Б. М. Широков, Об одном классе рядов Дирихле, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1975, том 50, 187–194

Б.М.Широков

# ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РЯДОВ ДИРИХЛЕ

Пусть $f(n)$ – мультипликативная функция, причем $|f(n)|\leqslant 1$ для всех $n$. Ряд

$$F(s,f)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}, \quad s=\sigma+it \tag{I}$$

сходится при $\sigma>1$. Ряд

$$K(s,f)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(2^n)}{2^{ns}} \tag{2}$$

сходится при $\sigma>0$. В своих областях сходимости ряды (I) и (2) суть аналитические функции. Для простоты записи считаем, что $K(s,f)=1$. Наши рассуждения переносятся и на общий случай, если в них $F(s,f)$ заменить на $F(s,f)/K(s,f)$.

Предлагаемая статья посвящена доказательству следующих двух предложений.

<u>Теорема I</u>. Пусть

I°. $F(s,f)$ регулярна на прямой $\sigma=1$;

2°. $F(s,|f|)=O(1)$ при $\sigma\to 1+0$ и любом $t\neq 0$. Тогда на прямой $\sigma=1$ имеется не более одного нуля $F(s,f)$, причем этот нуль должен быть простым; $F(s,f)\neq 0$ при $\sigma>1$.

<u>Теорема 2</u>. В условиях теоремы I для всех вещественных $t$, кроме, быть может, одного значения $t_0$, справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1-\operatorname{Re}(f(p)p^{-it})}{p}=\log\log x+A(t)+o(1), \tag{3}$$

где $A(t)$ – функция, непрерывная при $t\neq t_0$. Для исключительной точки $t_0$ имеем: $F(1+it_0,f)=0$ и

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1-\operatorname{Re}(f(p)p^{-it_0})}{p}=2\log\log x+B+o(1),$$

где $B$ – постоянная.

Ряд в левой части формулы (3), по-видимому, впервые рассматривался в работе Халаса [2] в связи с изучением функции

$$\mathcal{M}(x)=\sum_{n\leqslant x} f(n).$$

Как доказано Халасом, расходимость этого ряда при всех $t$ с условием $K(s,t)\neq 0$ при $\sigma=1$ является необходимым и достаточным условием равенства $\mathcal{M}(x)=o(x)$ (см.также [3] ). Теорема 2 нашей работы характеризует в условиях I$^0$, 2$^0$ скорость расходимости этого ряда.

Заметим, что из условия I$^0$ теоремы I следует, что $\mathcal{M}(x)=o(x)$. Действительно, из работы Халаса [2] видно (см.доказательство теоремы 2), что если $F(s,f)$ регулярна при $\sigma=1$, то ряд в формуле (3) расходится при всех вещественных $t$, а тогда $\mathcal{M}(x)=o(x)$.

Заметим также, что в теореме I утверждать отсутствие нулей $F(s,f)$ на прямой $\sigma=1$ при поставленных условиях нельзя, так как функция Мебиуса $\mu(n)$ удовлетворяет I$^0$ и 2$^0$:

$$F(s,\mu)=\frac{1}{\zeta(s)}, \quad F(s,|\mu|)=\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$$

и при этом $F(1,\mu)=0$ .

<u>Доказательство теоремы I</u>. Так как при $\sigma>1$ справедлива формула

$$F(s,f)=\prod_p\left(1+\frac{f(p)}{p^s}+\frac{f(p)}{p^{2s}}+\cdots\right),$$

то отсутствие нулей при $\sigma>1$ следует из оценки

$$|F(s,f)|\geqslant\prod_p\left(1-\frac{1}{p^\sigma-1}\right)$$

и

$$\log|F(s,f)|\geqslant\sum_p\log\left(1-\frac{1}{p^\sigma-1}\right)\geqslant-\sum_p\frac{1}{p^\sigma-2}.$$

Покажем, что $F(s,f)$ может иметь лишь простые нули. При $\sigma>1$ имеем (см., например, [I] ,стр.305):

$$F(s,f)=\exp\left\{\sum_{p>2}\frac{f(p)}{p^s}+A(s,f)\right\}, \tag{4}$$

где $A(s,f)$ - функция, регулярная в области $\sigma>1-\delta$ с некоторым $\delta>0$ . Поэтому

$$\log|F(s,f)|=\sum_{p>2}\frac{\operatorname{Re}(f(p)p^{-it})}{p^\sigma}+\operatorname{Re}A(s,f).$$

Из этого равенства следует оценка

$$|\log|F(s,f)|| \leqslant \sum_{p>2} \frac{1}{p^{\sigma}} + |\operatorname{Re} A(s,f)|.$$

Следовательно, если $s_0 = 1+it_0$ есть нуль $F(s,f)$, то в достаточно малой окрестности этой точки при $\sigma>1$ получаем

$$|\log|F(s,f)|| \leqslant \log\frac{1}{\sigma-1} + C.$$

А так как $F(s,f)$ - аналитична на прямой $\sigma=1$, то из последнего неравенства следует, что $s_0$ есть нуль первого порядка.

Теперь нам осталось убедиться в том, что $F(s,f)$ не может иметь двух различных нулей на прямой $\sigma=1$.

Сначала докажем, что у нее не может быть двух симметричных относительно прямой $t=0$ нулей. Допустим противное: существует такое $t\neq 0$, что $F(1+it,f)=0$. При $\sigma>1$ составим вещественную функцию

$$H(\sigma,t) = F^2(\sigma,|f|)\cdot|F^2(\sigma+2it,|f|)|\cdot|F(\sigma-it,f)| \times$$

$$\times |F^2(\sigma+it,f)|\cdot|F(\sigma+3it,f)|. \tag{5}$$

Заметим, что

$$\operatorname{Re}(f(p)p^{it}) = \rho(p)\cos(\theta(p)+t\log p), \tag{6}$$

где $\rho(p)=|f(p)|$, $\theta(p)=\arg f(p)$. При любых вещественных числах $x$ и $y$ справедливо неравенство

$$\varphi(x,y)\geqslant 0, \tag{7}$$

где

$$\varphi(x,y) = 2+2\cos 2x+\cos(x+y)+2\cos(y-x)+$$

$$+\cos(y-3x).$$

Действительно:

$$\varphi(x,y)=4\cos^2 x+2\cos x\cdot(\cos y+\cos(y-2x))=4\cos^2 x\cdot(1+\cos(y-x))\geqslant 0.$$

Из формул (4)-(7) получаем:

$$\log H(\sigma,t) = \sum_{p>2}\frac{\rho(p)}{p^{\sigma}}\varphi(t\log p,\theta(p)) + G(\sigma,t) \geqslant G(\sigma,t), \tag{8}$$

где

$$G(\sigma,t)=2(\sigma,|f|)+\operatorname{Re}\{2A(\sigma+2it,|f|)+A(\sigma-it,f)+$$

$$+2A(\sigma+it,f)+A(\sigma+3it,f)\}.$$

В виду свойств $A(s,f)$ заключаем, что

$$G(\sigma,t)=O(1) \text{ при } \sigma\to 1+0.$$

Следовательно, $\log H(\sigma,t)$ ограничен снизу при $\sigma\to 1+0$, а значит $H(\sigma,t)$ не стремится к нулю.

С другой стороны, учитывая, что

$$F(\sigma,|f|)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f(n)|}{n^{\sigma}}\leqslant \zeta(\sigma),$$

а в точках $1+it$ функция $F(s,f)$ имеет простые нули, получаем оценку, исходя из формулы (6),

$$H(\sigma,t)=O\left\{\frac{1}{(\sigma-1)^2}(\sigma-1)^3\right\}=O(\sigma-1).$$

Полученное противоречие доказывает, что $F(s,f)$ не может иметь двух таких нулей.

Допустим теперь, что $F(s,f)$ имеет нули $1+it_1$ и $1+it_2$, причем $t_1<t_2$. В таком случае рассмотрим функцию

$$g(n)=f(n)\cdot n^{-i\frac{t_1+t_2}{2}}.$$

Для этой функции имеем:

$$F(s,g)=F(\sigma+it+i\frac{t_1+t_2}{2},f)$$

и

$$F(s,|g|)=F(s,|f|),$$

т.е. для $g(n)$ выполнены условия $1^0$ и $2^0$, а поэтому $F(s,g)$ не может иметь двух симметричных относительно вещественной оси нулей. Но, с другой стороны, если положим

$$t_0=\frac{t_2-t_1}{2}>0,$$

то увидим, что $1\pm it_0$ являются такими нулями $F(s,g)$, что невозможно. Следовательно, функция $F(s,f)$ может иметь на прямой $\sigma=1$ не больше одного нуля.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2 предварим рядом лемм. Начнем с определения. Говорим, что функция $\alpha(x)$, определенная для $x \geqslant 0$, медленно изменяется, если $\alpha(x')-\alpha(x) \to 0$ при $x$, $x' \to \infty$ и $x'/x \to 1$.

Лемма I. Если последовательность чисел $a_n$ такова, что $|a_n| \leqslant 1$ при всех $n$, то функция

$$\alpha(x) = \sum_{\log p \leqslant x} \frac{a_p}{p}$$

медленно изменяется.

Доказательство. Пусть $\lambda > 1$ и $x' = \lambda x$. Тогда

$$|\alpha(x') - \alpha(x)| \leqslant \sum_{e^x < p \leqslant e^{\lambda x}} \frac{1}{p} = \log \lambda + o(1),$$

и при $\lambda \to 1$ и $x \to \infty$ получаем то, что и требовалось доказать.

Мы будем использовать следующее утверждение, которое, следуя А.Г.Постникову [I] стр.4I, будем называть обобщенной теоремой Литтлвуда.

Теорема. Если $\alpha(x)$ – вещественная медленно изменяющаяся функция и

$$f(\sigma) = \int_0^\infty e^{-\sigma x}\, d\alpha(x)$$

определена при $\sigma > 0$, и существует предел

$$\lim_{\sigma \to 0+} f(\sigma) = A$$

то при $x \to \infty$ существует предел

$$\lim \alpha(x) = A.$$

Лемма 2. Если $1+it$ не является нулем $F(s,f)$, то ряд

$$\sum_p f(p)/p^{1+it} \tag{9}$$

сходится.

Доказательство. Положим

$$\alpha(x) = \sum_{\log p \leqslant x} \frac{\mathrm{Re}(f(p)p^{-it})}{p}.$$

По лемме I, в силу того, что $|f(n)|\leqslant 1$, $\alpha(x)$ есть медленно изменяющаяся функция. При $\sigma>0$ определена функция

$$\Phi(\sigma)=\sum_p \frac{Re(f(p)p^{-it})}{p^{1+\sigma}}=\int_0^\infty e^{-\sigma x}\,d\alpha(x)$$

Ввиду того, что $F(s,f)$ регулярна на прямой $\sigma=1$ и в точке $1+it$ не обращается в нуль, то существует конечный предел

$$\lim_{\sigma\to 1+0}\log|F(\sigma+it,f)|,$$

следовательно, существует предел

$$\lim_{\sigma\to 0+}\Phi(\sigma)=\Phi(0+).$$

Тогда по обобщенной теореме Литтлвуда существует предел

$$\lim_{x\to\infty}\alpha(x)=\sum_p\frac{Re(f(p)p^{-it})}{p}=\Phi(0+).$$

Теперь рассмотрим ряд

$$\sum_p\frac{Jm(f(p)p^{-it})}{p}. \tag{10}$$

Полагая

$$\alpha_1(x)=\sum_{\log p\leqslant x}\frac{Jm(f(p)p^{-it})}{p}$$

и вновь пользуясь леммой I и обобщенной теоремой Литтлвуда, находим, что ряд (10) также сходится. Таким образом установлено, что ряд (9) сходится, и лемма доказана.

<u>Лемма 3</u>. Если $F(1+it_0,f)=0$, то ряд

$$\sum_p\frac{Re(f(p)p^{-it_0})+1}{p}$$

сходится.

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим функцию $F(s,f)\zeta(s-it_0)$. Она регулярна и не обращается в нуль на прямой $\sigma=1$. Следовательно, по лемме 2 сходится при всех вещественных $t$ ряд

$$\sum_p\frac{1+f(p)p^{-it_0}}{p^{1+i(t-t_0)}}.$$

Переходя в этом ряде к вещественной части при $t = t_0$, получим утверждение леммы.

В том случае, если $1 + it_0$ – нуль $F(s, f)$, рассмотрим функцию $F(s, f)\zeta(s - it_0)$, которая регулярна на прямой $\sigma = 1$ и не имеет на ней нулей. Рассуждая аналогично доказательству леммы 2, получим, что (10) при $t = t_0$ сходится, т.е. он сходится при всех $t$.

<u>Следствие</u>. В условиях теоремы I ряд

$$\sum_p \frac{f(p)}{p^{1+it}}$$

сходится при всех вещественных $t$, кроме $t_0$, для которого $F(1 + it_0, f) \neq 0$.

<u>Доказательство теоремы 2</u>. Если вещественное $t$ таково, что $F(1 + it, f) \neq 0$, то воспользуемся теоремой Мертенса

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log \log x + C + o(1)$$

и леммой 2 и получим первое утверждение теоремы. Если же $F(1 + it_0, f) = 0$, то прибегая к теореме Мертенса и лемме 3, получаем второе утверждение теоремы. Так как по теореме I такое $t_0$ может быть лишь одно, то и второе утверждение теоремы 2 доказано. Покажем непрерывность $A(t)$ при $t \neq t_0$. Выберем $\delta$ настолько малым, чтобы $t_0 \notin [t - \delta, t + \delta]$. Тогда,

$$A(t+h) - A(t) = \sum_p \frac{Re(f(p)p^{-i(t+h)})}{p} - \sum_p \frac{Re(f(p)p^{-it})}{p}$$

По лемме 2 при $|h| \leq \delta$ оба ряда в правой части сходятся. Поэтому, для произвольного $\varepsilon > 0$ найдем и зафиксируем такое вещественное число $x$, что

$$\left|\sum_{p>x} \frac{Re(f(p)p^{-i(t+h)})}{p}\right| + \left|\sum_{p>x} \frac{Re(f(p)p^{-it})}{p}\right| < \varepsilon .$$

Заметим, что

$$Re\left[f(p)\left(p^{-i(t+h)} - p^{-it}\right)\right] =$$

$$= 2\rho(p) \sin\left[\theta(p) - t\log p - \frac{h}{2}\log p\right] \cdot \sin\left(\frac{h}{2}\log p\right).$$

Следовательно, для $|h| \leq \delta$ можем написать неравенство

$$|A(t+h)-A(t)| \leq 2\sum_{p \leq x} \frac{|\sin(\frac{h}{2}\log p)|}{p} + \varepsilon \leq$$

$$\leq \delta \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} + \varepsilon .$$

А теперь выберем $\delta$ настолько малым, чтобы выполнялось неравенство

$$\delta \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} < \varepsilon .$$

Таким образом, непрерывность $A(t)$ установлена.

Теорема 2 доказана.

## Цитированная литература


[1] Постников А.Г. Введение в аналитическую теорию чисел. М.,1971.

[2] Halász G. Über die Mittelwerte multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen. Acta Math.Acad.Scient.Hungaricae, 1968, 19, № 3-4, 365-404.

[3] Ryavec C. The use of measure theoretic method in study of additive arithmetic functions. Lect.notes in math., 1972, 251, 193-203.