Л. А. Петросян, Одно отображение на семействе дифференциальных игр преследования,
Докл. АН СССР, 1968, том 178, номер 1, 34–37

Доклады Академии наук СССР
1968. Том 178, № 1

УДК 518-9 *МАТЕМАТИКА*

Л. А. ПЕТРОСЯН

ОДНО ОТОБРАЖЕНИЕ НА СЕМЕЙСТВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 6 III 1967)

В работах, посвященных дифференциальным играм (см. ([1-6])), в основном рассматривались игры преследования без ограничений на допустимые перемещения игроков. Такие ограничения настолько усложняют игру, что традиционная техника решения «в малом» становится трудноприменимой. В настоящей работе предлагается метод решения игры «в малом», использующий теоретико-игровую специфику задачи и специфику «геометрических» ограничений на возможные перемещения игроков.

Прежде чем перейти к самому методу, опишем класс игр преследования, к которым он может быть применим. При этом мы будем пользоваться следующими обозначениями: P — преследователь, E — преследуемый, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_l)$ — стратегия преследователя, $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_k)$ — стратегия преследуемого, $\rho(x, y)$ — эвклидово расстояние между точками x, y пространства R^n, $x(t)$ — траектория преследователя, $y(t)$ — траектория преследуемого.

Определение игры.

1. Игра антагонистическая.

2. Кинематические уравнения имеют вид

$$\dot{x}_i = f_i(x, \varphi), \quad i = 1, \ldots, n, \quad \varphi \in \Phi; \tag{1}$$

$$\dot{y}_j = g_j(y, \psi), \quad j = 1, \ldots, n, \quad \psi \in \Psi, \tag{2}$$

где f_i и g_j — гладкие функции.

3. В процессе игры игрок P не может покидать некоторого выпуклого замкнутого множества $A \subset R^n$ и игрок E не может покидать некоторого выпуклого замкнутого множества $B \subset R^n$ при этом $A \supset B$.

4. Продолжительность игры ограничена числом $T \geqslant 0$.

5. Целью P является минимизация величины $\rho(x(T), y(T))$ к моменту окончания игры (игрок E преследует противоположную цель).

Рассматриваемая игра зависит от следующих параметров: начального местоположения P, начального местоположения E и продолжительности T, поэтому мы будем ее обозначать $\Gamma(x, y, T)$.

Определение 1. Множество точек $C_P{}^T(x)$, в которые может попасть игрок P в момент времени T из начальной позиции x, используя свои стратегии $\varphi \in \Phi$, называется множеством действия преследователя P (обобщение понятия множества достижимости, см. ([4]), на случай, когда игрок P может перемещаться только в множестве A). Аналогичным образом определяется множество действия преследуемого E $C_E{}^T(y)$.

Мы будем предполагать в дальнейшем, что классы стратегий игроков таковы, что множества действия игроков являются всегда замкнутыми множествами.

Для любой пары точек $x \in A$, $y \in B$ определим функцию $\hat{\rho}_T(x, y)$ следующим образом:

$$\hat{\rho}_T(x, y) = \max_{\eta \in C_E^T(y)} \min_{\xi \in C_P^T(x)} \rho(\xi, \eta), \tag{3}$$

где $\rho(\xi, \eta)$ — эвклидова метрика.

Определение 2. Пусть $\hat{\rho}_T(x, y) = \rho(\xi, \eta)$, где $\rho(\xi, \eta)$ — эвклидово расстояние между точками ξ, η. Любая траектория $x^*(t)$, соединяющая точки x, ξ (так что $x(T) = \xi$, $x(0) = x$) называется условно оптимальной траекторией преследователя P. Любая траектория $y^*(t)$, соединяющая точки y и η (так что $y(0) = y$, $y(T) = \eta$), будет называться условно оптимальной траекторией преследуемого E.

Определение 3. Определим отображение $\mathfrak{M}[\Gamma(x, y, T)]$ семейства игр преследования $\Gamma(x, y, T)$ в множество B следующим образом:

$$\mathfrak{M}[\Gamma(x, y, T)] = \{M\colon M = \mathfrak{M}[\Gamma(x, y, T)]\} = \{M\colon \hat{\rho}_T(x, y) = \rho(\xi, M)\}.$$

Точка $M \in B$ называется центром преследования в игре $\Gamma(x, y, T)$.

Пусть $x^*(t)$, $y^*(t)$ — условно оптимальные траектории в игре $\Gamma(x, y, T)$ и пусть $\mathfrak{M}(t) = \{M(t)\colon M(t) = \mathfrak{M}[\Gamma(x^*(t), y^*(t), T - t)]\}$. Пусть выполняются условия:

A. Множество $\mathfrak{M}(t)$ состоит из одного элемента при всех $0 \leqslant t \leqslant T$ (отображение $\mathfrak{M}$ однозначно вдоль любой пары условно оптимальных траекторий).

B. $M(t_1) = M(t_2)$ для всех $t_1, t_2 \in [0, T]$ (отображение $\mathfrak{M}$ инвариантно вдоль любой пары условно оптимальных траекторий).

Тогда точка $M = \mathfrak{M}[\Gamma(x, y, T)]$ называется единственным инвариантным центром преследования.

Теорема. *Пусть в игре $\Gamma(x, y, T)$ существует единственный инвариантный центр преследования и $\hat{\rho}_T(x, y) > 0$; тогда существует ситуация равновесия в чистых стратегиях, условно оптимальные траектории являются оптимальными, оптимальные стратегии игроков P и E заключаются в каждый момент времени в выборе направления условно оптимальной траектории и значение игры равно $\hat{\rho}_T(x, y)$.*

Доказательство. Пусть φ^*, ψ^* стратегии игроков P и E, выбирающие в каждый момент времени направление условно оптимальных траекторий. В ситуации (φ^*, ψ^*) функция выигрыша в точности равна $\hat{\rho}_T(x, y)$, так что для доказательства теоремы достаточно доказать неравенство

$$K(x, y; \varphi, \psi^*) \geqslant \hat{\rho}_T(x, y) \geqslant K(x, y; \varphi^*, \psi) \tag{4}$$

для всех стратегий φ и ψ игроков P и E.

Левая часть неравенства (4) очевидна, поскольку точка M представляет собой наиболее удаленную в множестве $C_E{}^T(y)$ точку от множества $C_P{}^T(x)$, а при отклонении игроком P от условно оптимальной траектории его множество действия сжимается, оставаясь в $C_P{}^T(x)$, и расстояние до точки M может только возрасти.

Докажем правую часть неравенства (4). Для этого рассмотрим вспомогательную игру $\Gamma_\Delta(x, y, T)$, в которой P в каждый момент времени имеет полную информацию об отрезке траектории E на время $\Delta t > 0$ вперед. Это означает, в частности, что в каждый момент времени ему известна точка $y(t + \Delta t)$, в которую попадает игрок E через время Δt. Пусть теперь игрок E отклоняется от своей условно оптимальной траектории и в течение некоторого времени $\delta > \Delta t$ выбирает управление $\hat{\psi}$, отличное от ψ^*. Так как центр преследования единствен и $\rho_T(x, y) > 0$, то точка M', наиболее удаленная в множестве $C^E_{T-\Delta t}(y(\Delta t))$ от множества $C_P{}^T(x)$, расположена строго ближе к множеству $C_P{}^T(x)$, чем точка M. Нацеливаясь из точки x на точку M' (в течение времени Δt), преследователь P может всегда гарантировать сближение с E на расстояние не более чем $\hat{\rho}_{T-\Delta t}(x(\Delta t), y(\Delta t))$ (такое нацеливание действительно выполнимо вследствие полной информации об отрезке траектории игрока E на время

$\Delta t > 0$ вперед). Однако

$$\hat{\rho}_{T-\Delta t}(x(\Delta t), y(\Delta t)) < \hat{\rho}_T(x, y), \tag{5}$$

поскольку точка M' (являющаяся центром преследования в игре $\Gamma(x(\Delta t), y(\Delta t), T-\Delta t))$ находится строго ближе к множеству $C_T{}^P(x)$, чем точка M (из определения и единственности центра преследования). Неравенство (5) выполнено при всех $\Delta t > 0$. Устремим Δt к нулю. Если предположить, что в предельной игре P имеет информацию о выборе игрока E в каждый момент времени, то рассуждения, подобные приведенным выше, показывают, что неравенство (5) остается в силе, если в начальный момент времени выбор игрока E не совпадает с направлением условно оптимальной траектории. Таким образом, мы можем написать

$$\hat{\rho}_{T-0}(x(+0), y(+0)) < \hat{\rho}_T(x, y) \tag{6}$$

(игра $\Gamma(x(+0), y(+0), T-0)$ представляет собой игру преследования, в которой зафиксированы выборы игроков P, E в начальный момент времени). Из (6) получаем

$$\rho_{T-\delta}(x(\delta), y(\delta)) < \hat{\rho}_T(x, y), \tag{7}$$

для игры, в которой игрок P имеет информацию только о выборе управления ψ в каждый момент времени.

В предположении о наличии дискриминации (игрок P в каждый момент времени имеет информацию о выборе игрока E в этот момент) из (9) сразу же следует правая часть неравенства (5), поскольку игрок P всегда может гарантировать сближение на расстояние не менее чем $\rho_{T-\delta}(x(\delta), y(\delta))$, если выбор E не совпадает с ψ^* на отрезке времени $[0, \delta]$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Если в игре $\Gamma(x, y, T)$ отбросить предположение о дискриминации, то утверждение теоремы сохраняет силу при дополнительном предположении, что значение игры в чистых стратегиях существует.

Действительно, в этом случае знание о выборе игрока E не уменьшает значения игры (основной принцип теории игр), и, следовательно, значение игры совпадает с таковыми в игре с дискриминацией, т. е. равно $\hat{\rho}_T(x, y)$ и реализуется в условно оптимальных траекториях.

О п р е д е л е н и е 4. Множество точек x, y, T, для которых отображение $\mathfrak{M}[\Gamma(x, y, T)]$ неоднозначно, называется с и н г у л я р н о й п о в е р х н о с т ь ю, а соответствующие игры $\Gamma(x, y, T)$ называются с и н г у л я р н ы м и и г р а м и. Сингулярная поверхность называется д и с п е р с и о н н о й п о в е р х н о с т ь ю, если для любой пары условно оптимальных траекторий выполнено следующее: из того, что в какой-то момент времени $0 \leqslant t \leqslant T$ $[x^*(t), y^*(t)] \in DS$ (дисперсионная поверхность), следует, что $t = 0$ (т. е. в ситуации равновесия оптимальные траектории не пересекают дисперсионной поверхности).

Сформулированная теорема показывает простой способ решения игры в областях пространства, ограниченных сингулярными поверхностями (т. е. «в малом»). Примеры игр преследования, в которых инвариантный центр преследования существует: простое преследование (см. [2]); простое преследование в полуплоскости (см. [4]) — в этом случае единственная сингулярная поверхность является дисперсионной; динамическая игра преследования при наличии сил трения (см. [5, 6]) — из начальных позиций, не принадлежащих сингулярной поверхности; сумасшедший шофер (см. [2]) — в области, ограниченной барьером (см. [2]) и эквивокальной поверхностью, и т. д.

Заметим, что предлагаемый нами метод решения игры «в малом» в действительности работает в более широкой области, чем метод решения игры «в малом» Айзекса (см. [2]), основанный на решении основного уравнения в частных производных первого порядка. В частности, универсальная поверхность, являющаяся сингулярной поверхностью этого уравнения (см. игру сумасшедший шофер ([2])), в нашем случае сингулярной поверхностью не является.

Простейшим примером игры, в которой существует сингулярная поверхность, отличная от дисперсионной, является игра «лев и человек» (см. ([7])). Кинематические уравнения имеют вид

$$\dot{x}_i = \varphi_i, \quad \varphi_1^2 + \varphi_2^2 = v^2, \quad i = 1, 2;$$
$$\dot{y}_j = \psi_j, \quad \psi_1^2 + \psi_2^2 = u^2, \quad j = 1, 2.$$

Игра происходит в круге C. Продолжительность игры $T = R / v$. Можно просто показать, что центр круга (местоположение P) и любая точка границы (местоположение E) принадлежат сингулярной поверхности, отличной от дисперсионной.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
2 III 1967

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. С. Понтрягин, УМН, 21, в. 4, 130 (1966). [2] R. Isaacs, Differential Games, N. Y., 1965. [3] Н. Н. Красовский, ПММ, 27, в. 2 (1963). [4] Л. А. Петросян, Докл. АН АрмССР, 42, в. 5 (1966). [5] Л. А. Петросян, Н. В. Мурзов, ДАН, 172, № 6 (1967). [6] Л. А. Петросян, Докл. АН АрмССР, 42, в. 6 (1966). [7] Д. Литлвуд, Математическая смесь, М., 1962.