



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Н. Михалкин, О решении общих алгебраических уравнений с помощью интегралов от элементарных функций, *Сиб. матем. журн.*, 2006, том 47, номер 2, 365–371

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.84

9 февраля 2025 г., 12:10:30



УДК 517.55

О РЕШЕНИИ ОБЩИХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛОВ ОТ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Е. Н. Михалкин

Аннотация: Получена интегральная формула для решения общего алгебраического уравнения. В этой формуле подынтегральная функция является элементарной, а интегрирование осуществляется по отрезку. Преимущество полученной формулы перед известной формулой Меллина состоит в расширении области сходимости интеграла. Это обстоятельство позволяет описать монодромию решения для триномиальных уравнений.

Ключевые слова: алгебраическое уравнение, интегральное представление, гипергеометрические функции.

Введение

В 1921 г. Меллин [1] привел интегральную формулу и разложение в гипергеометрический ряд для

$$z^n + x_1 z^{n_1} + \dots + x_p z^{n_p} - 1 = 0, \quad n > n_1 > \dots > n_p > 0 \quad (1)$$

(см. также [2]). Указанная формула была получена им для ветви $z(x)$ с условием $z(0) = 1$ и названа главным решением уравнения (1). Легко видеть, что все остальные ветви получаются из $z(x)$ по формуле

$$z_j(x) = \varepsilon^j z(\varepsilon^j x), \quad j = 1, \dots, n-1,$$

где $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ — первообразный корень. Формула Меллина следующая:

$$z(x) = \frac{1}{(2\pi i)^p} \int_{\gamma+i\mathbb{R}^p} \frac{\frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n} - \frac{n_1}{n} z_1 - \dots - \frac{n_p}{n} z_p\right) \Gamma(z_1) \dots \Gamma(z_p)}{\Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{n'_1}{n} z_1 + \dots + \frac{n'_p}{n} z_p + 1\right)} x_1^{-z_1} \dots x_p^{-z_p} dz, \quad (2)$$

где Γ — гамма-функция Эйлера, γ — точка из многогранника

$$\{u \in \mathbb{R}^p : u_1 > 0, \dots, u_p > 0, n_1 u_1 + \dots + n_p u_p < 1\},$$

а $dz = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_p$. На основе интегрального представления (2) и теории многомерных вычетов в статье [2] описаны некоторые аналитические продолжения $z(x)$.

Отметим, что в этой формуле подынтегральное выражение является трансцендентной функцией, а множество интегрирования неограниченное.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ-1212.2003.1).

В настоящей статье предлагается интегральная формула для решения общего алгебраического уравнения с интегрированием по компактному (отрезку) элементарной функции. В этой формуле область сходимости интеграла шире, чем в формуле Меллина (2). Для формулировки основного результата настоящей статьи обозначим

$$n'_i = n - n_i, \quad y_i = x_i t^{\frac{n_i}{n}} (1-t)^{\frac{n'_i}{n}}. \quad (3)$$

Теорема 1. Ветвь алгебраической функции $z(x)$ решения уравнения (1) с условием $z(0) = 1$ допускает представление в виде интеграла

$$z(x) = 1 + \frac{1}{2\pi i n} \int_0^1 t^{\frac{1-n}{n}} (1-t)^{-\frac{1+n}{n}} \left[e^{\frac{\pi i}{n}} \ln \left(1 + \sum_{k=1}^p e^{-\frac{n'_k}{n} \pi i} y_k \right) - e^{-\frac{\pi i}{n}} \ln \left(1 + \sum_{k=1}^p e^{\frac{n'_k}{n} \pi i} y_k \right) \right] dt, \quad (4)$$

где ветви логарифма определены в области пространства \mathbb{C}^p переменного $x = (x_1, \dots, x_p)$, полученной удалением из \mathbb{C}^p двух семейств комплексных гиперплоскостей

$$\Sigma_- = \bigcup_{t \in [0;1]} \left\{ \sum_{k=1}^p x_k t^{\frac{n_k}{n}} (1-t)^{\frac{n'_k}{n}} e^{-\frac{n_k}{n} \pi i} = 1 \right\},$$

$$\Sigma_+ = \bigcup_{t \in [0;1]} \left\{ \sum_{k=1}^p x_k t^{\frac{n_k}{n}} (1-t)^{\frac{n'_k}{n}} e^{\frac{n_k}{n} \pi i} = 1 \right\},$$

и выбираются условием $\ln 1 = 0$. Таким образом, $z(x)$ голоморфно и однозначно продолжается из окрестности нуля в область $\mathbb{C}^p \setminus (\Sigma_- \cup \Sigma_+)$.

Выражаю благодарность В. А. Степаненко, замечание которого позволило улучшить доказательство сформулированной теоремы.

1. Доказательство теоремы 1

Для доказательства воспользуемся представлением $z(x)$ в виде гипергеометрического ряда (см. [1, 3]):

$$z(x) = \frac{1}{n} \sum_{|k| \geq 0} \frac{(-1)^{|k|} \Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{n_1}{n} k_1 + \dots + \frac{n_p}{n} k_p\right)}{k_1! \dots k_p! \Gamma\left(\frac{1}{n} - \frac{n'_1}{n} k_1 - \dots - \frac{n'_p}{n} k_p + 1\right)} x_1^{k_1} \dots x_p^{k_p},$$

где $|k| = k_1 + \dots + k_p$, $k_i \geq 0$.

Пользуясь формулой дополнения $\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{\Gamma(1-z) \sin \pi z}{\pi}$, перепишем рассматриваемый ряд в виде

$$z(x) = \frac{1}{\pi n} \sum_{|k| \geq 0} \frac{(-1)^{|k|} \Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{n_1}{n} k_1 + \dots + \frac{n_p}{n} k_p\right) \Gamma\left(-\frac{1}{n} + \frac{n'_1}{n} k_1 + \dots + \frac{n'_p}{n} k_p\right)}{k_1! \dots k_p!} \times \sin \pi \left(\frac{1}{n} - \frac{n'_1}{n} k_1 - \dots - \frac{n'_p}{n} k_p + 1 \right) x_1^{k_1} \dots x_p^{k_p}$$

$$= 1 + \frac{1}{\pi n} \sum_{|k| \geq 1} \frac{(-1)^{|k|} \Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{n_1}{n} k_1 + \dots + \frac{n_p}{n} k_p\right) \Gamma\left(-\frac{1}{n} + \frac{n'_1}{n} k_1 + \dots + \frac{n'_p}{n} k_p\right)}{k_1! \dots k_p!} \times \sin \pi \left(\frac{1}{n} - \frac{n'_1}{n} k_1 - \dots - \frac{n'_p}{n} k_p + 1 \right) x_1^{k_1} \dots x_p^{k_p}.$$

Используя определение бета-функции и ее связь с гамма-функцией, получим

$$z(x) = 1 + \frac{1}{\pi n} \times \sum_{|k| \geq 1} \frac{(-1)^{|k|} \Gamma(k_1 + \dots + k_p) \sin \pi \left(\frac{1}{n} - \frac{n_1'}{n} k_1 - \dots - \frac{n_p'}{n} k_p + 1 \right) x_1^{k_1} \dots x_p^{k_p}}{k_1! \dots k_p!} \times \int_0^1 t^{\frac{1}{n} + \frac{n_1'}{n} k_1 + \dots + \frac{n_p'}{n} k_p - 1} (1-t)^{-\frac{1}{n} + \frac{n_1'}{n} k_1 + \dots + \frac{n_p'}{n} k_p - 1} dt.$$

Покажем, что в последнем выражении можно поменять местами порядок суммирования и интегрирования, т. е. что

$$z(x) = 1 + \frac{1}{\pi n} \int_0^1 t^{\frac{1-n}{n}} (1-t)^{-\frac{1+n}{n}} \times \sum_{|k| \geq 1} \frac{(-1)^{|k|} \Gamma(k_1 + \dots + k_p) \sin \pi \left(\frac{1}{n} - \frac{n_1'}{n} k_1 - \dots - \frac{n_p'}{n} k_p + 1 \right)}{k_1! \dots k_p!} \times [x_1 t^{\frac{n_1}{n}} (1-t)^{\frac{n_1'}{n}}]^{k_1} \dots [x_p t^{\frac{n_p}{n}} (1-t)^{\frac{n_p'}{n}}]^{k_p} dt.$$

В самом деле, элементы последнего ряда мажорируются величинами

$$\frac{|k|!}{k_1! \dots k_p!} [x_1 t^{\frac{n_1}{n}} (1-t)^{\frac{n_1'}{n}}]^{k_1} \dots [x_p t^{\frac{n_p}{n}} (1-t)^{\frac{n_p'}{n}}]^{k_p},$$

которые составляют ряд геометрической прогрессии для функции

$$\frac{1}{1 - \sum_{i=1}^p (x_i t^{\frac{n_i}{n}} (1-t)^{\frac{n_i'}{n}})},$$

абсолютно сходящийся к этой функции при малых $|x_i|$.

Поскольку ряд под интегралом в выражении функции $z(x)$ фактически зависит от величин

$$y_i = x_i t^{\frac{n_i}{n}} (1-t)^{\frac{n_i'}{n}}, \quad i = 1, \dots, p,$$

целесообразно ввести в рассмотрение ряд

$$H(y_1, \dots, y_p) = \sum_{|k| \geq 1} \frac{(-1)^{|k|} \Gamma(k_1 + \dots + k_p) \sin \pi \left(\frac{1}{n} - \frac{n_1'}{n} k_1 - \dots - \frac{n_p'}{n} k_p + 1 \right)}{k_1! \dots k_p!} y_1^{k_1} \dots y_p^{k_p}, \quad (5)$$

в результате чего $z(x)$ запишется в виде

$$z(x) = 1 + \frac{1}{\pi n} \int_0^1 t^{\frac{1-n}{n}} (1-t)^{-\frac{1+n}{n}} H(y_1, \dots, y_p) dt. \quad (6)$$

После применения к (5) формул $\Gamma(n) = (n-1)!$ и $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ получим равенство

$$\begin{aligned} H(y_1, \dots, y_p) &= \frac{1}{2i} \sum_{|k| \geq 1} \frac{(-1)^{|k|} (k_1 + \dots + k_p - 1)! e^{(\frac{1}{n} - \frac{n'_1}{n} k_1 - \dots - \frac{n'_p}{n} k_p + 1)\pi i}}{k_1! \dots k_p!} y_1^{k_1} \dots y_p^{k_p} \\ &\quad - \frac{1}{2i} \sum_{|k| \geq 1} \frac{(-1)^{|k|} (k_1 + \dots + k_p - 1)! e^{-(\frac{1}{n} - \frac{n'_1}{n} k_1 - \dots - \frac{n'_p}{n} k_p + 1)\pi i}}{k_1! \dots k_p!} y_1^{k_1} \dots y_p^{k_p} \\ &= -\frac{e^{\frac{\pi i}{n}}}{2i} \sum_{|k| \geq 1} \frac{(k_1 + \dots + k_p - 1)! (-e^{-\frac{n'_1}{n} \pi i} y_1)^{k_1} \dots (-e^{-\frac{n'_p}{n} \pi i} y_p)^{k_p}}{k_1! \dots k_p!} \\ &\quad + \frac{e^{-\frac{\pi i}{n}}}{2i} \sum_{|k| \geq 1} \frac{(k_1 + \dots + k_p - 1)! (-e^{\frac{n'_1}{n} \pi i} y_1)^{k_1} \dots (-e^{\frac{n'_p}{n} \pi i} y_p)^{k_p}}{k_1! \dots k_p!}. \end{aligned}$$

Воспользуемся равенством

$$\sum_{|k| \geq 1} \frac{(k_1 + \dots + k_p - 1)!}{k_1! \dots k_p!} z_1^{k_1} \dots z_p^{k_p} = -\ln(1 - z_1 - \dots - z_p),$$

в результате чего получим

$$\begin{aligned} H(y_1, \dots, y_p) &= \frac{e^{\frac{\pi i}{n}}}{2i} \ln(1 + e^{-\frac{n'_1}{n} \pi i} y_1 + \dots + e^{-\frac{n'_p}{n} \pi i} y_p) \\ &\quad - \frac{e^{-\frac{\pi i}{n}}}{2i} \ln(1 + e^{\frac{n'_1}{n} \pi i} y_1 + \dots + e^{\frac{n'_p}{n} \pi i} y_p). \quad (7) \end{aligned}$$

Из (6) следует, что условие $z(0) = 1$ будет обеспечено, если в (7) выбрать ветви логарифма так, чтобы выполнялось равенство $H(0) = 0$, и это достигается выбором ветвей логарифма с помощью условия $\ln 1 = 0$.

Итак, показано, что

$$\begin{aligned} H(y_1, \dots, y_p) &= \frac{e^{\frac{\pi i}{n}}}{2i} \ln(1 + e^{-\frac{n'_1}{n} \pi i} y_1 + \dots + e^{-\frac{n'_p}{n} \pi i} y_p) \\ &\quad - \frac{e^{-\frac{\pi i}{n}}}{2i} \ln(1 + e^{\frac{n'_1}{n} \pi i} y_1 + \dots + e^{\frac{n'_p}{n} \pi i} y_p), \quad (8) \end{aligned}$$

где y_i выражается через x_i согласно равенству (3), а ветви логарифма выбираются согласно условию $\ln 1 = 0$. Логарифмические функции в (8) голоморфны и однозначны в $\mathbb{C}^p \setminus \Sigma_- \cup \Sigma_+$, где Σ_{\mp} определены в формулировке теоремы 1. После подстановки (8) в (6) получаем равенство (4). Тем самым теорема 1 доказана.

2. Применение к триномиальному уравнению

Рассмотрим уравнение вида (1) в случае $p = 1$, т. е. когда в уравнении всего один параметр x_1 , который мы обозначим через x . Соответствующее уравнение

$$z^n + xz^m - 1 = 0, \quad 0 < m < n, \quad (9)$$

назовем *триномиальным* уравнением. Для него главное решение (4) запишется в виде

$$z(x) = 1 + \frac{1}{2\pi i n} \int_0^1 t^{\frac{1-n}{n}} (1-t)^{-\frac{1+n}{n}} [e^{\frac{\pi i}{n}} \ln(1 + e^{-\frac{n-m}{n}\pi i} y) - e^{-\frac{\pi i}{n}} \ln(1 + e^{\frac{n-m}{n}\pi i} y)] dt, \quad (10)$$

где $y = xt^{\frac{m}{n}}(1-t)^{\frac{n-m}{n}}$. Максимальное значение функции $t^{\frac{m}{n}}(1-t)^{\frac{n-m}{n}}$ на отрезке $[0, 1]$ равно $(\frac{m}{n})^{\frac{m}{n}} (\frac{n-m}{n})^{\frac{n-m}{n}}$, поэтому множества Σ_{\mp} в формулировке теоремы 1 представляют собой пару лучей $\Sigma_{\mp} = \{ \tau e^{\pm \frac{m\pi i}{n}} : \tau \geq \frac{1}{(\frac{m}{n})^{\frac{m}{n}} (\frac{n-m}{n})^{\frac{n-m}{n}}} \}$ (см. рис. 1).

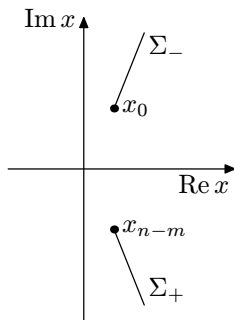


Рис. 1.

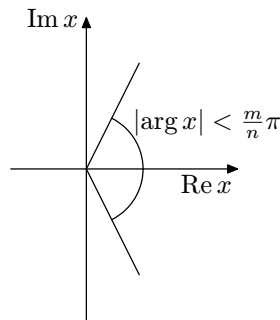


Рис. 2.

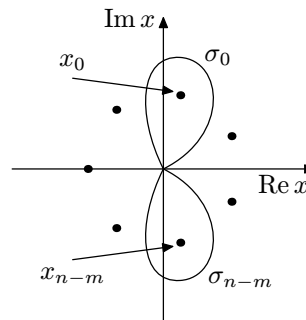


Рис. 3.

Следует отметить, что сектор, ограниченный продолжениями этих лучей до их пересечения (в начале координат), является областью сходимости интеграла Меллина — Барнса (2), представляющего главное решение $z(x)$ триномиального уравнения (9) (имеется в виду сектор, содержащий луч $x > 0$). Действительно, интеграл имеет вид

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma + i\mathbb{R}} \frac{\frac{1}{n} \Gamma(\frac{1}{n} - \frac{m}{n} z) \Gamma(z)}{\Gamma(\frac{1}{n} + \frac{n-m}{n} z + 1)} x^{-z} dz, \quad (11)$$

где $0 < \gamma < \frac{1}{m}$, и согласно [4] его область сходимости вычисляется по формуле

$$|\arg x| < \frac{\pi}{2} \left(\frac{m}{n} + 1 - \frac{n-m}{n} \right) = \frac{m}{n} \pi$$

(см. рис. 2).

Поясним, что в соответствии с [4] здесь в скобках просуммированы со знаком «+» модули коэффициентов при z в аргументах гамма-функции в числителе интеграла (11) и со знаком «-» коэффициент в знаменателе. Поскольку по теореме 1 интеграл (10) сходится во всей плоскости переменного x , кроме двух лучей, видим, что в случае триномиального уравнения область сходимости интеграла (10) значительно шире области сходимости интеграла Меллина — Барнса (11).

Не ограничивая общности, будем считать, что m и n взаимно просты (уравнение (9) сводится к этому случаю заменой $y = z^d$, где d — наибольший общий

делитель m и n). В этом случае дискриминант уравнения допускает наиболее краткую запись и он равен (см. [3])

$$\Delta = (-1)^n [(-1)^m n^n - m^m (n-m)^{n-m} x^n].$$

Таким образом, дискриминантное множество составляет последовательность точек

$$x_k = \frac{e^{\pi i \frac{m+2k}{n}}}{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}} \left(\frac{n-m}{n}\right)^{\frac{n-m}{n}}}, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

лежащих на одной окружности. Заметим, что точки x_0 и x_{n-m} дискриминантного множества суть начала лучей Σ_- и Σ_+ , вне которых по теореме 1 $z(x)$ голоморфна и однозначна. Поэтому, обозначив через σ_k петлю, проходящую через $x = 0$ и окружающую лишь точку x_k , мы приходим к следующему утверждению.

Следствие 1. Главная ветвь $z(x)$ триномиального уравнения (9) переходит в себя при обходе всех петель σ_k , кроме σ_0 и σ_{n-m} .

Используя рассуждение симметрии и то, что остальные ветви имеют вид $z_j(x) = \varepsilon^j z(\varepsilon^j x)$, $j = 1, \dots, n-1$, где $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ — первообразный корень, получаем

Следствие 2. Каждая ветвь $z_j(x)$ имеет ветвление лишь в паре точек $x = \frac{e^{\frac{\pi i}{n}(\pm m - 2j)}}{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}} \left(\frac{n-m}{n}\right)^{\frac{n-m}{n}}}$.

Покажем, что каждая из дискриминантных точек x_k является точкой ветвления лишь двух ветвей из набора $z_0(x), \dots, z_{n-1}(x)$ всех ветвей. Так как при $0 \leq j_1, j_2 \leq n-1$ уравнения

$$e^{\frac{\pi i}{n}(\pm m - 2j_1)} = e^{\frac{\pi i}{n}(m - 2j_2)}, \quad e^{\frac{\pi i}{n}(\pm m - 2j_1)} = e^{\frac{\pi i}{n}(-m - 2j_2)}$$

имеют лишь решения $j_2 = (j_1 + m) \pmod{n}$, $j_2 = (j_1 - m) \pmod{n}$, каждая пара ветвей z_j и $z_{(j+m) \pmod{n}}$, z_j и $z_{(j-m) \pmod{n}}$ имеет единственную общую точку ветвления. Обозначим ее через x_k и найдем k . Для этого решим уравнения

$$e^{\frac{\pi i}{n}(-m - 2j)} = e^{\frac{\pi i}{n}(m + 2k_1)}, \quad e^{\frac{\pi i}{n}(m - 2j)} = e^{\frac{\pi i}{n}(m + 2k_2)},$$

откуда получаем $k_1 = (-j - m) \pmod{n}$, $k_2 = -j \pmod{n}$.

Ветвь z_j при обходе петли $\sigma_{(-j-m) \pmod{n}}$ переходит в ветвь $z_{(j+m) \pmod{n}}$. Действительно, если предположить, что рассматриваемая ветвь переходит в отличную от $z_{(j+m) \pmod{n}}$ ветвь, то точка $x_{(-j-m) \pmod{n}}$ будет являться точкой ветвления бесконечного порядка, так как лишь две ветви z_j и $z_{(j+m) \pmod{n}}$ имеют ветвление в этой точке. Аналогично получаем, что ветвь z_j при обходе петли $\sigma_{-j \pmod{n}}$ переходит в ветвь $z_{(j-m) \pmod{n}}$.

Найдем порядок ветвления точек x_k . Как показано выше, ветвь z_j при обходе петли $\sigma_{(-j-m) \pmod{n}}$ переходит в ветвь $z_{(j+m) \pmod{n}}$, а ветвь $z_{(j+m) \pmod{n}}$ при обходе петли $\sigma_{(-j-m) \pmod{n}}$ переходит в ветвь $z_{(j+m-m) \pmod{n}} = z_j$. Таким образом, ветвь z_j при двукратном обходе петли $\sigma_{(-j-m) \pmod{n}}$ переходит сама в себя. Следовательно, порядок ветвления точек x_k равен двум. Итак, доказана

Теорема 2. Если m и n взаимно просты, то всякая ветвь $z_j(x)$ триномиального уравнения (9) имеет ветвление (причем второго порядка) лишь в паре точек

$$\frac{e^{\frac{\pi i}{n}(m-2j)}}{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}} \left(\frac{n-m}{n}\right)^{\frac{n-m}{n}}} = x_{-j \pmod{n}}, \quad \frac{e^{\frac{\pi i}{n}(-m-2j)}}{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}} \left(\frac{n-m}{n}\right)^{\frac{n-m}{n}}} = x_{(-j-m) \pmod{n}}.$$

При этом ветвь z_j при обходе петли $\sigma_{-j \pmod{n}}$ переходит в ветвь $z_{(j-m) \pmod{n}}$, а при обходе петли $\sigma_{(-j-m) \pmod{n}}$ — в ветвь $z_{(j+m) \pmod{n}}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mellin H. J. Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction gamma // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1921. V. 172. P. 658–661.
2. Семушева А. Ю., Цих А. К. Продолжение исследований Меллина о решении алгебраических уравнений // Комплексный анализ и дифференциальные операторы (к 150-летию С. В. Ковалевской). Красноярск: КрасГУ, 2000. С. 134–146.
3. Passare M., Tsikh A. Algebraic equations and hypergeometric series // The legacy of Niels Henrik Abel. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2004. P. 653–672.
4. Жданов О. Н., Цих А. К. Исследование кратных интегралов Меллина — Барнса с помощью многомерных вычетов // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 2. С. 282–298.

Статья поступила 19 февраля 2005 г.

Михалкин Евгений Николаевич

*Красноярский гос. университет, факультет математики и информатики,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041*

mikhalkin@bk.ru