



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

V. Smirnoff, О некоторых рядах полиномов,
Журн. Лен. физ.-мат. общ., 1927, том 1, вы-
пуск 2, 268–274

Использование Общероссийского математического портала
Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с
пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.171

18 марта 2025 г., 05:58:37



Sur quelques séries de polynomes.

V. Smirnoff.

1. Dans ses recherches sur les figures d'équilibre d'un liquide en rotation Liapounoff a rencontré le problème d'analyse suivant: P_0, P_1, P_2, \dots étant des polynomes en variables x_1, x_2, \dots, x_k , le degré de P_n ne dépassant pas n , trouver le domaine de convergence par rapport à x_s ($s=1, 2, \dots, k$) de la série

$$(1) \quad P_0 + P_1\alpha + P_2\alpha^2 + \dots,$$

si $|P_n| < L$ (L est une constante) quelque soit n et quelles que soient les valeurs réelles des x_s , appartenant à l'intervalle $(-1, +1)$, le paramètre α satisfaisant à la condition $|\alpha| < 1$. La solution de ce problème a été donnée par Liapounoff dans son mémoire „Sur les séries de polynomes (Bull. de l'Acad. des Sciences, Petrograd, 1915, p. 1857). Dans la note présente nous voulons faire voir que le résultat de Liapounoff pourrait être perfectionné et le problème généralisé. Nous donnons une détermination exacte du domaine de convergence de la série (1) par rapport à x_s dans le cas où l'inégalité $|P_n| < L$ a lieu quand les x_s appartiennent à quelques ensembles E_s de points. Nous démontrerons dans la suite le théorème suivant.

Soit P_n —les polynomes en variables x_1, x_2, \dots, x_k le degré de P_n ne dépassant pas n . Supposons que l'inégalité

$$(2) \quad |P_n| < L \quad (n=0, 1, 2, \dots; L\text{—une constante})$$

a lieu quand chaque x_s est situé sur un ensemble fermé et borné E_s ($s=1, 2, \dots, k$), et que les ensembles E'_s complémentaires à E_s , qui contiennent le point à l'infini, constituent les domaines simplement connexes avec le contour, ayant plus d'un point. Soit

$$(3) \quad x_s = \tau_s z_s + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j^{(s)}}{z_s^j} \quad (s=1, 2, \dots, k)$$

la fonction qui fournit la représentation conforme du domaine E_s' sur le domaine $|z_s| > 1$ et soit $C_\rho^{(s)}$ — la courbe sur le plan x_s , qui est l'image de la circonférence $|z_s| = \rho$ ($\rho > 1$; $s = 1, 2, \dots, k$). Dans ces conditions on peut affirmer que la série (1) avec le paramètre α ($|\alpha| < 1$) converge absolument et uniformément, si chacun des x_s appartient à un domaine, situé avec son contour à l'intérieur de $C_{\frac{1}{|\alpha|}}^{(s)}$. On ne peut pas perfectionner ce résultat, c. à d. si un des x_s , au moins est situé à l'extérieur de $C_{\frac{1}{|\alpha|}}^{(s)}$, on peut construire

les polynômes P_n qui satisfont aux conditions mentionnées, mais pour lesquels la série (1) diverge.

2. Considérons d'abord le cas $k = 1$. Nous aurons les polynômes $P_n(x_1)$ d'une variable x_1 . Substituons dans le polynôme $P_n(x_1)$, au lieu de x_1 son expression (3). Le quotient

$$P_n\left(\tau_1 z_1 + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^{(1)} z_1^{-j}\right) : z_1^n,$$

est une fonction holomorphe dans le domaine $|z_1| > 1$, y compris $z_1 = \infty$, et quand z_1 approche du contour de ce domaine, le module du quotient susdit devient en vertu de (2) moindre que L , et par conséquent ce module est moindre que L pour tous les points z_1 du domaine $|z_1| > 1$. Nous aurions donc l'inégalité

$$|P_n(x_1)| < L\rho^n$$

pour les valeurs de x_1 sur la courbe $C_\rho^{(1)}$, et la convergence de la série (1), indiquée dans le théorème du n^0 1, serait la conséquence immédiate de cette inégalité.

Démontrons maintenant qu'il est impossible de perfectionner ce résultat. Soit

$$T_n^{(1)}(x_1) = x_1^n + a_1^{(1)} x_1^{n-1} + \dots + a_n^{(1)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

— les polynômes de Tchebycheff pour l'ensemble E_1 et $m_n^{(1)}$ — maximum du module de $T_n^{(1)}(x_1)$ sur cet ensemble. Supposons d'abord que le contour de E_1 soit une courbe analytique. Dans ce cas les polynômes auraient sur la courbe $C_\rho^{(1)}$ l'expression asymptotique suivante (Faber, Crelle Journal t. 150):

$$T_n^{(1)}(x_1) = \tau_1^n z_1^n [1 + \vartheta(x_1) G \cdot \gamma^n],$$

où $|\vartheta(x_1)| < 1$, G et γ — les constantes et $0 < \gamma < 1$. On sait aussi que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{m_n^{(1)}}{|\tau_1|^n} = 1.$$

Les polynômes $\frac{T_n^{(1)}(x_1)}{m_n^{(1)}}$ satisfont aux conditions du théorème du n° 1, mais la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n^{(1)}(x_1)}{m_n^{(1)}} \alpha^n$$

est évidemment divergente, si x_1 est situé à l'extérieur de $C_{\frac{1}{|\alpha|}}^{(1)}$.

Dans le cas où le contour de E_1 serait arbitraire, prenons au lieu de E_1 l'ensemble E_{1, τ_1} dont le contour est la courbe analytique $C_{\tau_1}^{(1)}$ ($|\tau_1| > 1$). Introduisons les symboles

$$\tau_{1, \tau_1}; C_{\rho, \eta}^{(1)}; T_{n, \eta}^{(1)}(x_1); m_{n, \eta}^{(1)},$$

qui ont la signification précédente, mais se rapportent à l'ensemble E_{1, τ_1} . Il est évident que la courbe $C_{\rho}^{(1)}$ est identique avec la courbe $C_{\frac{\rho}{\eta}, \eta}^{(1)}$.

Soit ξ_1 — une valeur de x_1 situé à l'extérieur de $C_{\frac{1}{|\alpha|}}^{(1)}$ et ζ_1 — la valeur correspondante de z_1 , d'où il suit que $|\zeta_1| > \frac{1}{|\alpha|}$.

Nous avons l'expression asymptotique

$$T_{n, \tau_1}^{(1)}(x_1) = \tau_{n, \tau_1}^n \left(\frac{z_1}{\tau_1}\right)^n [1 + \vartheta(x_1) G \gamma^n]$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{m_{n, \tau_1}^{(1)}}{|\tau_{1, \tau_1}|^n} = 1.$$

Nous avons

$$\left| \frac{T_{n, \tau_1}^{(1)}(x_1)}{m_{n, \tau_1}^{(1)}} \right| < 1 \text{ sur } E_1,$$

mais la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_{n, \tau_1}^{(1)}(\xi_1)}{m_{n, \tau_1}^{(1)}} \alpha^n$$

est divergente, si le nombre τ_l est assez près de l'unité. Ainsi le théorème du n° 1 est démontré pour le cas des polynômes P_n d'une variable.

3. Supposons maintenant que P_n soient des polynômes en variables x_1, x_2, \dots, x_k et qu'ils satisfont aux conditions du n° 1.

Remplaçons dans P_n chacun des x_s par l'expression (3). Nous aurons une série généralement infinie de la forme

$$(4) \quad P_n = \sum_{(m_1, m_2, \dots, m_k)} a_{m_1 m_2 \dots m_k}^{(n)} z_1^{m_1} z_2^{m_2} \dots z_k^{m_k}$$

où la sommation est étendue à toutes les valeurs de m_1, m_2, \dots, m_k à partir de n à $(-\infty)$, et la somme de ceux des nombres m_s , qui sont positifs, ne doit pas dépasser n .

Supposons d'abord que le contour de chaque ensemble E_s soit une courbe analytique. Dans ce cas la série (4) converge absolument et uniformément pour les valeurs $|z_s| = 1$ ($s = 1, 2, \dots, k$). En remplaçant dans cette série chaque z_s par $e^{i\theta_s}$ et en intégrant $|P_n|^2$ par rapport à chaque θ_s de 0 à 2π , nous aurons en vertu de (2) l'inégalité

$$(5) \quad \sum_{(m_1, m_2, \dots, m_k)} |a_{m_1 m_2 \dots m_k}^{(n)}|^2 < L^2.$$

Supposons que chacun des x_s soit situé à l'intérieur ou sur la courbe $C_\rho^{(s)}$. L'application à la série (4) de l'inégalité de Cauchy nous donne en vertu de (5) l'inégalité

$$(6) \quad |P_n|^2 < L^2 \sum_{(m_1 m_2 \dots m_k)} \rho^{2(m_1 + m_2 + \dots + m_k)}$$

où la règle de sommation est celle qui a été expliquée plus haut. Si au lieu de cette règle nous effectuons la sommation pour chaque m_s à partir de n à $(-\infty)$ avec la condition complémentaire

$$m_1 + m_2 + \dots + m_k \leq n,$$

l'inégalité (6) aura lieu d'autant plus. Le nombre des termes de la somme, qui sont égaux à ρ^{2j} , s'exprime par le coefficient binomial

$$\binom{nk - j + k - 1}{k - 1},$$

et par suite

$$(7) \quad |P_n| < L^2 \sum_{s=1}^{\infty} \binom{(n+1)(k-1)+s}{k-1} \rho^{2n-2s}.$$

Pour les valeurs de ρ , qui satisfont à l'inégalité

$$\rho \geq \rho_1 > 1,$$

où ρ_1 est un nombre fixé, l'équation (7) nous donne l'inégalité

$$(8) \quad |P_n| < L^2 C n^{k-1} \rho^{2n}$$

où C est une constante qui ne dépend ni de ρ , ni de n . De cette inégalité dérive immédiatement la convergence absolue et uniforme de la série (1), si chacun des x_s est situé sur le courbe $C_\rho^{(s)}$ où $\rho < \frac{1}{|\alpha_s|}$.

Par conséquent, la convergence de la série (1), signalée au n° 1, est démontrée.

Rejetons maintenant la supposition que le contour de chaque E_s soit une courbe analytique. Le quotient

$$\frac{P_n}{z_1^n z_2^n \dots z_k^n}$$

où dans P_n chacun des x_s est remplacé par l'expression (3), est une fonction holomorphe de z_s dans les domaines $|z_s| > 1$, et l'application du principe du module nous donne, comme au n° 2, l'inégalité

$$(9) \quad |P_n| < L \eta^{kn}$$

pour les valeurs x_s sur les courbes $C_\eta^{(s)}$ ($\eta > 1$; $s = 1, 2, \dots, k$). Remplaçons dans la série (4) chaque z_s par $\eta z_s'$

$$P_n = \sum_{(m_1, m_2, \dots, m_k)} b_{m_1 m_2 \dots m_k}^{(n)} z_1'^{m_1} z_2'^{m_2} \dots z_k'^{m_k}.$$

Dans cette série on peut poser $z_s' = e^{i\theta_s}$ et intégrer $|P_n|^2$ par rapport à θ_s de 0 à 2π , ce qui donne en vertu de (9) l'inégalité analogue à (5)

$$\sum_{(m_1, m_2, \dots, m_k)} |b_{m_1 m_2 \dots m_k}^{(n)}|^2 < L^2 \eta^{2kn}.$$

En reprenant les raisonnements précédents et ayant égard à ce que la condition $|z_s| = \rho$ soit équivalente à $|z_s'| = \frac{\rho}{\eta}$, nous aurons pour P_n au lieu de (8) l'inégalité

$$(10) \quad |P_n| < L^2 C n^{k-1} \eta^{2(k-1)n} \rho^{2n}.$$

Le nombre η on peut prendre assez près de l'unité et on peut tirer de l'inégalité (10) la convergence de la série (1), signalée au n° 1.

Il est facile de construire les polynômes P_n , qui contiennent toutes les variables $x_1, x_2, \dots, x_\kappa$ et satisfont aux conditions du n° 1, mais pour lesquelles la série (1) diverge, si un des x_s au moins est situé à l'extérieur de $C_{\frac{1}{|\alpha|}}^{(s)}$. Dans le cas où x_1 serait situé à l'extérieur de

$C_{\frac{1}{|\alpha|}}^{(1)}$ et où le contour de E_1 serait une courbe analytique on pourrait prendre, par exemple,

$$P_{n+\kappa-1} = \frac{T_n^{(1)}(x_1)}{m_n^{(1)}} x_2 x_3 \dots x_\kappa.$$

4. Si l'ensemble E_s est constitué par le segment $(-\lambda_s, +\lambda_s)$ de l'axe réelle, la courbe $C_\rho^{(s)}$ est, comme on sait bien, l'ellipse

$$(11) \quad \frac{4x^2}{\lambda_s^2 \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right)^2} + \frac{4y^2}{\lambda_s^2 \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right)^2} = 1.$$

Supposons que la condition $|P_n| < L$ a lieu pour les valeurs réelles des variables x_s , satisfaisant à l'inégalité

$$(12) \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_\kappa^2 \leq 1.$$

Limitons la variation de chacun des x_s par le segment $(-\lambda_s, +\lambda_s)$ où λ_s satisfont à la condition

$$(13) \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_\kappa^2 = 1.$$

L'inégalité (12) sera satisfaite, et nous aurons pour ces valeurs de variables x_s la condition $|P_n| < L$. Par conséquent, en vertu du théorème du n° 1, la série (1) sera convergente à l'intérieur des ellipses (11). On arrive ainsi à la proposition suivante.

Soit P_n — les polynomes en variables $x_1, x_2, \dots, x_\kappa$, le degré de P_n ne dépassant pas n . Supposons que l'inégalité (2) a lieu pour les valeurs réelles des variables x_s , satisfaisant à l'inégalité (12). Dans ces conditions ou peut affirmer que la série (1) converge absolument et uniformément, si chacun des x_s appartient à un domaine qui avec son contour est situé à l'intérieur de l'ellipse (11), λ_s étant les nombres réels quelconques, qui satisfont à la condition (13).

Ce problème a été traité aussi par Liapounoff dans son mémoire susdit, mais le résultat de Liapounoff est plus restreint que le nôtre.

Supposons en dernier lieu que la condition par rapport au degré des polynomes P_n soit remplacée par une autre, plus générale, à savoir qu'on peut fixer deux entiers m et l de telle manière que le degré de P_n ne dépasse pas $(mn + l)$. La proposition du n° 1 serait encore vraie, pourvu que l'on remplaçât les courbes $C_1^{(s)}$ par les courbes

$$\frac{C_1^{(s)}}{\sqrt[m]{|\alpha|}}.$$

О некоторых рядах полиномов.

В. И. Смирнов.

В настоящей заметке доказывается теорема:

Пусть P_n — полиномы переменных x_1, x_2, \dots, x_k , при чем степень P_n не превосходит n . Предположим, что имеет место неравенство

$$|P_n| < L \quad (n = 0, 1, 2, \dots, L \text{ — постоянная}),$$

если каждое x_s принадлежит некоторой замкнутой, ограниченной совокупности E_s ($s = 1, 2, \dots, k$), и предположим, что совокупности E_s' , дополнительные для E_s и содержащие бесконечно далекую точку, суть односвязные области с контуром, содержащим более одной точки. Пусть

$$x_s = \tau_s z_s + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^{(s)} z_s^{-j} \quad (s = 1, 2, \dots, k)$$

функция, совершающая конформное преобразование E_s' в область $|z_s| > 1$, и пусть $C_\rho^{(s)}$ — кривая на плоскости x_s , являющаяся изображением окружности $|z_s| = \rho$ ($\rho > 1$; $s = 1, 2, \dots, k$). При этих условиях можно утверждать, что ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n \alpha^n$$

с параметром α ($|\alpha| < 1$) сходится абсолютно и равномерно, если всякое x_s принадлежит области, которая вместе со своим контуром находится внутри $C_1^{(s)}$. Полученную область сходимости нельзя расширить.