omega)$ и формулу "переброски rot " с одного множителя на другой для областей Ω_1 и Ω, причем в обоих случаях граничные интегралы анулировались. Итак, для $\forall h$ $H \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ справедливы соотношения

$$(H, \mathfrak{T}h)_{\Omega_1} = \frac{1}{\mu_1}(\mu H, h)_{\Omega} = \frac{1}{\mu_1}(\mu h, H) = (\mathfrak{T}H, h)_{\Omega_1}. \tag{7.16}$$

Из них следует, что $\mathfrak{T}$ можно расширить по непрерывности до положительного самосопряженного оператора, действующего в $\mathfrak{J}(\Omega_1)$ и ограниченного вместе со своим обратным. Билинейная форма

$$[H, h] = (H, \mathfrak{T}h)_{\Omega_1} \tag{7.17}$$

может быть принята за новое скалярное произведение в $\mathfrak{J}(\Omega_1)$, порождающее норму, эквивалянтную норме $L_2(\Omega)$.

Рассмотрим некоторые вспомогательные краевые задачи на нахождение векторов, удовлетворяющих уравнениям

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}h = g, \quad \operatorname{div}h = 0, \tag{7.18}$$

и различным краевым условиям. Пусть сначала $g \in \overset{\circ}{\mathfrak{J}}(\Omega)$, а вектор h разыскивается в подпространстве $\mathfrak{f}(\Omega)$ векторов из $\mathfrak{J}^2(\Omega)$, удовлетворяющих краевым условиям

$$h_n|_S = 0, \quad \operatorname{rot}_\tau h|_S = 0. \tag{7.19}$$

Задача (7.18), (7.19) сводится к двум задачам на восстановление вектора по его ротору:

$$\operatorname{rot}\xi = g, \ \operatorname{div}\xi = 0, \ \xi_\tau|_S = 0;$$
$$\operatorname{rot}h = \xi, \ \operatorname{div}h = 0, \ h_n|_S = 0.$$

В силу теоремы 7.1 обе задача однозначно разрешимы и при $S \subset C^2$

$$\|g\|_\Omega = \|\operatorname{rot}\xi\|_\Omega = \|\operatorname{rot}\operatorname{rot}h\|_\Omega \leq c\|h\|^{(2)}_\Omega \leq c_1\|\xi\|^{(1)}_\Omega \leq c_2\|g\|_\Omega. \tag{7.20}$$

Таким образом, оператор $\mathcal{L}_1 = \operatorname{rot}\operatorname{rot}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между $\mathfrak{f}(\Omega)$ и $\overset{\circ}{\mathfrak{J}}(\Omega)$. Он симметричен на $\mathfrak{f}(\Omega)$, так как для любых $h, h' \in \mathfrak{f}(\Omega)$ интегрирование по частям дает:

$$(\operatorname{rot}\operatorname{rot}h, h') = (\operatorname{rot}h, \operatorname{rot}h') = (h, \operatorname{rot}\operatorname{rot}h'). \tag{7.21}$$

Отсюда и из (7.20) вытекает его самосопряженность и положительная определенность.

Из (7.21) следует также, что областью определения оператора $\mathcal{L}_1^{1/2}=(\mathrm{rot}\,\mathrm{rot})^{1/2}=\mathrm{rot}$ на $\overset{\circ}{\mathfrak{J}}(\Omega)$ является замыкание $\overset{\circ}{\mathfrak{J}}(\Omega)$ в метрике $\|\mathrm{rot}\,h\|$, которая в силу теоремы 7.1 эквивалентна метрике $W_2^1(\Omega)$. Это замыкание, очевидно, принадлежит $\overset{\circ}{\mathfrak{J}}{}_n^1(\Omega)$; покажем, что оно совпадает с $\overset{\circ}{\mathfrak{J}}{}_n^1(\Omega)$. Пусть $h\in\overset{\circ}{\mathfrak{J}}{}_n^1(\Omega)$, тогда $\mathrm{rot}\,h=\xi\in\mathfrak{J}(\Omega)$.

Как показано в [13], всякий вектор $\xi\in\mathfrak{J}(\Omega)$ можно аппроксимировать векторами $\xi^m\in\overset{\circ}{\mathfrak{J}}{}_\tau^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. Пусть h^m – решение задачи $\mathrm{rot}\,h^m=\xi^m$, $\mathrm{div}\,h^m=0$, $h_n^m|_S=0$. Очевидно, что $h^m\in\overset{\circ}{\mathfrak{J}}(\Omega)$. Так как $\xi^m\to\xi$ в $L_2(\Omega)$, то $h^m\to h$ в $W_2^1(\Omega)$, что и требовалось.

В связи с задачей II необходимо проанализировать оператор $\mathcal{L}_2=\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}$ с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{L}_2)=\mathcal{H}^2(\Omega_1)$, плотной в гильбертовом пространстве $\mathfrak{J}(\Omega_1)$. Из теорем 7.1 и 7.3 следует, что $\mathcal{L}_2$ при $S\subset C^3$, устанавливает взаимно однозначное соответствие между $\mathcal{D}(\mathcal{L}_2)$ и $\mathfrak{J}(\Omega_1)$. Действительно, в силу теоремы 7.3 rot дает взаимно однозначное отображение $\mathcal{H}^2(\Omega_1)$ на $\overset{\circ}{\mathfrak{J}}{}_n^1(\Omega_1)$, а в силу теоремы 7.1 rot дает взаимно однозначное отображение $\overset{\circ}{\mathfrak{J}}{}_n^1(\Omega_1)$ на $\mathfrak{J}(\Omega_1)$. Таким образом, задача

$$\mathcal{L}_2 h=\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,h=g,\quad h\in\mathcal{H}^2(\Omega_1), \tag{7.22}$$

или, что то же, задача

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,h=g,\quad \mathrm{div}\,h=0,\quad h|_{S_1}=B\,h_n|_{S_1}, \tag{7.22'}$$

с нелокальным краевым условием (7.8'), эквивалентна двум задачам

$$\mathrm{rot}\,\xi=g,\quad \mathrm{div}\,\xi=0,\quad \xi_n|_{S_1}=0, \tag{7.23}$$

и

$$\mathrm{rot}\,h=\xi,\quad \mathrm{div}\,h=0,\quad h|_{S_1}=B\,h_n|_{S_1}, \tag{7.24}$$

первая из которых однозначно разрешима в $\overset{\circ}{\mathfrak{J}}{}_n^1(\Omega_1)$ при $\forall g\in\mathfrak{J}(\Omega_1)$, а вторая – однозначно разрешима в $\mathcal{H}^2(\Omega_1)$ при $\forall\xi\in\overset{\circ}{\mathfrak{J}}{}_n^1(\Omega_1)$. Следовательно задача (7.22) однозначно разрешима при $\forall g\in\mathfrak{J}(\Omega)$, причем для $\forall h\in\mathcal{H}^2(\Omega_1)$ в силу (7.5) и (7.12)

$$c_1\|\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,h\|_{\Omega_1}\leqslant\|h\|_{\Omega_1}^{(2)}\leqslant c_2\|\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,h\|_{\Omega_1}, \tag{7.25}$$

где c_1 и c_2 – положительнае постоянные. Соответствующий ей оператор $\mathcal{L}_2$ положительно определен, но не симметричен по отношению к скалярному произведению $(\ ,\ )$ пространства $\mathfrak{J}(\Omega_1)$. Однако, он симметричен по отношению к скалярному произведению $[\ ,\ ]$, определенному в (7.17). Действительно, для всех $h,h'\in\mathcal{H}^2(\Omega_1)$

$$[\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,h,h']=(\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,h,\mathcal{T}h')_{\Omega_1}=(\mathrm{rot}\,h,\mathrm{rot}\,\mathcal{T}h')_{\Omega_1}=(\mathrm{rot}\,h,\mathrm{rot}\,h')_{\Omega_1}= \tag{7.26}$$
$$=[h,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,h'].$$

При этом мы использовали то, что $\operatorname{rot}\mathcal{T}h'=\operatorname{rot}h'$ и $(\mathcal{T}h')_\tau|_{S_1}=0$. Благодаря последнему граничный интеграл, возникающий при интегрировании по частям, обратился в нуль. Такая симметричность $\mathcal{L}_2$ и существование ограниченного обратного оператора $\mathcal{L}_2^{-1}$ гарантируют самосопряженность $\mathcal{L}_2$ в пространстве $\mathcal{J}(\Omega_1)$ со скалярным произведением $[\,,\,]$.

Так же, как выше, доказывается, что областью определения оператора $\mathcal{L}_2^{1/2}$ является $\mathcal{H}^1(\Omega_1)$. Действительно, в силу (7.26)

$$[\mathcal{L}_2 h, h]=[\mathcal{L}_2^{1/2}h,\mathcal{L}_2^{1/2}h]=(\operatorname{rot}h,\operatorname{rot}h)_{\Omega_1},$$

а норма $\|\operatorname{rot}h\|_{\Omega_1}$ эквивалентна норме $W_2^1(\Omega_1)$ на $\mathcal{H}^2(\Omega_1)$ (см.(7.12)). Осталось показать, что замыкание $\mathcal{H}^2(\Omega_1)$ в норме $W_2^1(\Omega_1)$ дает все $\mathcal{H}^1(\Omega_1)$. Пусть H_0 – произвольный элемент $\mathcal{H}^1(\Omega)$. Тогда $j=\operatorname{rot}H$ принадлежит $\mathcal{J}_n(\Omega_1)$ в Ω_1 и $j=0$ в Ω_2 (теорема 7.3). Такое j можно аппроксимировать в норме $L_2(\Omega)$ векторами j^m, принадлежащими $\overset{\circ}{\mathcal{J}}{}^1_n(\Omega$ в $L_2(\Omega)$ и равными нулю в Ω_2. По теореме 7.3 j^m однозначно определяет $H^m\in\mathcal{H}^2(\Omega)$, для которых $\operatorname{rot}H^m=$ $=j^m$. В силу (7.12) $H^m\to H$ в норме $W_2^1(\Omega_1)$, ч. и т.д. Для обоих из рассмотренных нами операторов $\mathcal{L}_i$ им обратные являются вполне непрерывными (что следует из компактности вложения $W_2^\ell(\Omega)$, $\ell\geqslant1$, в $L_2(\Omega)$). Это и отмеченные выше их свойства самосопряженности, положительной определенности, а также коэрцитивные оценки (7.25), гарантируют то, что спектры $\mathcal{L}_i$ дискретны и положительны, а системы $\{\varphi^{k,i}(x)\}, k=1,2,\dots,i=1,2$ собственных элементов образуют базисы в $\overset{\circ}{\mathcal{J}}(\Omega)$, $\overset{\circ}{\mathcal{J}}{}^1_n(\Omega)$ и $\mathfrak{f}(\Omega)$ для $\mathcal{L}_1$ и в $\mathcal{J}(\Omega_1)$, $\mathcal{H}^1(\Omega_1)$ и $\mathcal{H}^2(\Omega_1)$ для $\mathcal{L}_2$.

В заключении данного параграфа введем некоторые пространства трехмерных векторов $u=(u_1,u_2,u_3)$, зависящих помимо $x\in\Omega\subset R^3$ от параметра $t\in[0,T]$. Они определены в $Q_T=\Omega\times[0,T]$. Пространство квадратично интегрируемых по Q_T векторов будем, как принято, обозначать через $L_2(Q_T)$; скалярное произведение и норма в нем определяются равенствами:

$$(u,v)_{Q_T}=\int_0^T(u,v)_\Omega dt;\quad \|u\|_{Q_T}=\Big(\int_0^T\|u\|_\Omega^2dt\Big)^{1/2}.$$

Ортогональные разложения пространства $L_2(\Omega)$, приведенные выше, индуцируют разложения $L_2(Q_T)$:

$$L_2(Q_T)=G(Q_T)\oplus\overset{\circ}{\mathcal{J}}(Q_T)=\overset{\circ}{G}(Q_T)\oplus\mathcal{J}(Q_T),$$

где $G(Q_T)$, $\overset{\circ}{\mathcal{J}}(Q_T)$, $\overset{\circ}{G}(Q_T)$, $\mathcal{J}(Q_T)$ – подпространства $L_2(Q_T)$, состоящие из векторов, принадлежащих $G(\Omega)$, $\overset{\circ}{\mathcal{J}}(\Omega)$, $\overset{\circ}{G}(\Omega)$, $\mathcal{J}(\Omega)$ при почти всех $t\in[0,T]$ соответственно. Пространство векторов u из $L_2(Q_T)$, имеющих обобщенные производные u_{x_i}, $u_{x_ix_j}$, u_t из $L_2(Q_t)$, обозначим через $W_2^{2,1}(Q_T)$. Скалярное произведение в нем определяется равенством

$$(u,v)_{W_2^{2,1}(Q_T)} = \int_0^T\int_\Omega (u_t v_t + \sum_{|\alpha|\le 2} D_x^\alpha u \cdot D_x^\alpha v)\,dx\,dt.$$

Если граница $S \in C^2$, то элементы $u(x,t) \in W_2^{2,1}(Q_T)$ при каждом t принадлежат $W_2^1(\Omega)$ и непрерывно зависят от t в норме $W_2^1(\Omega)$, а $\int_\Omega u_{x_i}^2(x,t)\,dx$ суть абсолютно непрерывные функции $t\in[0,T]$, так что $\frac{d}{dt}\int_\Omega u_{x_i}^2(x,t)\,dx \in L_1(0,T)$.

§ 8. Переформулировка задач I и II

Сведем задачи I и II к задаче Коши (2.I) в некотором гильбертовом пространстве. Рассмотрим сначала задачу I и, прежде всего, сведем краевые условия (6.4), (6.I4) к однородным. Предположим, что существуют вектора $v', H' \in W_2^{2,1}(Q_T) \cap \overset{\circ}{J}(Q_T)$ удовлетворяющие краевым условиям (6.4), (6.8), (6.I4). Тогда $w = v - v'$, $h = H - H'$ будут удовлетворять системе

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial w}{\partial t} - \nu\Delta w + \sum_{k=1}^3 [v'_k w_{x_k} + w_k v'_{x_k} - \mu(H'_k h_{x_k} + h_k H'_{x_k})] + \\
&+ \sum_{k=1}^3 (w_k w_{x_k} - \mu h_k h_{x_k}) + \operatorname{grad}[p + \tfrac{\mu}{2}(h+H')^2] = f', \\
&\operatorname{div} w = 0, \\
&\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{\sigma\mu}\operatorname{rot}\operatorname{rot} h - \operatorname{rot}([v'\times h] + [w\times H']) - \operatorname{rot}[w\times h] = g', \\
&\operatorname{div} h = 0,
\end{aligned} \tag{8.I}$$

в которой $f' = f - v'_t + \nu\Delta v' - \sum_{k=1}^3 (v'_k v'_{x_k} - \mu H'_k H'_{x_k})$, $g' = \frac{1}{\sigma\mu}\operatorname{rot} j - H'_t - \frac{1}{\sigma\mu}\operatorname{rot}\operatorname{rot} H' + \operatorname{rot}[v'\times H']$. Так как $[v'\times H']_\tau|_S = 0$, $(\operatorname{rot} H' - j)_\tau|_S = 0$, то $g' \in \overset{\circ}{J}(Q_T)$. Вектора w, h удовлетворяют еще начальным условиям

$$w|_{t=0} = v_0(x) - v'(x,0) \equiv w_0(x);\quad h|_{t=0} = H_0(x) - H'(x,0) \equiv h_0(x) \tag{8.2}$$

и однородным краевым условиям

$$w|_S = 0,\quad h_n|_S = 0,\quad \operatorname{rot}_\tau h|_S = 0. \tag{8.3}$$

Чтобы исключить p, спроектируем первое из уравнений (8.I) на $\overset{\circ}{J}(\Omega)$; соответствующий ортогональный проектор обозначим через P. После этого задачу (8.I)-(8.3) можно записать как задачу Коши (2.I) для вектора $u = \{w, h\}$ с шестью компонентами, если положить $u_0 = \{w_0, h_0\}$, $f(t) = \{f', g'\}$ и определить операторы A_0, $A_1(t)$, K по формулам

$$A_0 u = \{-\nu P\Delta w, \tfrac{1}{\sigma\mu}\operatorname{rot}\operatorname{rot} h\}, \tag{8.4}$$

$$A_1(t)u=\Big\{P\sum_{k=1}^{3}(v_k' w_{x_k}+w_k v'_{x_k}-\mu H_k' h_{x_k}-\mu h_k H'_{x_k}),$$

$$-\operatorname{rot}([v'\times h]+[w\times H'])\Big\}, \qquad (8.5)$$

$$Ku=\Big\{P\sum_{k=1}^{3}(w_k w_{x_k}-\mu h_k h_{x_k}),\ -\operatorname{rot}[w\times h]\Big\}. \qquad (8.6)$$

Уравнения $\operatorname{div} w=0$, $\operatorname{div} h=0$ учитываются выбором основного пространства $H=\overset{\circ}{\mathfrak{J}}(\Omega)\times\overset{\circ}{\mathfrak{J}}(\Omega)$. Скалярное произведение в нем задается стандартной формулой

$$(u,u')=(w,w')_\Omega+(h,h')_\Omega .$$

Областью определения операторов A_0, A_1 и K является пространство $H_2=\overset{\circ}{\mathfrak{J}}{}^2_{n,\tau}(\Omega)\times\overset{\circ}{\mathfrak{J}}{}^2(\Omega)$ (определение его дано в § 7), а $\mathfrak{D}(A_0^{1/2})\equiv H_1=\overset{\circ}{\mathfrak{J}}{}^1_{n,\tau}(\Omega)\times\overset{\circ}{\mathfrak{J}}{}^1_n(\Omega)$. Нормы $|u|_2=|A_0u|$ и $|u|_1=|A_0^{1/2}u|$ эквивалентны соответственно нормам $W_2^2(\Omega)$ и $W_2^1(\Omega)$.

Покажем, что операторы $A_1(t)u$ и Ku удовлетворяют условиям 2) и 3) § 2. Квадрат нормы $A_1(t)u$ и Ku является суммой интегралов типа $\int_\Omega a^2 b^2_{x_k}dx$, которые с помощью теорем вложения С.Л.Соболева и сультипликативной оценки (см.[17],[18])

$$\operatorname*{vrai\,max}_{x\in\Omega}|u(x)|+\sum_{k=1}^{3}\|u_{x_k}\|_{L_3(\Omega)}\le c\left(\|u\|_\Omega^{(1)}\|u\|_\Omega^{(2)}\right)^{1/2}$$

оцениваются следующим образом:

$$\left(\int_\Omega a^2 b^2_{x_k}dx\right)^{1/2}\le \operatorname*{vrai\,max}_{x\in\Omega}|a|\cdot\|b\|_\Omega^{(1)}\le c\|b\|_\Omega^{(1)}\left(\|a\|_\Omega^{(1)}\|a\|_\Omega^{(2)}\right)^{1/2},$$

или

$$\left(\int_\Omega a^2 b^2_{x_k}dx\right)^{1/2}\le\|a\|_{L_6(\Omega)}\|b_{x_k}\|_{L_3(\Omega)}\le c\|a\|_\Omega^{(1)}\left(\|b\|_\Omega^{(1)}\|b\|_\Omega^{(2)}\right)^{1/2}.$$

Поэтому

$$\|A_1(t)u\|_{L_2(\Omega)}\le c_1\cdot\left(\|v'\|_\Omega^{(1)}+\|H'\|_\Omega^{(1)}\right)\left(\|w\|^{(1)}+\|h\|^{(1)}\right)^{1/2}\left(\|w\|^{(2)}+\|h\|^{(2)}\right)^{1/2},$$

что равносильно (2.3) с $\delta=1/2$ и

$$\mu(t)=Const\cdot\left(\|v'(x,t)\|_\Omega^{(1)}+\|H'(x,t)\|_\Omega^{(1)}\right)\in L_\infty[0,T].$$

Из этих же неравенств следует, что

$$\|Ku\|_{L_2(\Omega)} \leq c\left(\|w\|_\Omega^{(1)}+\|h\|_\Omega^{(1)}\right)^{3/2}\left(\|w\|_\Omega^{(2)}+\|h\|_\Omega^{(2)}\right)^{1/2},$$

$$\|Ku-Ku'\|_{L_2(\Omega)} \leq c\left(\|w\|_\Omega^{(1)}+\|w'\|_\Omega^{(1)}+\|h\|_\Omega^{(1)}+\|h'\|_\Omega^{(1)}\right)\times$$

$$\times\left(\|w-w'\|_\Omega^{(1)}+\|h-h'\|_\Omega^{(1)}\right)^{1/2}\left(\|w-w'\|_\Omega^{(2)}+\|h-h'\|_\Omega^{(2)}\right)^{1/2},$$

т.е. (2.4), (2.5) с $\varepsilon(\tau)=\varepsilon_1(\tau)=c_1\tau$, $\delta=\frac{1}{2}$, $\mu_1(\tau)=0$. Таким образом, условия 2), 3) § 2 для операторов (8.5) и (8.6), определенных на $H_2=\overset{\circ}{\mathfrak{J}}{}^2_{n,\tau}(\Omega)\times\mathfrak{f}(\Omega)$ проверены.

Аналогично проверяются условия (4.1)-(4.4) для оператора K. Именно

$$K(\tilde{u}+u)-K\tilde{u}=A_2(\tilde{u})u+Ku\equiv A_2(\tilde{u})u+B(\tilde{u},u),$$

где $A_2(\tilde{u})u$ и определяется формулой

$$A_2(\tilde{u})u=\left\{P\sum_{k=1}^{3}(\tilde{w}_k w_{x_k}+w_k\tilde{w}_{x_k}-\mu H_k\tilde{H}_{x_k}-\mu\tilde{h}_k h_{x_k}, \operatorname{rot}([\tilde{w}\times h]+[w\times\tilde{h}])\right\},$$

аналогичной (8.5). Поэтому оператор $A_2(\tilde{u})$ так же, как и $A_1(t)$, удовлетворяет при любых фиксированных $\tilde{w}$ и $\tilde{h}\in H_2$ условию (4.2), а оператор $B(\tilde{u},u)=Ku$ удовлетворяет условиям (4.3), (4.4).

Аналогичным образом переформулируется задача II. Она сводится к уравнению (2.I), в котором операторы A_0, $A_1(t)$, K определяются теми же формулами (8.4)-(8.6), но в других пространствах. Основным пространством является теперь $H=\overset{\circ}{\mathfrak{J}}(\Omega_1)\times\mathfrak{J}(\Omega_1)$, $\mathfrak{D}(A_0)=$ $=H_2=\overset{\circ}{\mathfrak{J}}{}^2_{n,\tau}(\Omega)\times\mathcal{H}^2(\Omega_1)$, $\mathfrak{D}(A_0^{1/2})=H_1=\overset{\circ}{\mathfrak{J}}{}^1_{n,\tau}(\Omega_1)\times\mathcal{H}^1(\Omega_1)$. Условия I)-3) § 2 и (4.I-4)проверяются так же, как и выше.

Следовательно, для задач I и II справедливы все результаты §§ 2-5.

Литература

1. G.Prodi, Teoremi di tipo locale per il Sistema di Navier-Stokes e stabilita della Soluzioni Stazionare, Rend. Sem.Matem.Padova, 1962, XXXII, 374-397.

2. В.И.Юдович: а) Об устойчивости стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости, ДАН СССР, 1965, т.161, № 5, 1037-1040.
   в) Об устойчивости вынужденных колебаний жидкости. ДАН СССР, 1970, т.195, № 2, 292-295.
   с) Об устойчивости автоколебаний жидкости. ДАН СССР, 1970, т.195, № 3, 574-576.
   Математические теории устойчивости течений жидкости. Докторская диссертация, Москва, Институт проблем механики АН СССР, 1972.

3. D.H.Sattinger, The mathematical problem of hydrodynamic Stability. J.Math. and Mech., 1970, v.19, № 9, 797-817.

4. Ю.Л.Далецкий и М.Г.Крейн, Устойчивость решений дифференциальных уравнений в бонаховом пространстве, Москва, "Наука", 1970.

5. Д.В.Аносов, Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны, Труды Матем.Ин-та им.В.А.Стеклова, 1967, т.ХС.

6. Э.А.Коддигтон и Н.Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, Москва, ИЛ, 1958.

7. А.М.Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения. Москва - Ленинград, Гостехиздат, 1950.

8. О.А.Ладыженская и В.А.Солонников, Математические вопросы гидродинамики и магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости, Труды Матем.Ин-та им.В.А.Стеклова, 1960, т. LIX ., 115-173.

9. О.А.Ладыженская: а) О решении нестационарных операторных уравнений различных типов, ДАН СССР, 1955, т.102, № 2, 207-210; Матем.сб.,1956, т.39 (81), 491-524
   в) Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, Москва, "Наука", 1970.

10. В.А.Солонников, Оценки решений нестационарной системы Навье-Стокса, данный сборник.

11. М.З.Соломяк, Применение теории полугрупп к исследованию дифференциальных уравнений в пространствах Банаха, ДАН СССР, 1958, т.122, № 5, 766-769.

12. Э.Хилле, Р.С.Филлипс, Функциональный анализ и полугруппы,

Москва, ИЛ, 1962.

13. Э.Б.Быховский, Решение смешанной задачи для системы уравнений Максвелла в случае идеально проводящей границы. Вестник ЛГУ, 1957, № 13, 50–56; Кандидатская диссертация, ЛГУ, 1958.

14. Э.Б.Быховский и Н.В.Смирнов, Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа. Труды Матем.Ин-та им.В.А.Стеклова, 1960, т. LIX, 6–36.

15. В.М.Бабич и Л.Н.Слободецкий, Об ограниченности интеграла Дирихле, ДАН СССР, 1956, т.106, 604–606.

16. Л.Н.Слободецкий, Обобщенные пространства С.Л.Соболева и их применение к граничным проблемам для дифференциальных уравнений в разных производных, Ученые записки Лен.пед.ин-та им.Герцена, 1958, т.197, 54–112.

17. С.Л.Соболева, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Ленинград, 1950.

18. О.А.Ладыженская и Н.Н.Уральцева, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, Москва, "Наука", 1973 (второе издание).

19. J.L.Lions, Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

20. П.Е.Соболевский: а) О применении дробных степеней самосопряженных операторов к исследованию некоторых нелинейных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве, ДАН СССР, 1960, т.130, № 2, 272–275;

в) Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве, Труды М Об-ва, 1961, т.10, 297–350.