Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Н. К. Смоленцев, О группе диффеоморфизмов, оставляющих неподвижным векторное поле, *Сиб. матем. журн.*, 1984, том 25, номер 2, 180–185

https://www.mathnet.ru/smj6838

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.87
12 июля 2025 г., 13:03:57

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XXV, № 2 МАРТ — АПРЕЛЬ 1984

УДК 513.83

Н. К. СМОЛЕНЦЕВ

О ГРУППЕ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ, ОСТАВЛЯЮЩИХ НЕПОДВИЖНЫМ ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ

Рассматривается гладкое (класса C^∞) компактное многообразие M без границы. Обозначим $\mathscr{D}$ группу гладких диффеоморфизмов многообразия M. На группе $\mathscr{D}$ Лесли ввел дифференцируемую структуру класса C^∞ так, что групповые операции получились класса C^∞. В качестве векторного пространства, на котором моделируется многообразие $\mathscr{D}$, берется пространство Г(TM) гладких векторных полей на M с C^∞-топологией. Пространство Г(TM) является пространством Фреше, поэтому группа $\mathscr{D}$ называется группой Ли Фреше.

В пространствах Фреше основные теоремы дифференциального исчисления, такие как теорема об обратной функции и теорема Фробениуса, не верны. Это обстоятельство сильно затрудняет изучение группы диффеоморфизмов $\mathscr{D}$. Для получения содержательных теорем нужна более сильная структура на $\mathscr{D}$, чем просто группа Ли Фреше. Такую структуру предложил Омори [1], она называется структурой ILH-группы Ли. Многообразие $\mathscr{D}$ представлено как обратный предел гладких гильбертовых многообразий, каждое из которых является топологической группой. Различие дифференцируемых структур Лесли и Омори обусловлено разными способами дифференцирования в пространстве Г(TM).

Дадим точные определения.

1. Топологическое векторное пространство E называется ILH-*пространством*, если E есть обратный предел гильбертовых пространств $\{E_s,\ s=1,\ 2,\ \ldots\}$, таких, что $E_l \subset E_s$, если $l \geqslant s$, и это включение есть ограниченный линейный оператор. Будем обозначать $E = \varprojlim E_s$.

2. Топологическое пространство X называется C^k-ILH-*многообразием*, *моделируемым на* E, если

a) X есть обратный предел C^k-гильбертовых многообразий X_s, моделируемых на E_s, при $l \geqslant s$, $X_l \subset X_s$;

b) для любой точки $x \in X$ существуют открытые окрестности $U_s(x)$ точки x в X_s и гомеоморфизмы ψ_s окрестностей $U_s(x)$ на открытые подмножества $V_s \subset E_s$, которые задают C^k-координаты на каждом X_s в окрестности точки x, и такие, что $U_l(x) \subset U_s(x)$ при $l \geqslant s$, $\psi_{s+1}(y) = \psi_s(y)$ для любой точки $y \in U_{s+1}(x)$.

3. Пусть X, Y — C^k-ILH-многообразия. Отображение $\varphi : X \to Y$ называется C^k-ILH-*дифференцируемым*, если φ есть обратный предел C^k-дифференцируемых отображений, т. е. для любого s существует $l(s)$ и C^k-отображение $\varphi_s : X_{l(s)} \to Y_s$ такое, что $\varphi_s(x) = \varphi_{s+1}(x)$ $\forall x \in X_{l(s+1)}$ и $\varphi = \varprojlim \varphi_s$.

Омори показал [1], что группа $\mathscr{D}$ гладких диффеоморфизмов компактного многообразия является ILH-группой Ли, т. е. $\mathscr{D}$ является C^∞-ILH-многообразием и групповые операции тоже C^∞-ILH-гладкие. В качестве модельного пространства берется пространство Г(TM) гладких векторных полей на M. Оно является обратным пределом гильбертовых пространств $\Gamma^s(TM)$ векторных полей соболевского класса H^s, $s \in \mathbb{Z}$,

$s \geqslant 0$. Таким образом, $\Gamma(TM)$ — алгебра Ли группы $\mathcal{D}$, причем скобка Ли — это обычная скобка Ли векторных полей на M.

Для группы $\mathcal{D}$ существует система $\mathcal{D}^s$, $s \geqslant \dim M + 5$, топологических групп, обладающая свойствами:

1. Каждая группа $\mathcal{D}^s$ есть гладкое гильбертово многообразие, моделируемое на $\Gamma^s(TM)$.

2. Группа $\mathcal{D}^{s+1}$ есть плотная подгруппа в $\mathcal{D}^s$ и включение $\mathcal{D}^{s+1} \subset \subset \mathcal{D}^s$ класса C^∞.

3. $\mathcal{D} = \cap \mathcal{D}^s$ с топологией обратного предела.

4. Групповое умножение $\mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ можно продолжить до C^l-отображения $\mathcal{D}^{s+l} \times \mathcal{D}^s \to \mathcal{D}^s$.

5. Отображение $\mathcal{D} \to \mathcal{D}$, $g \to g^{-1}$, можно продолжить до C^l-отображения $\mathcal{D}^{s+l} \to \mathcal{D}^s$.

6. Для каждого $g \in \mathcal{D}^s$ правый сдвиг $R_g : \mathcal{D}^s \to \mathcal{D}^s$ — гладкое отображение.

7. Отображение $dR : \Gamma^{s+l}(TM) \times \mathcal{D}^s \to T\mathcal{D}^s$, $dR(v, g) = dR_g v$, является класса C^l.

В дальнейшем мы будем иметь дело только с компонентой единицы группы всех гладких диффеоморфизмов и будем обозначать ее тем же символом $\mathcal{D}$.

Пусть ω — дифференциальная форма на многообразии M и $\mathcal{D}_\omega$ — группа диффеоморфизмов, сохраняющих ω:

$$\mathcal{D}_\omega = \{g \in \mathcal{D};\ g^*\omega = \omega\},$$

где g^* — кодифференциал диффеоморфизма $g : M \to M$. Эбин и Марсден показали [2], что если ω — элемент объема на M или симплектическая 2-форма, то $\mathcal{D}_\omega$ является замкнутой ILH-подгруппой Ли группы $\mathcal{D}$. Алгеброй Ли группы $\mathcal{D}_\omega$ является соответственно алгебра Ли бездивергентных либо гамильтоновых векторных полей на M. В дальнейшем мы будем рассматривать группу диффеоморфизмов, сохраняющих риманов элемент объема μ и будем обозначать ее $\mathcal{D}_\mu$.

Перейдем теперь к содержанию данной работы.

Как уже отмечалось, алгебра Ли группы $\mathcal{D}$ есть $\Gamma(TM)$ — алгебра Ли векторных полей. Группа $\mathcal{D}$ действует на $\Gamma(TM)$ с помощью присоединенного представления Ad. Напомним, что если X — векторное поле на M и $g \in \mathcal{D}$, то $\mathrm{Ad}_g X$ есть векторное поле на M, значение которого в точке $x \in M$ есть

$$(\mathrm{Ad}_g X)(x) = dg(X(g^{-1}(x))),$$

где dg — дифференциал диффеоморфизма $g : M \to M$.

Обозначим $\mathcal{D}_X$ группу, состоящую из диффеоморфизмов, оставляющих векторное поле X на месте, т. е. $g \in \mathcal{D}_X$, если $\mathrm{Ad}_g X = X$. Группа $\mathcal{D}_X$ состоит из всех диффеоморфизмов, коммутирующих с потоком на M, порожденным полем X. Формально алгеброй Ли группы $\mathcal{D}_X$ должна быть алгебра $T_e\mathcal{D}_X$ векторных полей V на M, коммутирующих с X, $[X, V] = 0$. Встает естественый вопрос, является ли группа $\mathcal{D}_X$ ILH-группой Ли? Здесь естественно попытаться воспользоваться теоремой Фробениуса [3] и показать, что алгебре Ли $T_e\mathcal{D}_X = \{V \in \Gamma(TM);\ [X, V] = 0\}$ отвечает ILH-группа Ли, она и должна быть группой $\mathcal{D}_X$. Основная трудность, которая при этом возникает,— это доказательство того, что при $s \geqslant \dim M + 5$ пространство H^s-векторных полей, представимых в виде $[X, V]$, где $V \in \Gamma^{s+1}(TM)$, замкнуто в $\Gamma^s(TM)$. Если ограничиться только диффеоморфизмами, сохраняющими элемент объема μ, $\mathcal{D}_{X\mu} = \mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_\mu$, то имеет место

Теорема 1. *Если гладкое векторное поле X на M бездивергентно и нигде не обращается в нуль, то группа $\mathcal{D}_{X\mu} = \mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_\mu$ является замкнутой ILH-подгруппой Ли группы $\mathcal{D}_\mu$. Ее алгебра Ли $T_e\mathcal{D}_{X\mu}$ состоит из бездивергентных векторных полей на M, коммутирующих с X.*

Пусть теперь $G \subset \mathscr{D}$ — ILH-подгруппа и T_eG — ее алгебра Ли. Предположим, что алгебра T_eG имеет инвариантное скалярное произведение $\langle , \rangle$, т. е. такое, что для любых X, Y, $Z \in T_eG$ имеет место равенство $\langle [Z, X], Y\rangle + \langle X, [Z, Y]\rangle = 0$. Оно должно выполняться также в каждом T_eG^s. В этом случае требование невырожденности поля можно убрать.

Теорема 2. *Предположим, что алгебра Ли группы* $G \subset \mathscr{D}$ *имеет невырожденное инвариантное скалярное произведение. Тогда для любого векторного поля* $X \in T_eG$ *группа диффеоморфизмов* $\mathscr{D}_X \cap G$, *оставляющих неподвижным* X, *является* ILH-*подгруппой группы* G.

Приведем примеры групп диффеоморфизмов, алгебры Ли которых имеют невырожденное инвариантное скалярное произведение.

1. Группа $\mathscr{D}_\mu$ диффеоморфизмов, сохраняющих риманов элемент объема μ трехмерного компактного риманова многообразия M, первая группа когомологий которого тривиальна, $H^1(M, \mathbf{R}) = 0$. Тогда, как показано в [4], алгебра Ли $T_e\mathscr{D}_\mu$ имеет биинвариантное скалярное произведение. Для X, $Y \in T_e\mathscr{D}_\mu$ $\langle X, Y\rangle$ определяется формулой

$$\langle Y, Y\rangle = \int_M \langle X(x), (\mathrm{rot}^{-1}Y)(x)\rangle_x \, d\mu(x),$$

где $\langle , \rangle_x$ — риманова метрика на M, rot^{-1} — оператор, обратный к обычному ротору на трехмерном многообразии.

2. Пусть M — многообразие четной размерности $2n$ и ω — симплектическая 2-форма на M. Предполагаем, что $\omega^n = \mu$. Обозначим $\mathscr{H}^\infty$ алгебру Ли глобально гамильтоновых векторных полей на M. Пусть X_F, X_H — гамильтоновы векторные поля на M, соответствующие функциям F, H на M. Определим

$$\langle X_F, X_H\rangle = \int_M F(x)\, H(x)\, d\mu(x).$$

Это скалярное произведение инвариантно, $\langle [X_G. X_F], X_H\rangle + \langle X_F, [X_G, X_H]\rangle = \langle X_{\{G,F\}}, X_H\rangle + \langle X_F, X_{\{G,H\}}\rangle = \int_M (\{G, F\} H + F\{G, H\})(x)\, d\mu(x) =$ $= \int_M X_G(F) H + F X_G(H)\, d\mu = \int_M X_G(F, H)\, d\mu = 0$, здесь мы воспользовались тем, что $\partial M = \varnothing$ и $\mathrm{div}\, X_G = 0$. Скобка $\{G, F\}$ — обычная скобка Пуассона функций на симплектическом многообразии.

Следствие. *Если* $H^1(M, \mathbf{R}) = 0$, *то группа симплектических диффеоморфизмов, оставляющих неподвижным гамильтоново векторное поле* X *на* M, *является* ILH-*подгруппой Ли группы* $\mathscr{D}_\omega$. *Аналогично, если* $H^1(M, \mathbf{R}) = 0$ *и* $\dim M = 3$, *то для любого* $X \in T_e\mathscr{D}_\mu$ *группа* $\mathscr{D}_{X\mu} = \mathscr{D}_X \cap \mathscr{D}_\mu$ *является* ILH-*подгруппой Ли группы* $\mathscr{D}_\mu$.

Доказательства теорем

Предполагается, что M — компактное ориентируемое риманово многообразие без границы, размерности n, μ — риманов элемент объема на M. Пусть $X \in T_e\mathscr{D}_\mu$ — бездивергентное векторное поле на M:

$$\mathscr{D}_{X\mu} = \{g \in \mathscr{D}_\mu;\ \mathrm{Ad}_g X = X\},$$

$$T_e\mathscr{D}_{X\mu} = \{V \in T_e\mathscr{D}_\mu;\ [X, V] = 0\}.$$

Заметим, что алгебра $T_e\mathscr{D}_{X\mu}$ является ядром дифференциального оператора $(\mathrm{ad}\, X, \mathrm{div})$ первого порядка с гладкими коэффициентами:

$$(\mathrm{ad}\, X, \mathrm{div})(V) = (\mathrm{ad}\, X(V), \mathrm{div}\, V) = ([X, V], \mathrm{div}\, V) = 0.$$

Это обстоятельство и будет использовано для доказательства того, что подалгебре $T_e\mathscr{D}_{X\mu} \subset T_e\mathscr{D}_\mu$ соответствует ILH-подгруппа группы $\mathscr{D}$.

Пусть $\Gamma(TM)$ — пространство всех гладких векторных полей на M, $\Gamma^s(TM)$ — пространство векторных полей на M соболевского класса H^s, будем сразу предполагать, что $s \geqslant n+6$. Символом 1_M будем обозначать тривиальное линейное расслоение $M \times \mathbf{R}$ над M. Пусть $\Gamma(TM) \oplus \oplus C^\infty(M, \mathbf{R})$ — пространство гладких сечений расслоения $TM \oplus 1_M$ и $\Gamma^s(TM) \oplus H^s(M, \mathbf{R})$ — пространство H^s-сечений. Для $X \in T_e\mathcal{D}_\mu$ рассмотрим дифференциальный оператор первого порядка с гладкими коэффициентами

$$A_X : \Gamma(TM) \to \Gamma(TM \oplus 1_M) = \Gamma(TM) \oplus C^\infty(M, \mathbf{R}),$$

$$A_X(V) = ([X, V], \operatorname{div} V), \quad V \in \Gamma(TM).$$

Ядро оператора A_X есть $T_e\mathcal{D}_{X\mu}$. Если мы покажем, что для $s \geqslant n+6$ оператор

$$A_X : \Gamma^s(TM) \to \Gamma^{s-1}(TM) \oplus H^{s-1}(M, \mathbf{R})$$

имеет замкнутый образ, тогда согласно результатам [3] в группе $\mathcal{D}_\mu$ будет существовать ILH-подгруппа, алгеброй Ли которой будет $T_e\mathcal{D}_{\mu X}$. Очевидно, это связная компонента группы $\mathcal{D}_{X\mu}$.

Перейдем теперь от векторных полей к дифференциальным формам на M. Если μ — риманов элемент объема, ориентирующий многообразие M, то векторному полю X отвечает $(n-1)$-форма $i_X\mu$, где i_X — внутреннее произведение. Это соответствие является изоморфизмом. Рассмотрим $(n-2)$-форму $i_X i_V \mu$, $X, V \in \Gamma(TM)$. Вычислим ее внешний дифференциал

$$d i_X i_V \mu = L_X(i_V\mu) - i_X d i_V \mu,$$

где $L_X = d i_X + i_X d$ — производная Ли. Воспользуемся тем, что $d\mu = 0$ и $L_X i_V - i_V L_X = i_{[X, V]}$, получаем

$$d i_X i_V \mu = i_V L_X \mu + i_{[X, V]}\mu - i_X L_V \mu.$$

Перепишем эту формулу в виде

$$d i_{V \wedge X}\mu = i_V(\operatorname{div} X)\mu + i_{[X, V]}\mu - i_X(\operatorname{div} V)\mu.$$

Переходя обратно к векторным полям, получаем

$$\operatorname{rot}(V \wedge X) = [X, V] + V \operatorname{div} X - X \operatorname{div} V, \tag{1}$$

где $\operatorname{rot} : \Gamma(\Lambda^2 TM) \to \Gamma(TM)$ — оператор, соответствующий внешнему дифференциалу, $d i_{V \wedge X}\mu = i_{\operatorname{rot}(V \wedge X)}\mu$.

Лемма 1. *Если $X \neq 0$ на M, то оператор*

$$B_X : \Gamma^s(TM) \to \Gamma^s(\Lambda^2 TM),$$

$$B_X(V) = V \wedge X, \quad V \in \Gamma^s(TM),$$

имеет правый обратный и, следовательно, имеет замкнутый образ.

Доказательство. Поскольку $X \neq 0$, то $\|X\|^{-2}$ — гладкая функция на M. Оператор $\|X\|^{-2} i_X : \Gamma^s(\Lambda^2 TM) \to \Gamma^s(TM)$ будет непрерывным правым обратным для B_X. Здесь i_X — внутреннее произведение. Если $X(x), X_1(x), \ldots, X_{n-1}(x)$ — ортогональный базис в T_xM, то $i_{X(x)}(X(x) \wedge \wedge X_i(x)) = \langle X(x), X(x)\rangle X_i(x)$ и $i_{X(x)}(X_i(x) \wedge X_j(x)) = 0$.

Замечание. Оператор B_X обладает правым обратным не только в случае $X \neq 0$, но и для гладких векторных полей X на M, у которых $\|X\|^{-2} \in H^s(M, \mathbf{R})$.

Лемма 2. *Если гладкое векторное поле X на M нигде не обращается в нуль, тогда оператор*

$$C_X : \Gamma^s(TM) \to \Gamma^{s-1}(TM),$$

$$C_X(V) = \operatorname{rot}(V \wedge X), \quad V \in \Gamma^s(TM),$$

имеет замкнутый образ.

Доказательство. Поскольку $C_X = \mathrm{rot} \circ B_X$ и оператор B_X имеет правый обратный, необходимо только показать, что оператор

$$\mathrm{rot} : \Gamma^s(\Lambda^2 TM) \to \Gamma^{s-1}(TM)$$

имеет замкнутый образ. Переходя к дифференциальным формам, получаем оператор

$$d : \Gamma^s(\Lambda^{n-2} T^*M) \to \Gamma^{s-1}(\Lambda^{n-1} T^*M).$$

Образ $\mathrm{Im}\, d$ лежит в замкнутом ядре оператора

$$d : \Gamma^{s-1}(\Lambda^{n-1} T^*M) \to \Gamma^{s-2}(\Lambda^n T^*M)$$

и отличается от него на конечномерное подпространство, состоящее из гармонических форм степени $n-1$, поэтому $\mathrm{Im}\, d$ замкнут в $\Gamma^{s-1}(\Lambda^{n-1} T^*M)$.

Следствие. *Оператор*

$$D_X : \Gamma^s(TM) \to \Gamma^{s-1}(TM) \oplus H^{s-1}(M, \mathbf{R}),$$
$$D_X(V) = (\mathrm{rot}\,(V \wedge X), \mathrm{div}\, V)$$

имеет замкнутый образ.

Доказательство. Достаточно показать, что образ оператора div замкнут. Но это очевидно, так как он состоит из функций класса H^{s-1} на M, интеграл от которых равен нулю.

Теорема 1. *Если гладкое векторное поле X на* M *бездивергентно и нигде не обращается в нуль, то группа* $\mathcal{D}_{X\mu}$ *является замкнутой* ILH-*подгруппой Ли группы* $\mathcal{D}_\mu$. *Ее алгебра Ли* $T_e\mathcal{D}_{X\mu}$ *состоит из бездивергентных векторных полей, коммутирующих с X.*

Доказательство. Подалгебра $T_e\mathcal{D}_{X\mu}$ является ядром дифференциального оператора A_X. Ввиду соотношения (1), $\ker A_X = \ker D_X$. Дифференциальный оператор

$$D_X : \Gamma^s(TM) \to \Gamma^{s-1}(TM) \oplus H^{s-1}(M, \mathbf{R})$$

имеет замкнутый образ для всех $s \geqslant n+6$. Тогда [3] существует ILH-подгруппа Ли группы $\mathcal{D}$ всех диффеоморфизмов, алгебра Ли которой есть $T_e\mathcal{D}_{X\mu}$. Поскольку $\mathcal{D}_\mu$ тоже ILH-подгруппа группы $\mathcal{D}$, то, учитывая, что $T_e\mathcal{D}_{X\mu} \subset T_e\mathcal{D}_\mu$, получаем, что наша ILH-подгруппа, соответствующая $T_e\mathcal{D}_{X\mu}$, целиком лежит в $\mathcal{D}_\mu$ и является там ILH- подгруппой.

Мы доказали, что связная компонента, содержащая единицу, группы $\mathcal{D}_{X\mu} = \{g \in \mathcal{D}_\mu;\ \mathrm{Ad}_g X = X\}$ является ILH-подгруппой Ли в $\mathcal{D}_\mu$ с алгеброй Ли $T_e\mathcal{D}_{X\mu}$. Но тогда и вся группа $\mathcal{D}_{X\mu}$ будет ILH-подгруппой $\mathcal{D}_\mu$. То, что $\mathcal{D}_{X\mu}$ замкнута в $\mathcal{D}_\mu$, следует из того, что отображение $\mathrm{Ad} : \mathcal{D}_\mu \times T_e\mathcal{D}_\mu \to T_e\mathcal{D}_\mu$ непрерывно.

Перейдем теперь к теореме 2. Пусть G — ILH-подгруппа группы $\mathcal{D}$, алгебра Ли которой T_eG обладает инвариантной метрикой $\langle\, ,\, \rangle$. Предполагается, конечно, что скалярное произведение $\langle\, ,\, \rangle$ может быть продолжено на каждое гильбертово пространство T_eG^s так, что для любых $X, Y, Z \in T_eG^s$ выполняется равенство $\langle [Z, X], Y\rangle + \langle X, [Z, Y]\rangle = 0$. Скалярное произведение на алгебрах, приведенных в качестве примеров во введении, этим свойством обладает.

Пусть $X \in T_eG$. Как было уже видно из доказательства теоремы 1, основную трудность представляет доказательство того, что оператор

$$\mathrm{ad}\, X : T_eG^{s+1} \to T_eG^s,\ \ \mathrm{ad}\, X(Y) = [X, Y]$$

имеет замкнутый образ. Заметим, что ядро этого оператора замкнуто, поскольку он непрерывен. Образ $\mathrm{ad}\,(T_eG^{s+1})$ оператора ad является орто-

гональным дополнением к ядру оператора $\mathrm{ad}: T_eG^s \to T_eG^{s-1}$. Это нетрудно проверить, воспользовавшись невырожденным скалярным произведением $\langle , \rangle$. Поэтому $\mathrm{ad}(T_eG^{s+1})$ замкнуто в T_eG^s при $s \geqslant \dim M + 6$. Этого достаточно для того, чтобы подалгебре $\{V \in T_eG;\ [X, V] = 0\}$ отвечала ILH-подгруппа в G.

Статья поступила
16 декабря 1981 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Omori H.* On the group of diffeomorphisms on a compact manifold.— Proc Symp. Pure Math., 15, Amer. Math. Soc., 1970, p. 167—183.
2. *Ebin D., Marsden J.* Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid.— Ann. of Math., 1970, v. 92, N 1, p. 102—163.
3. *Omori H.* On smooth extension theorems.— J. Math. Soc. Japan, 1972, v. 24, N 3, p. 405—432.
4. *Смоленцев Н. К.* Биинвариантная метрика на группе деффеоморфизмов трехмерного многообразия.— Сиб. мат. журн., 1983, т. 24, № 1, с. 152—159.