F. L. Nazarov, A. N. Podkorutov, The behavior of the Lebesgue constants of two-dimensional Fourier sums over polygons,
Algebra i Analiz, 1995, Volume 7, Issue 4, 214–238

Алгебра и анализ
Том 7 (1995), вып. 4

ПОВЕДЕНИЕ КОНСТАНТ ЛЕБЕГА ДВУМЕРНЫХ СУММ ФУРЬЕ ПО МНОГОУГОЛЬНИКАМ

Ф. Л. Назаров, А. Н. Подкорытов

Сумма двойного ряда Фурье определяется как предел частичных сумм по гомотетичным многоугольникам. Изучается влияние арифметических свойств многоугольника на рост констант Лебега (норм операторов взятия частичной суммы). Показано, в частности, что регулярность этого роста существенно зависит от того, имеется ли среди сторон многоугольника сторона с иррациональным наклоном.

§0. Введение

Для любой функции $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$, 1-периодической по каждой переменной, можно определить ряд Фурье

$$f(t,s) \sim \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(m,n)e^{2\pi i(mt+ns)},$$

где

$$\widehat{f}(m,n) = \iint\limits_{[-1/2,1/2]^2} f(t,s)e^{-2\pi i(mt+ns)}\,dt\,ds.$$

В отличие от одномерного случая, здесь нет канонического способа суммирования таких рядов. Можно выбрать произвольную замкнутую область $W \subset \mathbb{R}^2$, содержащую начало координат внутри себя, и положить для $\lambda > 0$

$$S_{\lambda W} f(t,s) = \sum_{(m,n)\in\lambda W} \widehat{f}(m,n)e^{2\pi i(mt+ns)}.$$

Здесь $\lambda W = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : (\frac{u}{\lambda}, \frac{v}{\lambda}) \in W\}$. Тогда сумму двойного ряда естественно определить как предел (если он существует) при $\lambda \to +\infty$ „частичных сумм“

Ключевые слова: двойные ряды Фурье, суммы по многоугольникам, константы Лебега.

$S_{\lambda W} f(t,s)$. Эти суммы могут быть также записаны в виде свертки $S_{\lambda W} f = f * \mathcal{D}_{\lambda W}$, где

$$\mathcal{D}_{\lambda W}(t,s) = \sum_{(m,n)\in\lambda W} e^{2\pi i(mt+ns)} \text{ — соответствующее ядро Дирихле.}$$

Выбор конкретной области W сильно влияет на поведение частичных сумм $S_{\lambda W} f(t,s)$ при $\lambda \to +\infty$. Во многом это определяется тем, что от области W зависит скорость роста норм операторов $S_{\lambda W}$ (констант Лебега), т.е. величин

$$L_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \iint\limits_{[-1/2,1/2]^2} |\mathcal{D}_{\lambda W}(t,s)|\, dt\, ds.$$

Изучение асимптотики L_λ затруднено отсутствием компактной формулы для ядра $\mathcal{D}_{\lambda W}$, аналогичной формуле Дирихле в одномерном случае. Естественно выглядит попытка заменить ядро $\mathcal{D}_{\lambda W}$ на его непрерывный аналог $\widetilde{\mathcal{D}}_{\lambda W}(t,s) \stackrel{\text{def}}{=} \iint_{\lambda W} e^{2\pi i(mt+ns)}\, dm\, dn$. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда W - замкнутый многоугольник (достаточно общей природы: мы не предполагаем ни выпуклости, ни связности, важна лишь ограниченность). Такое определение частичной суммы удачно во многих отношениях. Например, как показал Фефферман [1], теорема Карлесона-Ханта о сходимости почти везде остается верной и для таких сумм (более того, это простое следствие одномерного результата). Отметим также, что в этом случае константы Лебега имеют наименьшую возможную (по порядку) скорость роста [2]. Наша цель - исследовать, как арифметические характеристики многоугольника W влияют на рост констант Лебега при $\lambda \to +\infty$.

Сформулируем некоторые уже известные результаты:

1) для любого многоугольника W справедлива двусторонняя оценка (для достаточно больших λ) [2–4]

$$c(W)\log^2\lambda \le L_\lambda \le C(W)\log^2\lambda, \quad \text{где} \quad 0 < c(W) < C(W) < +\infty;$$

2) если наклоны всех сторон W рациональны, то ядро $\mathcal{D}_{\lambda W}(t,s)$ ведет себя почти так же, как и его непрерывный аналог $\widetilde{\mathcal{D}}_{\lambda W}(t,s)$, а именно [5]

$$\iint\limits_{[-1/2,1/2]^2} |\mathcal{D}_{\lambda W}(t,s) - \widetilde{\mathcal{D}}_{\lambda W}(t,s)|\, dt\, ds \le C(W)\log\lambda.$$

В общем случае ядро $\widetilde{\mathcal{D}}_{\lambda W}$ удобнее, чем $\mathcal{D}_{\lambda W}$, и для естественных областей W интеграл от его абсолютной величины по $[-1/2,1/2]^2$ имеет хорошую асимптотику, которую несложно вычислить. В случае, когда W многоугольник,

$$\iint\limits_{[-1/2,1/2]^2} |\widetilde{\mathcal{D}}_{\lambda W}(t,s)|\,dt\,ds \sim c(W)\log^2\lambda.$$

Константа $c(W)$ может быть легко вычислена, когда W не имеет параллельных сторон: она равна $\frac{2}{\pi^3}\times\{$число сторон $W\}$. В общем случае точное выражение для $c(W)$ более сложно.

3) В [6] был исследован случай, когда W – треугольник $W_\alpha = \{\,(u,v)\mid 0\le u\le 1,\ 0\le v\le \alpha u\,\}$. Было показано, что для больших λ

$$L_\lambda = \iint\limits_{[-1/2,1/2]^2} |\widetilde{\mathcal{D}}_{\lambda W_\alpha}(t,s)|\,dt\,ds + \int\limits_0^1 \Big|\sum_{0\le v\le\lambda}\{\alpha v\}e^{2\pi i v t}\Big|\,dt + O(\log\lambda\log\log\lambda), \qquad (*)$$

причем существует такое $\alpha>0$, что второе слагаемое больше $\frac{1}{4\pi^2}\log^2\lambda$ вдоль некоторой (весьма редкой) последовательности λ, стремящейся к $+\infty$ (отметим, что первое слагаемое эквивалентно $\frac{6}{\pi^3}\log^2\lambda$). Было также показано, что можно так подобрать α, что дробь $\frac{L_\lambda}{\log^2\lambda}$ не имеет предела при $\lambda\to+\infty$. Главный недостаток результатов [6] состоит в том, что они касаются только значений α из очень редкого множества и не дают никакой информации о других $\alpha\in(0,+\infty)$.

В данной работе эта неопределенность частично устранена: мы покажем, что L_λ растет как $\iint\limits_{[-1/2,1/2]^2} |\widetilde{\mathcal{D}}_{\lambda W}(t,s)|\,dt\,ds$ лишь в случае, когда наклоны всех сторон W рациональны, но вопрос о существовании предела $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\frac{L_\lambda}{\log^2\lambda}$ для многоугольника W, имеющего сторону с иррациональным наклоном, остается открытым. Авторы воздерживаются здесь от обсуждения этого вопроса, так как их мнения на этот счет не совпадают.

Для удобства читателя вплоть до последнего параграфа мы будем иметь дело с треугольником W_α вместо произвольного многоугольника W, а затем укажем необходимые изменения в доказательстве и дополнительные соображения, используемые в общем случае. Это позволит нам избежать громоздких формул и вычислений, сделать главную идею доказательства более ясной и удобной для понимания.

§1. Предварительные результаты

Здесь мы вкратце поясним равенство (∗) из [6]. Читатель, которому это известно, может сразу перейти к §2.

Имеем (здесь и далее [...] и {...} - обозначения целой и дробной частей вещественного числа)

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\lambda W(t,s) &= \sum_{0\le m\le\lambda}\sum_{0\le n\le\alpha m} e^{2\pi i(mt+ns)} = \sum_{0\le m\le\lambda} e^{2\pi imt}\int\limits_{[0,\alpha m]} e^{2\pi ins}\,d[n]\\ &= \sum_{0\le m\le\lambda} e^{2\pi imt}\int\limits_{[0,\alpha m]} e^{2\pi ins}\,dn - \sum_{0\le m\le\lambda} e^{2\pi imt}\int\limits_{[0,\alpha m]} e^{2\pi ins}\,d\{n\}\\ &\stackrel{\text{def}}{=} S_1(t,s) - S_2(t,s).\end{aligned}$$

Заметим, что $S_1(t,s) = \frac{1}{2\pi is}\sum\limits_{0\le m\le\lambda}\left(e^{2\pi im(t+\alpha s)} - e^{2\pi imt}\right)$, в то время как

$$\widetilde{\mathcal{D}}_\lambda W(t,s) = \frac{1}{2\pi is}\int\limits_0^\lambda \left(e^{2\pi im(t+\alpha s)} - e^{2\pi imt}\right)dm.$$

Кроме того, очевидно, что $|S_1(t,s)| + |\widetilde{\mathcal{D}}_\lambda W(t,s)| \le C\lambda^2$ для больших λ. Поэтому

$$\begin{aligned}\iint\limits_{[-1/2,1/2]^2} |S_1(t,s) - \widetilde{\mathcal{D}}_\lambda W(t,s)|\,dt\,ds &= \int\limits_{|t|\le\frac12}\Bigg(\int\limits_{|s|\le\frac{1}{\lambda^2}} + \int\limits_{\frac{1}{\lambda^2}\le|s|\le\frac{1}{4\alpha}} + \int\limits_{\frac{1}{4\alpha}\le|s|\le\frac12}\Bigg)\\ &\stackrel{\text{def}}{=} I_1 + I_2 + I_3,\end{aligned}$$

где

$$|I_1| \le \int\limits_{|t|\le\frac12}\int\limits_{|s|\le\frac{1}{\lambda^2}} C\lambda^2\,dt\,ds = 2C,$$

$$|I_3| \le 4\alpha \iint\limits_{[-1/2,1/2]^2} |s|(|S_1(t,s)| + |\widetilde{\mathcal{D}}_\lambda W(t,s)|)\,dt\,ds \le C\log\lambda$$

(потому что мы интегрировали сумму четырех одномерных ядер Дирихле).

Наконец, оценивая I_2, заметим, что

$$\Big|\sum_{0\le m\le\lambda} e^{2\pi i m\xi} - \int_0^\lambda e^{2\pi i m\xi}\,dm\Big| \le \text{const} \quad \text{для любого } \xi\in(-3/4,3/4)$$

и, следовательно,

$$|I_2| \le \int\limits_{\frac{1}{\lambda^2}\le|s|\le\frac12} \frac{\text{const}}{\pi|s|}\,ds \le C\log\lambda,$$

и мы имеем

$$\iint\limits_{[-1/2,1/2]^2} \big|S_1(t,s) - \widetilde{\mathcal{D}}_\lambda w(t,s)\big|\,dt\,ds = O(\log\lambda) \quad (\lambda\to+\infty).$$

С другой стороны, интегрируя по частям, имеем

$$S_2(t,s) = \sum_{0\le m\le\lambda} e^{2\pi i m t} + \sum_{0\le m\le\lambda}\{\alpha m\}e^{2\pi i m(t+\alpha s)} - \sum_{0\le m\le\lambda} e^{2\pi i m t}\int_0^{\alpha m} 2\pi i s\{n\}e^{2\pi i s n}\,dn.$$

Первая сумма – одномерное ядро Дирихле $D_\lambda(t)$ и его L^1-норма не превосходит $C\log\lambda$. Оценивая L^1-норму последней суммы, разложим дробную часть $\{n\}$ в ряд Фурье: $\{n\} = \frac12 + \sum\limits_{r\ne0}\frac{1}{2\pi i r}e^{2\pi i r n}$. Тогда

$$\int_0^{\alpha m} 2\pi i s\{n\}e^{2\pi i s n}dn = \frac12\left(e^{2\pi i m\alpha s}-1\right) + \sum_{r\ne0}\frac{s}{2\pi i r(r+s)}\left(e^{2\pi i m\alpha(r+s)}-1\right)$$

и, следовательно, оцениваемая сумма равна

$$\frac12\big(D_\lambda(t+\alpha s)-D_\lambda(t)\big) + \sum_{r\ne0}\frac{s}{2\pi i r(r+s)}\big(D_\lambda(t+\alpha(r+s))-D_\lambda(t)\big).$$

Отсюда видно, что ее L^1-норма не превосходит $C\log\lambda$.

Объединив все эти результаты, получим

$$\mathcal{D}_\lambda W(t,s) = \widetilde{\mathcal{D}}_\lambda W(t,s) - \sum_{0\le m\le\lambda} \{\alpha m\} e^{2\pi i m(t+\alpha s)} + R(t,s), \qquad (**)$$

где $\iint_{[-1/2,1/2]^2} |R(t,s)|\,dt\,ds \le C\log\lambda$.

Чтобы получить отсюда равенство $(*)$, достаточно заметить, что функция $\widetilde{\mathcal{D}}_\lambda W(t,s)$ сконцентрирована в основном при малых значениях s, в то время как сумма $\sum\limits_{0\le m\le\lambda} \{\alpha m\} e^{2\pi i m(t+\alpha s)}$, очевидно, „равнораспределена" по s на промежутке $[-1/2,1/2]$ в L^1-смысле. Точнее,

$$\int\limits_{\frac{1}{\log\lambda}\le|s|\le\frac12} ds\Big(\int\limits_{|t|\le\frac12} |\widetilde{\mathcal{D}}_\lambda W(t,s)|\,dt\Big) \le \int\limits_{\frac{1}{\log\lambda}\le|s|\le\frac12} \frac{C\log\lambda}{|s|} = O(\log\lambda\log\log\lambda),$$

в то же время

$$\int\limits_{|s|\le\frac{1}{\log\lambda}} ds\Big(\int\limits_{|t|\le\frac12} \Big|\sum_{0\le m\le\lambda} \{\alpha m\} e^{2\pi i m(t+\alpha s)}\Big|\,dt\Big)$$

$$= \frac{2}{\log\lambda}\int\limits_0^1 \Big|\sum_{0\le m\le\lambda} \{\alpha m\}\; e^{2\pi i m t}\Big|\,dt = O(\log\lambda)$$

(последнее соотношение вытекает из равенства $(**)$, так как L^1-нормы $\mathcal{D}_\lambda W$ и $\widetilde{\mathcal{D}}_\lambda W$ не превосходят $C\log^2\lambda$ [3, 4]; кроме того, оно вытекает из последующих рассуждений).

§2. Формулировка основного результата

Как показано в предыдущем параграфе, для нахождения асимптотики констант Лебега по треугольнику W_α необходимо изучить интеграл

$$I_\lambda(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^1 \Big|\sum_{0\le v\le\lambda} \{\alpha v\} e^{2\pi i v t}\Big|\,dt.$$

Его поведение (при $\lambda\to\infty$) определяется арифметическими свойствами числа α. Если $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, то ситуация довольно простая - этот интеграл дает пренебрежимый вклад в L_λ:

$$\varlimsup_{\lambda\to\infty} \frac{I_\lambda(\alpha)}{\log\lambda} \le \sup_{\lambda\ge2} \frac{I_\lambda(\alpha)}{\log\lambda} \le C\log q$$

(здесь и далее, если не оговорено противное, константы абсолютные).

Большая часть информации о $I_\lambda(\alpha)$ для иррационального α, которой мы располагаем, содержится в следующем утверждении.

Предложение 1. *Пусть* $\alpha \notin \mathbb{Q}$. *Тогда*

1) $0 < c \le \overline{\lim\limits_{\lambda\to\infty}} \frac{I_\lambda(\alpha)}{\log^2\lambda} \le C$.
2) $\underline{\lim\limits_{\lambda\to\infty}} \frac{I_\lambda(\alpha)}{\log^2\lambda} = 0$ *тогда и только тогда, когда* α *является лиувиллевым числом, т.е. тогда и только тогда, когда для любого* $M > 0$ *найдутся такие дроби* $\frac{p}{q}$ $(q \ge 2)$, *что* $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \le \frac{1}{q^M}$.
3) *Если* $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \le \frac{1}{q^M}$ *для некоторого* $M > 2$ *и бесконечного числа дробей* $\frac{p}{q}$ $(q \ge 2)$, *то дробь* $I_\lambda(\alpha)/\log^2\lambda$ *не имеет предела при* $\lambda \to \infty$.
4) *Интеграл* $I_\lambda(\alpha)$ *сконцентрирован на множестве малой меры, а именно, для любых* $\lambda \ge 2$ *и* $\alpha \notin \mathbb{Q}$ *существует такое множество* $E = E(\lambda, \alpha) \subset (0,1)$, *что* $\mu(E) \le e^{-\sqrt{\log\lambda}}$, *в то время как* $\int_{[0,1]\setminus E}\Big|\sum\limits_{0\le v\le\lambda}\{\alpha v\}\, e^{2\pi i v t}\Big|\,dt \le C\log^{3/2}\lambda$.
5) *Существуют такие числа* $0 < \omega \le \Omega < +\infty$, *что для почти всех* α

$$\omega = \underline{\lim_{\lambda\to\infty}} \frac{I_\lambda(\alpha)}{\log^2\lambda} \qquad \textit{и} \qquad \Omega = \overline{\lim_{\lambda\to\infty}} \frac{I_\lambda(\alpha)}{\log^2\lambda}.$$

Из 1) и 2) следует, что „типичное“ (в смысле категории) поведение интеграла $I_\lambda(\alpha)$ таково, что $\underline{\lim\limits_{\lambda\to\infty}} \frac{I_\lambda(\alpha)}{\log^2\lambda} = 0$, в то время как $\overline{\lim\limits_{\lambda\to\infty}} \frac{I_\lambda(\alpha)}{\log^2\lambda} \ge c > 0$ (поскольку множество нелиувиллевских чисел имеет первую категорию на $(0, +\infty)$). В то же время из 5) следует, что „типичное“ поведение $I_\lambda(\alpha)$ в смысле лебеговой меры таково, что $\underline{\lim\limits_{\lambda\to\infty}} \frac{I_\lambda(\alpha)}{\log^2\lambda} = \omega > 0$. Очень интересно, равны ли числа ω и Ω – равенство означает, что для почти всех $\alpha \in \mathbb{R}$ константы Лебега, соответствующие треугольнику W_α, растут как $\mathrm{const}\log^2\lambda$.

Стоит отметить, что утверждения 1)–3) имеют локальные версии. Мы покажем, что для любого интервала $\Delta \subset \mathbb{R}$ разность интегралов от $\Big|\sum\limits_{0\le v\le\lambda}\{\alpha v\}e^{2\pi i v t}\Big|$ по Δ и $\Delta + \alpha$ не превосходит $C\log\lambda$. Это (вместе с 1) и хорошо известным фактом, что числа $\{\alpha\}$, $\{2\alpha\}$, $\{3\alpha\}, \ldots$ равномерно распределены на $(0,1)$, если $\alpha \notin \mathbb{Q}$) влечет

$$\int\limits_\Delta \Big|\sum_{0\le v\le\lambda}\{\alpha v\}e^{2\pi i v t}\Big|\,dt = \mu(\Delta)I_\lambda(\alpha) + o(\log^2\lambda),$$

причем точная верхняя оценка для $o(\log^2\lambda)$ зависит лишь от α и $\mu(\Delta)$ (но не от расположения интервала Δ на вещественной прямой). Для $\mathcal{D}_{\lambda W_\alpha}(t,s)$ это означает, что все точки (t,s) дают примерно одинаковый вклад в L_λ и, следовательно, нет „принципа локализации“ (в отличие от случая рационального наклона, когда нетрудно показать, что последовательность частичных сумм $S_{\lambda W_\alpha} f$ функции f с носителем в ε-окрестности начала координат сходится к 0 вне некоторого малого множества, состоящего из конечного числа полос шириной 2ε, и даже в этом множестве $S_{\lambda W_\alpha}(t,s)$ могут расти лишь как $\log\lambda$ (но не как $L_\lambda \asymp \log^2\lambda$) для $(t,s)\notin \operatorname{supp} f$).

Перейдем теперь к доказательствам. Очевидно, можно считать, что $\alpha\in(0,1)$ и $\lambda\in\mathbb{N}$.

Мы начнем с последнего утверждения, доказательство которого совсем коротко. Действительно, так как

$$\sum_{0\le v\le\lambda/2}\{2\alpha v\}e^{2\pi i(2v)t}=\frac{1}{2}\Big(\sum_{0\le v\le\lambda}\{\alpha v\}e^{2\pi ivt}+\sum_{0\le v\le\lambda}\{\alpha v\}e^{2\pi iv(t+\frac{1}{2})}\Big),$$

то $I_{\lambda/2}(\{2\alpha\})\le I_\lambda(\alpha)$. Обозначив $\omega(\alpha)\overset{\text{def}}{=}\varliminf\limits_{\lambda\to\infty} I_\lambda(\alpha)/\log^2\lambda$ и $\Omega(\alpha)\overset{\text{def}}{=}\varlimsup\limits_{\lambda\to\infty} I_\lambda(\alpha)/\log^2\lambda$, мы сразу получим отсюда, что $\omega(\{2\alpha\})\le\omega(\alpha)$ и $\Omega(\{2\alpha\})\le\Omega(\alpha)$. Это (вместе с эргодичностью преобразования $[0,1)\ni\alpha\mapsto\{2\alpha\}\in[0,1)$) влечет $\omega(\alpha)=\omega$, $\Omega(\alpha)=\Omega$ для почти всех $\alpha\in[0,1)$ для некоторых $0\le\omega\le\Omega<+\infty$. Осталось заметить, что лиувиллевы числа образуют множество нулевой меры, и поэтому из 2) следует, что $\omega>0$.

§3. Оценки $I_\lambda(\alpha)$ сверху

Сначала рассмотрим случай $\alpha=\frac{p}{q}$, когда $q>2$ и $(p,q)=1$. Рассмотрим 1-периодическую функцию φ

$$\varphi(s)=\begin{cases} s, & 0\le s\le\dfrac{q-1}{q}\\ (q-1)(1-s), & \dfrac{q-1}{q}\le s\le 1.\end{cases}$$

Коэффициенты Фурье φ равны $\widehat{\varphi}(0)=\frac{q-1}{2q}$ и $\widehat{\varphi}(k)=\frac{q(e^{2\pi ik/q}-1)}{(2\pi k)^2}$ для $k\in\mathbb{Z}$, $k\ne0$. Отсюда легко вывести, что

$$\frac{1}{\pi^2|k|}\le|\widehat{\varphi}(k)|\le\frac{1}{2\pi|k|}\quad\text{для}\quad 0<|k|\le q/2$$

и

$$|\widehat{\varphi}(k)|\le\frac{q}{2\pi^2k^2}\quad\text{для всех}\quad k\in\mathbb{Z}.$$

В частности, $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{\varphi}(k)|\le C\log q$. Заметим, что

$$\begin{aligned}\sum_{0\le v\le\lambda}\{\alpha v\}e^{2\pi ivt}&=\sum_{0\le v\le\lambda}\varphi(\alpha v)e^{2\pi ivt}=\sum_{0\le v\le\lambda}\Bigl(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi}(k)e^{2\pi ik\alpha v}\Bigr)e^{2\pi ivt}\\&=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi}(k)\sum_{0\le v\le\lambda}e^{2\pi iv(t+k\alpha)}\\&=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi}(k)D_\lambda(t+k\alpha)\end{aligned}$$

(через D_λ мы обозначили одномерное ядро Дирихле $D_\lambda(t)=\sum\limits_{0\le v\le\lambda}e^{2\pi ivt}$).

Отсюда следует оценка сверху в рациональном случае

$$I_\lambda(\frac{p}{q})\le\Bigl(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{\varphi}(k)|\Bigr)\int\limits_0^1|D_\lambda(t)|\,dt\le C\log q\log\lambda.$$

Покажем теперь, что интегралы $I_\lambda(\alpha)$ и $I_\lambda\bigl(\frac{p}{q}\bigr)$ мало различаются, если $\bigl|\alpha-\frac{p}{q}\bigr|\le\frac{1}{q\lambda}$ и $q\le\lambda$ (по хорошо известной теореме Дирихле такую дробь $\frac{p}{q}$ можно подобрать для любых $\alpha\in\mathbb{R}$ и $\lambda>1$; очевидно, мы можем также считать, что $(p,q)=1$).

Если $\gamma\stackrel{\text{def}}{=}\alpha-\frac{p}{q}$ положительно, то $\{\alpha v\}=\bigl\{\frac{p}{q}v\bigr\}+\gamma v$ для всех $0\le v\le\lambda$ и, следовательно,

$$\begin{aligned}\Bigl|I_\lambda(\alpha)-I_\lambda\Bigl(\frac{p}{q}\Bigr)\Bigr|&\le\int\limits_0^1\Bigl|\sum_{0\le v\le\lambda}\Bigl(\{\alpha v\}-\Bigl\{\frac{p}{q}v\Bigr\}\Bigr)e^{2\pi ivt}\Bigr|\,dt=\int\limits_0^1\Bigl|\sum_{0\le v\le\lambda}\gamma ve^{2\pi ivt}\Bigr|\,dt\\&\le C\gamma\lambda\log\lambda\\&\le C\log\lambda,\end{aligned}$$

так как $\gamma\lambda\le 1/q\le 1$. В частности, $I_\lambda(\alpha)\le C\log q\log\lambda+C\log\lambda\le\operatorname{const}\log^2\lambda$. Если γ отрицательно, то равенство $\{\alpha v\}=\bigl\{\frac{p}{q}v\bigr\}+\gamma v$ сохраняется, за исключением значений v, делящихся на q, для которых правая и левая части различаются на 1. Это дает дополнительное слагаемое $\int_0^1|D_{\lambda/q}(qt)|\,dt$, которое не больше, чем $C\log\lambda$. Таким образом, оценка сверху в утверждении 1) доказана.

Заметим также, что сумма $\sum\limits_{0\leqslant v\leqslant\lambda}\widehat{\varphi}(k)D_\lambda\bigl(t+k\frac{p}{q}\bigr)$ может рассматриваться как частичная сумма ряда Фурье (комплекснозначной) меры $\nu\stackrel{\text{def}}{=}\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi}(k)\delta_{\{-k\frac{p}{q}\}}$ и, следовательно, для нее справедлива оценка слабого типа

$$\mu\Big\{ t \in (0,1) : \Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(k) D_\lambda\Big(t + \frac{kp}{q}\Big)\Big| \geq y \Big\} \leq \frac{C\|\nu\|}{y} \leq \frac{C\log q}{y} \leq \frac{C\log\lambda}{y}$$

для всех $y > 0$.

Так как эта сумма приближает сумму $\sum\limits_{0\leq v\leq\lambda} \{\alpha v\} e^{2\pi i v t}$ с погрешностью не более $C\log\lambda$ по L^1-норме, то такая же оценка слабого типа справедлива для $\sum\limits_{0\leq v\leq\lambda} \{\alpha v\} e^{2\pi i v t}$. Поэтому, доказывая 4), мы можем взять

$$E(\lambda,\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{ t \in (0,1) : \Big|\sum_{0\leq v\leq\lambda} \{\alpha v\} e^{2\pi i v t}\Big| \geq C\ e^{\sqrt{\log\lambda}} \log\lambda \Big\}.$$

Допустим теперь, что $|\alpha - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^M}$ для больших q и M. Положив $\lambda = q^{M-1}$, мы получим $I_\lambda(\alpha) \leq \widetilde{C}\log q\ \log\lambda = \frac{\widetilde{C}}{M-1}\log^2\lambda$, что мало по сравнению с $\log^2\lambda$. Следовательно, часть „тогда“ в 2) также доказана.

Что касается замечания о разности между интегралами по Δ и $\Delta+\alpha$, то оно немедленно следует из представления

$$\begin{aligned}\sum_{0\leq v\leq\lambda} \{\alpha v\} e^{2\pi i v t} - \sum_{0\leq v\leq\lambda} \{\alpha v\} e^{2\pi i v (t+\alpha)} &= \sum_{0\leq v\leq\lambda} \psi(\alpha v) e^{2\pi i v t} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}(k) D_\lambda(t+\alpha k),\end{aligned}$$

если мы учтем, что ряд Фурье функции $\psi(u) = \{u\}(e^{2\pi i u} - 1), u \in \mathbb{R}$, абсолютно сходится.

§4. Оценка $I_\lambda(\alpha)$ снизу

Мы начнем со следующего утверждения.

Лемма. *Пусть* $|\alpha - \frac{P}{Q}| \leq \frac{1}{Q^2}$ *и* $(P,Q) = 1$. *Тогда для всех* $\lambda \in [Q^4, e^{\sqrt{Q}}]$ *справедливо неравенство* $I_\lambda(\alpha) \geq c\log Q\log\lambda$ *с некоторой абсолютной константой* $c > 0$.

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что Q не слишком мало (во всяком случае мы будем применять эту лемму при $Q \to +\infty$). Как показано в §3, мы можем аппроксимировать $\sum\limits_{0\le v\le\lambda}\{\alpha v\}e^{2\pi i v t}$ суммой $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi}(k)D_\lambda\big(t+k\frac{p}{q}\big)$ для некоторой дроби $\frac{p}{q}$, удовлетворяющей неравенствам $\big|\alpha-\frac{p}{q}\big|\le\frac{1}{q\lambda}$ и $q\le\lambda$, причем функция φ зависит лишь от знаменателя q. В следующем параграфе будет очень удобно, что в этом выражении стоит $D_\lambda\big(t+k\frac{p}{q}\big)$ вместо более естественного $D_\lambda(t+k\alpha)$, но сейчас это не так. Тем не менее, так как $\int_0^1\big|\frac{d}{dt}D_\lambda(t)\big|\,dt\le C\lambda\log\lambda$, то мы имеем

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{\varphi}(k)|\int_0^1\Big|D_\lambda\Big(t+k\frac{p}{q}\Big)-D_\lambda(t+k\alpha)\Big|\,dt\\
&\qquad\le\sum_{|k|\le q/2}|\widehat{\varphi}(k)||k|\Big|\alpha-\frac{p}{q}\Big|\int_0^1\Big|\frac{d}{dt}D_\lambda(t)\Big|\,dt+2\sum_{|k|>q/2}|\widehat{\varphi}(k)|\int_0^1|D_\lambda(t)|\,dt\\
&\qquad\le\sum_{0<|k|\le q/2}\frac{1}{2\pi|k|}|k|\,\frac{1}{q\lambda}C\lambda\log\lambda+2\sum_{|k|>q/2}\frac{q}{2\pi^2k^2}C\log\lambda\\
&\qquad\le C\log\lambda,
\end{aligned}$$

и, следовательно, суммы $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi}(k)D_\lambda(t+k\alpha)$ и $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi}(k)D_\lambda\big(t+k\frac{p}{q}\big)$ различаются по L^1-норме не более, чем на $C\log\lambda$.

Зафиксируем целое $k_0\in(0,\sqrt[3]{Q})$ и рассмотрим интервал $\Delta=\Delta(k_0)$ длины $\frac{1}{Q^2}$ с центром в $-k_0\alpha$. Заметим, что для всех целых ℓ, $|\ell|\le\frac{Q}{2}$, справедливо неравенство $\big|\ell\alpha-\frac{\ell P}{Q}\big|\le\frac{|\ell|}{Q^2}\le\frac{1}{2Q}$, и поэтому для $\ell\ne0$ расстояние от $\ell\alpha$ до ближайшего целого не меньше, чем $\frac{1}{Q}-\frac{1}{2Q}=\frac{1}{2Q}$. Вместе с очевидной оценкой $|D_\lambda(\xi)|\le\frac{1}{2|\xi|}$ для $|\xi|\le1/2$ это влечет неравенство $|D_\lambda(t+k\alpha)|\le\frac{1}{1/Q-1/Q^2}\le2Q$ для всех $t\in\Delta$ и k, не принадлежащих некоторому исключительному множеству $\Lambda\ni k_0$, удовлетворяющему неравенству $|k'-k''|>\frac{Q}{2}$ для любых двух различных элементов $k',k''\in\Lambda$. Кроме этого, мы получаем отсюда также, что интервалы $\Delta(k_0)$, $k_0=1,2,\dots,\big[\sqrt[3]{Q}\big]$, попарно дизъюнктны (с учетом 1-периодичности).

Мы имеем

$$\begin{aligned}
&\int_\Delta\Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi}(k)D_\lambda(t+k\alpha)\Big|\,dt\\
&\qquad\ge|\widehat{\varphi}(k_0)|\int_\Delta|D_\lambda(t+k_0\alpha)|\,dt\\
&\qquad\quad-\int_\Delta\Big|\sum_{k\in\Lambda\setminus\{k_0\}}\widehat{\varphi}(k)D_\lambda(t+k\alpha)\Big|\,dt-\int_\Delta\Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\Lambda}\widehat{\varphi}(k)D_\lambda(t+k\alpha)\Big|\,dt\\
&\qquad\stackrel{\text{def}}{=}I_1-I_2-I_3.
\end{aligned}$$

Так как $\lambda \geq Q^4$, то

$$\int\limits_{\Delta} \big|D_\lambda(t+k_0\alpha)\big|\,dt = \int\limits_{|t|\leq \frac{1}{2Q^2}} |D_\lambda(t)|\,dt \geq c\log\lambda.$$

Следовательно,

$$I_1 \geq |\widehat{\varphi}(k_0)| c\log\lambda = \frac{q}{2\pi^2 k_0^2}\left|\sin\frac{\pi k_0}{q}\right| c\log\lambda \geq \frac{c\log\lambda}{\pi^2 k_0}$$

(дробь $\frac{k_0}{q}$ мала, так как $k_0 \leq Q^{1/3} \leq \lambda^{1/12}$, а знаменатель q можно взять не меньше, чем $\lambda/2$).

Из сделанного ранее замечания немедленно следует, что

$$I_3 \leq \mu(\Delta)2Q\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{\varphi}(k)| \leq \frac{C\log q}{Q} \leq \frac{C\log\lambda}{Q}.$$

Оценим теперь оставшийся интеграл:

$$I_2 \leq \sum_{k\in\Lambda\setminus\{k_0\}}|\widehat{\varphi}(k)|\int\limits_0^1 |D_\lambda(t)|\,dt \leq C\log\lambda\sum_{k\in\Lambda\setminus\{k_0\}}|\widehat{\varphi}(k)|.$$

Заметим, что $|k| \geq |k-k_0|-|k_0| \geq \frac{Q}{2}-\sqrt[3]{Q} > \frac{Q}{3}$ для всех $k \in \Lambda\setminus\{k_0\}$. Следовательно, для некоторого целого $d \geq \frac{Q}{3}$ элементы множества $\Lambda\setminus\{k_0\}$ удовлетворяют неравенствам $|k| \geq d$ и $|k'-k''| \geq d$ для $k' \neq k''$. Напомним, что $|\widehat{\varphi}(k)|$ имеет симметричную и убывающую в обе стороны (по k) мажоранту

$$\phi(k) = \begin{cases} 1/2, & k=0 \\ \dfrac{1}{2\pi|k|}, & 0<|k|\leq q/2 \\ \dfrac{q}{2\pi^2k^2}, & |k|> q/2 \end{cases}$$

и поэтому

$$\sum_{k\in\Lambda\setminus\{k_0\}}|\widehat{\varphi}(k)| \leq \sum_{k\in\Lambda\setminus\{k_0\}}\phi(k) \leq 2\sum_{\ell=1}^{\infty}\phi(\ell d) \leq 2\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{\infty}\phi(k) \leq \frac{C\log q}{d} \leq \frac{3C\log\lambda}{Q}.$$

Это дает требуемую оценку

$$I_2 \le \frac{C\log^2\lambda}{Q} \le \frac{C\log\lambda}{\sqrt{Q}} \quad (\text{для } \lambda \le e^{\sqrt{Q}}).$$

Итак,

$$\int\limits_{\Delta}\Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi}(k)D_\lambda(t+k\alpha)\Big|\,dt \ge \Big(\frac{c}{\pi^2 k_0} - \frac{C}{Q} - \frac{C}{\sqrt{Q}}\Big)\log\lambda \ge \frac{c}{2\pi^2 k_0}\log\lambda$$

с некоторыми абсолютными константами c и C, где Q не слишком мало (мы использовали здесь оценку $k_0 \le \sqrt[3]{Q}$, которая гарантирует, что первое слагаемое существенно больше обоих вычитаемых).

Окончательно

$$\int\limits_0^1 \cdots \ge \sum_{1\le k_0\le\sqrt[3]{Q}}\ \int\limits_{\Delta(k_0)}\cdots \ge \sum_{1\le k_0\le\sqrt[3]{Q}}\frac{c}{2\pi^2 k_0}\log\lambda \ge \frac{c}{6\pi^2}\log Q\log\lambda$$

и осталось только заметить, что вычитание $C\log\lambda$ из правой части (которое нужно, чтобы вернуться к первоначальному интегралу $I_\lambda(\alpha)$) не влияет на оценку для больших Q. Лемма доказана.

Для каждого $\alpha\notin\mathbb{Q}$ можно указать бесконечное число дробей $\frac{P}{Q}$, удовлетворяющих неравенству $\left|\alpha-\frac{P}{Q}\right| \le \frac{1}{Q^2}$. Полагая $\lambda \overset{\text{def}}{=} Q^4$ для каждого такого Q, мы сразу получаем оценку снизу в 1).

Допустим теперь, что $\left|\alpha-\frac{P}{Q}\right| \ge \frac{\text{const}}{Q^M}$ для любой дроби $\frac{P}{Q}$ (константа зависит от α и M, но не от P и Q). Для каждого $\lambda\ge 1$ можно подобрать такую дробь $\frac{P}{Q}$, что $Q\le\sqrt[4]{\lambda}$, $(P,Q)=1$ и $\left|\alpha-\frac{P}{Q}\right| \le \frac{1}{Q\sqrt[4]{\lambda}}$ $\left(\le\frac{1}{Q^2}\right)$. Для таких Q мы должны иметь $\frac{1}{Q\sqrt[4]{\lambda}} \ge \frac{\text{const}}{Q^M}$, и, следовательно, $Q \ge (\text{const}\,\lambda)^{\frac{1}{4(M-1)}} \ge \lambda^{\frac{1}{4M}} \ge \log^2\lambda$ для больших λ. Тогда все условия леммы выполнены, и мы получаем

$$I_\lambda(\alpha) \ge c\log Q\log\lambda \ge \frac{c}{4M}\log^2\lambda$$

для больших λ, доказывая оставщуюся часть „только тогда" утверждения 2). Заметим, что и верхняя, и нижняя границы для $\varliminf\limits_{\lambda\to\infty}\frac{I_\lambda(\alpha)}{\log^2\lambda}$ имеют вид $\frac{\text{const}}{M}$, т.е. нижний предел обратно пропорционален „лиувиллевскому показателю" числа α.

§5. Доказательство 3)

Отметим прежде всего, что 3) вытекает из 1) и уже доказанного количественного варианта 2), если M достаточно велико. Кроме того, множество чисел $\alpha \in (0,1)$, которые можно аппроксимировать дробями p/q с погрешностью, существенно меньшей, чем $1/q^2$, имеет нулевую меру. Следовательно, результат, который мы собираемся здесь доказать, это не более чем любопытное наблюдение, относящееся к числам α с нетипичными арифметическими свойствами.

Допустим противное, т.е., что предел $\mathcal{L}(\alpha) = \lim\limits_{\lambda\to\infty} \frac{I_\lambda(\alpha)}{\log^2\lambda}$ существует. Пусть q – знаменатель (достаточно большой), для которого $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \le \frac{1}{q^M}$. Можно считать, что p и q взаимно просты. В §3 было показано, что $\left|I_\lambda(\alpha) - I_\lambda\left(\frac{p}{q}\right)\right| \le C\log\lambda$ для всех $q \le \lambda \le q^{M-1}$. Мы будем рассматривать значения λ, для которых $\lambda+1$ делится на q (т.е. $\lambda = \ell q - 1$, $2 \le \ell \le q^{M-2}$). Существование предела $\mathcal{L}(\alpha)$ влечет, в частности, что $I_{\ell q-1}(\alpha) = \mathcal{L}(\alpha)(\log\ell + \log q)^2 + o(\log^2 q)$ при $q \to +\infty$ (M фиксировано!). С другой стороны, мы покажем, что

$$I_{\ell q-1}\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{4}{\pi^3}\log q\log\ell + \mathrm{const}(q) + o(\log^2 q),$$

т.е. главная часть - линейная функция от $\log\ell$. Так как интервал возможных значений $\log\ell$ имеет длину, сравнимую с $\log q$, то это немедленно дает требуемое противоречие.

Запишем снова

$$\sum_{0\le v\le \ell q-1}\left\{\frac{p}{q}v\right\}e^{2\pi i v t} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi}(k)D_{\ell q-1}\left(t + k\frac{p}{q}\right).$$

Отметим, что для $0 < |k| \le \frac{q}{2}$ справедливо неравенство $\left|\widehat{\varphi}(k) - \frac{1}{2\pi i k}\right| \le \frac{C}{q}$. Поэтому, заменив последний ряд на

$$\sum_{\substack{-q/2<k\le q/2\\ k\ne 0}}\frac{1}{2\pi i k}D_{\ell q-1}\left(t + k\frac{p}{q}\right),$$

мы будем иметь погрешность, L^1-норма которой не превосходит величины

$$\left(|\widehat{\varphi}(0)| + \sum_{0<|k|\le q/2}\left|\widehat{\varphi}(k) - \frac{1}{2\pi i k}\right| + \sum_{|k|\ge q/2}|\widehat{\varphi}(k)|\right)\int_0^1 |D_{\ell q-1}(t)|\,dt = O(\log q).$$

Последнее соотношение немедленно следует из оценок коэффициентов Фурье функции φ. Заметим также, что $D_{\ell q-1}(t) = \frac{e^{2\pi i\ell qt}-1}{e^{2\pi it}-1}$, и, следовательно, обозначив $F(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{e^{2\pi it}-1}$, мы можем записать последнюю сумму ядер Дирихле в виде

$$(e^{2\pi i\ell qt}-1)\sum_{\substack{-q/2<k\le q/2\\ k\ne 0}}\frac{1}{2\pi ik}F\Big(t+k\frac{p}{q}\Big).$$

Пусть $f(t)$ – 1-периодическая функция, определенная на интервалах

$$\Delta_j \stackrel{\text{def}}{=} \Big(\frac{j}{q}-\frac{1}{2q},\frac{j}{q}+\frac{1}{2q}\Big)$$

равенством

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi it} & \text{при } j=0,\\ F(j/q) & \text{при } j=1,\dots,q-1.\end{cases}$$

Легко проверить, что $\int_0^1 |F(t)-f(t)|\,dt$ не превосходит, скажем, 10. Поэтому мы можем заменить $F(t)$ на $f(t)$, и L^1-норма соответствующей разности будет не больше, чем $20\sum\limits_{0<|k|\le q/2}\frac{1}{2\pi|k|}=O(\log q)$. Отсюда мы имеем

$$\begin{aligned}I_{\ell q-1}\Big(\frac{p}{q}\Big) &= \int_0^1 |e^{2\pi i\ell qt}-1|\Big|\sum_{\substack{-\frac{q}{2}<k\le\frac{q}{2}\\ k\ne 0}}\frac{f(t+k\frac{p}{q})}{2\pi ik}\Big|\,dt+O(\log q)\\ &=\sum_{j=0}^{q-1}\int_{\Delta_j}\cdots+O(\log q).\end{aligned}$$

Рассмотрим каждый интервал Δ_j по отдельности. Подставив $\beta=qt-j$, получим

$$\int_{\Delta_j}\cdots=\int_{-1/2}^{1/2}|e^{2\pi i\ell\beta}-1|\Big|\sum_{\substack{-\frac{q}{2}<k\le\frac{q}{2}\\ k\ne 0}}\frac{1}{2\pi iqk}f\Big(\frac{\beta+j+kp}{q}\Big)\Big|\,d\beta.$$

Заметим, что функция $f\big(\frac{\beta+j+kp}{q}\big)$ постоянна на $[-1/2,1/2]$, если $j+kp\ne 0$ $(\mathrm{mod}\ q)$. При $j=0$ это верно для всех слагаемых, т.е. сумма (обозначим ее b_0)

не зависит от β. Для $j \neq 0$ обозначим k_j решение сравнения $j + kp = 0 \pmod q$), лежащее между $-\frac{q}{2}$ и $\frac{q}{2}$ (оно единственно, так как p и q взаимно просты). Тогда

$$\frac{1}{2\pi i q k_j} f\Big(\frac{\beta + j + k_j p}{q}\Big) = \frac{1}{2\pi i q k_j} f\Big(\frac{\beta}{q}\Big) = -\frac{1}{4\pi^2 k_j}\frac{1}{\beta},$$

а сумма остальных слагаемых (обозначим ее b_j) зависит лишь от j и q, но не от ℓ и β. Так как $|e^{2\pi i \ell\beta} - 1|$ — четная функция от β, то при $j = 1, ..., q-1$ имеем

$$\int\limits_{\Delta_j} \cdots = \int\limits_{-1/2}^{1/2} |e^{2\pi i\ell\beta} - 1| \Big| -\frac{1}{4\pi^2 k_j \beta} + b_j \Big| d\beta \geq \int\limits_{-1/2}^{1/2} |b_j||e^{2\pi i\ell\beta} - 1|\, d\beta = \frac{4}{\pi}|b_j|.$$

При $j = 0$, очевидно, будет равенство. Следовательно,

$$\sum_{j=0}^{q-1} |b_j| \leq \frac{\pi}{4} I_{\ell q-1}\Big(\frac{p}{q}\Big) + O(\log q) \leq C \log^2 q$$

(это можно проверить также прямым вычислением b_j).

Так как $|x+y|$ и $|x| + |y|$ различаются не более чем на $2\min(|x|, |y|)$, то

$$\int\limits_{\Delta_j} \ldots = \int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{4\pi^2 |k_j|} \frac{|e^{2\pi i\ell\beta} - 1|}{|\beta|}\, d\beta$$

$$+ \int\limits_{-1/2}^{1/2} |b_j||e^{2\pi i\ell\beta} - 1|\, d\beta + O\Big(\int\limits_{-1/2}^{1/2} \min\Big(\frac{1}{|k_j||\beta|}, |b_j|\Big)\, d\beta \Big).$$

Первое слагаемое равно $\frac{1}{|k_j|}\big(\frac{2}{\pi^3} \log \ell + O(1)\big)$, второе - $\frac{4}{\pi}|b_j|$ и последнее -

$$\int\limits_{-1/2}^{1/2} \min\Big(\frac{1}{|k_j||\beta|}, |b_j|\Big) d\beta \leq \int\limits_{-1}^{1} \cdots = \frac{2}{|k_j|}\big(1 + \log^+(|k_j||b_j|)\big).$$

Отметим, что, когда j меняется от 1 до $q-1$, k_j принимает все значения между $-q/2$ и $q/2$, кроме 0, и поэтому

$$I_{\ell q-1}\Big(\frac{p}{q}\Big) = \frac{2\log \ell}{\pi^3} \sum_{0<|k|\leq q/2} \frac{1}{|k|} + \frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{q-1} |b_j| + O(\log q) + O\Big(\sum_{j=1}^{q-1} \frac{\log^+(|k_j||b_j|)}{|k_j|}\Big)$$

$$= \frac{4}{\pi^3} \log q \log \ell + \mathrm{const}(q) + O(\log q) + O\Big(\sum_{j=1}^{q-1} \frac{\log^+(|k_j||b_j|)}{|k_j|}\Big)$$

(так как $\log \ell \le (M-2)\log q$). Поэтому для доказательства обещанной линейности достаточно показать, что $\sum\limits_{j=1}^{q-1} \frac{1}{|k_j|}\log^+(|k_j||b_j|)$ существенно меньше, чем $\log^2 q$.

Используя неравенство $\log^+ x \le \varepsilon x + \log 1/\varepsilon$, получаем, что эта сумма не больше, чем

$$\varepsilon\sum_{j=1}^{q-1}|b_j| + \log 1/\varepsilon \sum_{j=1}^{q-1}\frac{1}{|k_j|} \le C(\varepsilon \log^2 q + \log 1/\varepsilon \log q)$$

для любого $\varepsilon \in (0,1)$. Полагая $\varepsilon = \frac{1}{\log q}$, получаем оценку порядка $\log q \log\log q$, завершающую доказательство 3).

§6. Что делать с произвольным многоугольником

Рассмотрим произвольный замкнутый многоугольник $W \subset \mathbb{R}^2$ и выберем некоторую горизонтальную прямую $y = n_0 \in \mathbb{Z}$, лежащую ниже него. Каждой его невертикальной стороне $\Gamma = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ y = \alpha x + \nu\}$ сопоставим трапецию $T(\Gamma) \overset{\text{def}}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\le x\le b,\ n_0 \le y \le \alpha x + \nu\}$. Ясно, что

$$\chi_W = \sum_\Gamma \varepsilon(\Gamma)\chi_{T(\Gamma)} + \sum_{\Gamma:\varepsilon(\Gamma)=-1}\chi_\Gamma$$

(χ_E - характеристическая функция множества E; $\varepsilon(\Gamma) = \pm 1$ в зависимости от того, лежат ли W и $T(\Gamma)$ по одну сторону от Γ или нет; и наконец, последнее слагаемое $\sum\limits_{\Gamma:\varepsilon(\Gamma)=-1}\chi_\Gamma$ возникает из наших предположений о замкнутости W и $T(\Gamma)$).

Тогда

$$\mathcal{D}_\lambda W = \sum_\Gamma \varepsilon(\Gamma)\mathcal{D}_\lambda T(\Gamma) + \sum_{\varepsilon(\Gamma)=-1}\mathcal{D}_\lambda\Gamma, \qquad \widetilde{\mathcal{D}}_\lambda W = \sum_\Gamma \varepsilon(\Gamma)\widetilde{\mathcal{D}}_\lambda T(\Gamma).$$

Ядра $\mathcal{D}_\lambda\Gamma$ - это, по существу, одномерные ядра Дирихле порядка не больше λ, и их вкладом можно пренебречь. Повтор рассуждений, использованных в §1, дает

$$\mathcal{D}_\lambda T(\Gamma) = \widetilde{\mathcal{D}}_\lambda T(\Gamma) - e^{2\pi i \nu_\Gamma \lambda s}\sum_{a_\Gamma\lambda\le m\le b_\Gamma\lambda}\{\alpha_\Gamma m + \lambda\nu_\Gamma\}e^{2\pi i m(t+\alpha_\Gamma s)}$$
$$+ \text{„малое слагаемое“}.$$

Суммируя по всем Γ, получаем аналог равенства (**) из §1

$$\mathcal{D}_\lambda W = \widetilde{\mathcal{D}}_\lambda W - \sum_\Gamma \varepsilon(\Gamma) e^{2\pi i \nu_\Gamma \lambda s} \sum_{a_\Gamma \lambda \le m \le b_\Gamma \lambda} \{\alpha_\Gamma m + \lambda \nu_\Gamma\} e^{2\pi i m (t+\alpha_\Gamma s)}$$
$$+ \text{„малое слагаемое“}.$$

Легко проверить, что все результаты §2 справедливы для более общих сумм $\sum\limits_{a\lambda \le v \le b\lambda} \{\alpha v + \theta\} e^{2\pi i v t}$. Единственное различие состоит в том, что когда мы будем заменять $\{\alpha v + \theta\}$ на $\left\{\frac{p}{q} v + \theta\right\} + \gamma v$, мы вместо одного получим несколько (не более чем $1 + |a| + |b|$) ядер Дирихле в погрешности, и равенство $\left\{\frac{p}{q} v + \theta\right\} = \varphi\left(\frac{p}{q} v + \theta\right)$ не выполняется в точности, а дает погрешность, равную ядру Дирихле.

Следовательно, мы снова можем отделить вклад $\widetilde{\mathcal{D}}_\lambda W$ в L_λ от вклада дробных долей $\sum\limits_\Gamma \dots$ Свойство 4) вместе с простым замечанием, что для всякой 1-периодичной функции g и всякого измеримого множества $E \subset (0,1)$ справедливо неравенство

$$\int_{-1/2}^{1/2} \Big(\int_{E-\alpha' s} |g(t + \alpha'' s)|\, dt \Big)\, ds \le \frac{1 + |\alpha' - \alpha''|}{|\alpha' - \alpha''|} \mu(E) \int_0^1 |g(t)|\, dt,$$

позволяет также разделить и вклады сторон с разными наклонами.

Итак, мы имеем

$$L_\lambda = \iint_{[-1/2,1/2]^2} |\widetilde{\mathcal{D}}_\lambda W(t,s)|\, dt\, ds$$
$$+ \sum_\alpha \iint_{[-1/2,1/2]^2} \Big| \sum_{\Gamma : \alpha_\Gamma = \alpha} \varepsilon(\Gamma) e^{2\pi i \nu_\Gamma \lambda s} \sum_{a_\Gamma \lambda \le m \le b_\Gamma \lambda} \{\alpha m + \lambda \nu_\Gamma\} e^{2\pi i m (t + \alpha s)} \Big|\, dt\, ds$$
$$+ o(\log^2 \lambda).$$

Заметим, что то же самое верно, если заменить интегрирование по $[-1/2, 1/2]^2$ на интегрирование по $\Delta_1 \times \Delta_2$, где Δ_1 и Δ_2 – некоторые интервалы (конечно, с $\iint_{\Delta_1 \times \Delta_2} |\mathcal{D}_\lambda W(t,s)|\, dt\, ds$ вместо L_λ в левой части равенства).

Рассмотрим теперь одну группу параллельных сторон (скажем, с наклоном α). Очевидно, мы можем заменить $t + \alpha s$ на новую переменную, которую будем обозначать той же буквой t. Единственная сложность при возвращении к старым переменным t и s, состоит в том, что свойство „равнораспределенности“

$$\iint\limits_{\Delta_1\times\Delta_2} \dots = \mu(\Delta_1 \times \Delta_2) \iint\limits_{[-1/2,1/2]^2} \dots + o(\log^2 \lambda)$$

в новых переменных влечет такое же свойство в старых переменных для наклонного параллелограмма вместо прямоугольника. Но если это свойство верно для любого параллелограмма с фиксированным наклоном сторон, то оно справедливо и для любого множества, измеримого по Жордану. Теперь мы исследуем сумму

$$\sum_{\Gamma:\alpha_\Gamma=\alpha} \varepsilon(\Gamma) e^{2\pi i\nu_\Gamma \lambda s} f_{\Gamma,\lambda}(t), \text{ где } f_{\Gamma,\lambda}(t) = \sum_{a_\Gamma\lambda\le m\le b_\Gamma\lambda} \{\alpha m + \lambda\nu_\Gamma\} e^{2\pi i m t}.$$

Нам потребуется следующий простой факт из теории почти периодических функций.

Лемма. *Зафиксируем некоторое множество вещественных показателей $\nu_1, \dots, \nu_\ell$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $T_0 = T_0(\varepsilon; \nu_1, \dots, \nu_\ell) > 0$, что для любого экспоненциального полинома $g(s) = \sum_{j=1}^{\ell} c_j e^{2\pi i\nu_j s}$ и любого интервала $\Delta \subset \mathbb{R}$, длины больше, чем T_0, справедливо неравенство*

$$\left|\frac{1}{\mu(\Delta)} \int\limits_\Delta |g(s)|\, ds - \mathcal{M}(|g|)\right| \le \varepsilon \sum_{j=1}^{\ell} |c_j|,$$

где

$$\mathcal{M}(|g|) \overset{\text{def}}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} |g(s)|\, ds \text{ – инвариантное среднее функции } |g| \text{ на } \mathbb{R}.$$

Доказательство (хорошо известное, конечно). Без потери общности можно считать, что $\sum_{j=1}^{\ell} |c_j| = 1$, и, следовательно, $|g(s)| \le 1$ на $\mathbb{R}$. Существование инвариантного среднего и аналога требуемого неравенства очевидно для $|g(s)|^2, |g(s)|^4, \dots$ вместо $|g(s)|$ просто из-за того, что они являются экспоненциальными полиномами с фиксированным множеством показателей и ограниченными коэффициентами. Остается только заметить, что $|x|$ может быть равномерно приближена на $[-1,1]$ конечными линейными комбинациями степеней $|x|^2, |x|^4, \ldots$

Так как g определяется своими коэффициентами, то мы можем обозначить $\mathcal{M}(|g|)$ также через $\mathcal{M}(c_1, \ldots, c_\ell)$. Из предыдущего немедленно следует, что для любого интервала $\Delta_2 \subset \mathbb{R}$

$$\int\limits_{\Delta_2} \Bigl| \sum_{\Gamma:\alpha_\Gamma=\alpha} e^{2\pi i \nu_\Gamma \lambda s} \ \varepsilon(\Gamma) f_{\Gamma,\lambda}(t) \Bigr| \, ds = \mu(\Delta_2) \mathcal{M}\bigl(\{f_{\Gamma,\lambda}(t)\}\bigr) + o\Bigl(\sum_\Gamma |f_{\Gamma,\lambda}(t)|\Bigr)$$

при $\lambda \to \infty$ ($\mathcal{M}$ соответствует множеству показателей $\{\nu_\Gamma\}_{\Gamma:\alpha_\Gamma=\alpha}$; $\{\ldots\}$ здесь обозначение множества, а не дробной части, конечно). Тогда

$$\iint\limits_{\Delta_1\times\Delta_2} \Bigl| \sum_{\Gamma:\alpha_\Gamma=\alpha} e^{2\pi i \nu_\Gamma \lambda s} \varepsilon(\Gamma) f_{\Gamma,\lambda}(t) \Bigr| \, dt\, ds = \mu(\Delta_2) \int\limits_{\Delta_1} \mathcal{M}\bigl(\{f_{\Gamma,\lambda}(t)\}\bigr)\, dt + o(\log^2 \lambda),$$

так как (это отмечалось ранее)

$$\int\limits_0^1 |f_{\Gamma,\lambda}(t)|\, dt = O(\log^2 \lambda).$$

Снова пользуясь (см. конец § 3) абсолютной сходимостью ряда Фурье функции $\{u\}(e^{2\pi i u} - 1)$, мы получаем, что

$$\int\limits_0^1 \bigl| f_{\Gamma,\lambda}(t+\alpha) - e^{-2\pi i \nu_\Gamma \lambda} \ f_{\Gamma,\lambda}(t) \bigr| \, dt \le C \log \lambda.$$

Отсюда следует требуемое свойство равнораспределенности:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Delta_1+\alpha} \mathcal{M}\bigl(\{f_{\Gamma,\lambda}(t)\}\bigr)\, dt + O(\log \lambda) \\
&\qquad = \int\limits_{\Delta_1} \mathcal{M}\bigl(\{e^{-2\pi i \nu_\Gamma \lambda} \ f_{\Gamma,\lambda}(t)\}\bigr)\, dt \\
&\qquad = \int\limits_{\Delta_1} \mathcal{M}\bigl(\{f_{\Gamma,\lambda}(t)\}\bigr)\, dt.
\end{aligned}$$

Чтобы доказать хороший аналог предложения 1, удобнее сохранить обе переменные s и t, не заменяя интеграл по s соответствующим инвариантным средним. Мы снова используем приближение

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi}(k)e^{2\pi i\nu_\Gamma\lambda k}\sum_{a_\Gamma\lambda\le m\le b_\Gamma\lambda}e^{2\pi i m(t+k\alpha)}$$

для $f_{\Gamma,\lambda}(t)$, и, следовательно, аппроксимацию

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi}(k)\sum_{\Gamma:\alpha_\Gamma=\alpha}\varepsilon(\Gamma)e^{2\pi i\nu_\Gamma\lambda(s+k)}\sum_{a_\Gamma\lambda\le m\le b_\Gamma\lambda}e^{2\pi i m(t+k\alpha)}$$

для вклада дробных долей, порожденных сторонами с наклоном α. Для изучения этой суммы выберем некоторое целое $\ell\in\left(\frac{\lambda}{\log\lambda},\frac{2\lambda}{\log\lambda}\right)$ и разобьем интервал $(-1/2,1/2)$ на $2\ell+1$ подынтервал

$$\Delta_j\stackrel{\text{def}}{=}\left\{t:\left|t-\frac{j}{2\ell+1}\right|<\frac{1}{4\ell+2}\right\},\quad j=-\ell,\dots,\ell.$$

Определим функцию

$$F\colon\left(-\frac12,\frac12\right)\to\mathbb{C}$$

равенством

$$F(t)=\begin{cases}0, & t\in\Delta_0,\\ \dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{2\ell+1}{j}, & t\in\Delta_j,\ j\ne0\end{cases}$$

(конкретное выражение для функции $F(t)$ не имеет значения, важно лишь, что она приближает знаменатель $\frac{1}{e^{2\pi i t}-1}$ ядра Дирихле в „L^1-смысле“ и постоянна на интервалах, длины существенно больше, чем $1/\lambda$). Обозначим через $D_\lambda(t,s)$ 1-периодическое продолжение (по t, но не по s) функции

$$F(t)\sum_\Gamma\varepsilon(\Gamma)e^{2\pi i\nu_\Gamma\lambda s}\left(e^{2\pi i b_\Gamma\lambda t}-e^{2\pi i a_\Gamma\lambda t}\right)$$

(определенной первоначально на $(-1/2,1/2)\times\mathbb{R}$).

Легко проверить, что изучаемая нами сумма может быть заменена на

$\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(k) D_\lambda(t+\alpha k, s+k)$ с ошибкой по L^1-норме, не превосходящей $\log\lambda \log\log\lambda$. Заметим, что для любого частичного интервала Δ_j и для каждого $k \in \mathbb{Z}$ мы имеем (при $\lambda \to +\infty$)

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Delta_j\times[-1/2,1/2]} |D_\lambda(t,s+k)|\,dt\,ds \\
&\quad = \left|F\Big(\frac{j}{2\ell+1}\Big)\right| \iint\limits_{\Delta_j\times([-1/2,1/2]+k)} \left|\sum_\Gamma \varepsilon(\Gamma) e^{2\pi i\nu_\Gamma \lambda s}\big(e^{2\pi i b_\Gamma \lambda t} - e^{2\pi i a_\Gamma \lambda t}\big)\right| dt\,ds \\
&\quad = \mu(\Delta_j)\left|F\Big(\frac{j}{2\ell+1}\Big)\right| (\mathcal{M}_\alpha + o(1)) \\
&\quad = (\mathcal{M}_\alpha + o(1)) \int\limits_{\Delta_j} |F(t)|\,dt,
\end{aligned}$$

где $\mathcal{M}_\alpha$ - инвариантное среднее экспоненциального полинома (двух переменных)

$$\mathcal{G}_\alpha(t,s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\Gamma:\alpha_\Gamma=\alpha} \varepsilon(\Gamma)\; e^{2\pi i\nu_\Gamma s}\big(e^{2\pi i b_\Gamma t} - e^{2\pi i a_\Gamma t}\big),$$

т.е.

$$\mathcal{M}_\alpha = \lim_{T_1,T_2\to\infty} \frac{1}{4T_1T_2} \iint\limits_{[-T_1,T_1]\times[-T_2,T_2]} |\mathcal{G}_\alpha(t,s)|\,dt\,ds$$

(существование $\mathcal{M}_\alpha$ и использованное свойство равномерной сходимости могут быть доказаны в двумерном случае буквальным повтором рассуждений, проведенных в одномерном случае).

Отсюда немедленно следует, что для всех $\xi \geq \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$

$$\iint\limits_{[-\xi,\xi]\times[-1/2,1/2]} |D_\lambda(t,s+k)|\,dt\,ds = (\mathcal{M}_\alpha + o(1))\frac{1}{\pi}\log\lambda\xi.$$

Вместе с очевидной оценкой $|D_\lambda(t,s+k)| \leq \frac{C}{|t|}$ $(-1/2 \leq t \leq 1/2)$ это позволяет вывести все заключения §3–5 и получить аналог Предложения 1, в котором абсолютные константы заменены на „абсолютные множители $\mathcal{M}_\alpha$" (т.е. $c\mathcal{M}_\alpha$ вместо c).

С другой стороны, можно разделить вклады сторон с разными наклонами в асимптотику $\iint_{[-1/2,1/2]^2} |\widetilde{D}_\lambda(t,s)|\,dt\,ds$, причем вклад сторон с наклоном α равен как раз $\frac{1}{2\pi^2}(\mathcal{M}_\alpha + o(1))\log^2\lambda$.

Поэтому интерференция вкладов различных параллельных сторон в „ограниченное слагаемое" в основном такая же, как интерференция их вкладов в „интегральное слагаемое" $\iint\limits_{[-1/2,1/2]} |\widetilde{\mathcal{D}}_\lambda W(t,s)|\,dt\,ds$ и (после собирания всех полученных результатов вместе и простых переформулировок), мы получаем следующее

Предложение 2. *Пусть W произвольный многоугольник с наклонами сторон $\alpha_1,\dots,\alpha_d$ (для вертикальных сторон мы полагаем $\alpha=\infty\in\mathbb{Q}$). Тогда*

I.

$$\iint\limits_{[-1/2,1/2]^2} |\widetilde{\mathcal{D}}_\lambda W(t,s)|\,dt\,ds = \frac{1}{2\pi^2}\Big(\sum_{j=1}^d \mathcal{M}_{\alpha_j}+o(1)\Big)\ \log^2\lambda \quad (\lambda\to\infty).$$

II.

$$L_\lambda = \iint\limits_{[-1/2,1/2]^2} |\widetilde{\mathcal{D}}_\lambda W(t,s)|\,dt\,ds + \sum_{j=1}^d \mathcal{M}_{\alpha_j}\ \widetilde{I}_\lambda(\alpha_j)+o(\log^2\lambda),$$

где

$$\widetilde{I}_\lambda(\alpha_j) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\mathcal{M}_{\alpha_j}}\iint\limits_{[-1/2,1/2]^2}\Big|\sum_{\Gamma:\alpha_\Gamma=\alpha_j}\varepsilon(\Gamma)e^{2\pi i\nu_\Gamma\lambda s}\sum_{a_\Gamma\lambda\le m\le b_\Gamma\lambda}\{\alpha m+\lambda\nu_\Gamma\}e^{2\pi imt}\Big|\,dt\,ds$$

удовлетворяет 1)–3) *и двумерному аналогу* 4).

III.

$$\varlimsup_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\log^2\lambda}\Big(L_\lambda - \iint\limits_{[-1/2,1/2]^2}|\widetilde{\mathcal{D}}_\lambda W(t,s)|\,dt\,ds\Big)>0,$$

если не все α_j рациональны.

IV.

$$\varliminf_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\log^2\lambda}\Big(L_\lambda - \iint\limits_{[-1/2,1/2]^2}|\widetilde{\mathcal{D}}_\lambda W(t,s)|\,dt\,ds\Big)=0$$

тогда и только тогда, когда $\alpha_1,\dots,\alpha_d$ могут быть одновременно хорошо приближены дробями, точнее, если для любого $M>0$ существуют такие $q\in\mathbb{N}$ и $p_1,\dots,p_d\in\mathbb{Z}$, что $\left|\alpha_j-\frac{p_j}{q}\right|\le\frac{1}{q^M}$ для всех $j=1,\dots,d$ (разумеется, $q\ge2$).

В частности, мы получаем, что для больших $\lambda \geq \lambda_0(W)$

$$c \iint\limits_{[-1/2,1/2]^2} |\widetilde{\mathcal{D}}_{\lambda W}(t,s)|\,dt\,ds \leq \iint\limits_{[-1/2,1/2]^2} |\mathcal{D}_{\lambda W}(t,s)|\,dt\,ds$$

$$\leq C \left(\iint\limits_{[-1/2,1/2]^2} |\widetilde{\mathcal{D}}_{\lambda W}(t,s)|\,dt\,ds\right)^2$$

с некоторыми абсолютными константами c и C.

Заключительные замечания

Затронутые в этой работе вопросы вызваны более общей задачей - выяснить, как связаны между собой ядро Дирихле $\mathcal{D}_{\lambda W}$ и его непрерывный аналог $\widetilde{\mathcal{D}}_{\lambda W}$. У нас нет сомнений в том,что теми же рассуждениями можно получить аналоги Предложений 1 и 2 в случае большего числа переменных, но слишком громоздкие выкладки отбивают всякую охоту этим заниматься. В то же время для других областей W (не обязательно в $\mathbb{R}^2$) остается немало интересных, но не решенных вопросов. В частности, для каких выпуклых областей $W \subset \mathbb{R}^l$ L^1–нормы этих ядер $\mathcal{D}_{\lambda W}$ и $\widetilde{\mathcal{D}}_{\lambda W}$ имеют одинаковый порядок роста при $\lambda \to \infty$? Известно [7], что это так, если граница W достаточно гладкая и невырождена (ее радиус кривизны всюду положителен). В этом случае указанные нормы растут как $\lambda^{\frac{l-1}{2}}$. В двумерном случае требования на границу можно сильно ослабить[8]. Таким образом, несколько упрощая ситуацию, можно сказать, что ядра $\mathcal{D}_{\lambda W}$ и $\widetilde{\mathcal{D}}_{\lambda W}$ имеют одинаковый порядок роста (в L^1–смысле) в крайних случаях - когда эта скорость роста минимальная ($\asymp \log^l \lambda$) или максимальная ($\asymp \lambda^{\frac{l-1}{2}}$). Мы не знаем, какова ситуация для областей W, дающих промежуточную скорость роста констант Лебега. Что же касается асимптотики величин L_λ, то нам неизвестны результаты, относящиеся к областям W, отличным от многоугольника. Интересные результаты о шаровых суммах Фурье имеются в работах К. И. Бабенко [9, 10].

Наконец, отметим два вопроса, которые нас интересуют, но ответы на которые нам неизвестны.

Было бы очень интересно узнать, равны ли числа ω и Ω, существование которых установлено в Предложении 1. Их равенство означало бы, что для почти всех $\alpha > 0$ константы Лебега, соответствующие треугольнику W_α, удовлетворяют асимптотическому соотношению $L_\lambda \sim \mathrm{const}\log^2\lambda$ при $\lambda \to \infty$.

Другой вопрос связан с простым следствием из Предложения 2:

$$\varlimsup_{\lambda\to\infty} \frac{\iint\limits_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^2} \Big| \iint\limits_{\lambda W} e^{2\pi i(mt+ns)}\,dm\,dn \Big|\,dt\,ds}{\iint\limits_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^2} \Big| \sum\limits_{(m,n)\in\lambda W} e^{2\pi i(mt+ns)} \Big|\,dt\,ds} \leqslant 1.$$

Сколь типично это неравенство для других областей W?

Список литературы

[1] Fefferman C., *On the convergence of multiple Fourier series*, Bull. Amer. Math. Soc. **77** (1971), no. 5, 744–745.

[2] Юдин В. А., *Оценка снизу констант Лебега*, Мат. заметки **25** (1979), № 1, 119–122.

[3] Подкорытов А. Н., *Порядок роста констант Лебега сумм Фурье по полиэдру*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астроном. **1982**, вып. 2, 110–111.

[4] Байбородов С. П., *Константы Лебега многогранников*, Мат. заметки **32** (1982), № 6, 817–822.

[5] Скопина М. А., *Константы Лебега кратных сумм Валле-Пуссена по многогранникам*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **125** (1983), 154–165.

[6] Подкорытов А. Н., *Об асимптотике ядра Дирихле сумм Фурье по многоугольнику*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **149** (1986), 142–149.

[7] Carenini M., Soardi P., *Sharp estimates for Lebesgue constants*, Proc. Amer. Math. Soc. **89** (1983), 449–452.

[8] Гутиеррес Гонсалес Э., *Оценка снизу двумерных констант Лебега*, Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1 **1993**, вып. 2, 119–121.

[9] Бабенко К. И., *О сходимости в среднем кратных рядов Фурье и асимптотике ядра Дирихле сферических средних*, Препринт №52, Ин-т прикл. мат. АН СССР, М., 1971, 70 с.

[10] Бабенко К. И., *Об асимптотике ядра Дирихле сферических средних кратных рядов Фурье*, Докл. АН СССР **243** (1978), № 5, 1097–1100.

С.-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра математического анализа
198904, С.-Петербург, Ст. Петергоф
Библиотечная пл., д. 2

Поступило 30 декабря 1994 г.