Оглавление

Предисловие

Данная книга является конспектом лекций, прочитанных автором в рамках Научно-образовательного центра при Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН осенью 2011 г.

В лекциях рассматривается понятие алгебры Клиффорда над полем вещественных или комплексных чисел.

Алгебра Клиффорда была открыта английским математиком Вильямом Клиффордом [1] в 1878 г. как алгебра, объединяющая свойства алгебры Грассмана [2] и кватернионов Гамильтона [3]. Теория алгебр Клиффорда развивалась усилиями многих математиков – Липшицем (R. Lipschitz), Картаном (E. Cartan) [4], Валеном (K. T. Vahlen), Уиттом (E. Witt), Шевалле (C. Chevalley) [5], Риссом (M. Riesz) [6], Портеусом (I. R. Porteous) [7], Хелмстейтером (J. Helmstetter) и др.

Существенное влияние на развитие алгебр Клиффорда оказало уравнение Дирака [8] для электрона (1928 г.), к которому алгебра Клиффорда имеет непосредственное отношение. Уравнение Дирака записывается с использованием 4 комплекснозначных матриц (гамма-матриц Дирака), которые удовлетворяют тем же определяющим соотношениям, что и генераторы алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(1,3)$. Связь алгебры Клиффорда со спинорами привлекла внимание к теории алгебр Клиффорда со стороны многих физиков и математиков ([9]–[12] и др.).

Очередной этап развития теории алгебр Клиффорда можно сязать с появлением работы Атьи, Ботта и Шапиро [13] (1964 г.), вызвавшей достаточно большой резонанс в научном сообществе. В 1971 г. была проведена первая конференция по алгебрам Клиффорда (в институте Matsciende, Индия). В рассматриваемый период большую роль в развитии и популяризации теории алгебр Клиффорда сыграл американский матетатик Д. Хестенес [14], являющийся автором четырех книг по алгебре Клиффорда и ее применению в физике и механике.

Современный период развития теории алгебр Клиффорда можно отнести к последним 30 годам. Начиная с 1985 г. каждые три года проходит конференция по алгебрам Клиффорда и приложениям[1] (ICCA – International Conference on Clifford Algebras and their Applications). С 1990 г. выходит (4 выпуска в год) журнал Advances in Applied Clifford Algebras[2]. В настоящее время алгебра Клиффорда (иногда, Геометрическая алгебра) применяется во многих разделах современной математики и физики. Алгебра Клиффорда находит свое применение в теории поля (см., книгу Н. Г. Марчука [15]), робототехнике, обработке сигналов и изображений, химии, небесной механике, вычислительной технике, электродинамике и др.

Отдельно отметим применение алгебр Клиффорда в геометрии и такое направление современной дифференциальной геометрии, как Spin geometry. В книге с одноименным названием [16] подчеркивается связь алгебр Клиффорда и спиноров с K-теорией и теоремой об индексе. Спинорные многообразия и операторы Дирака играют важную роль в современной дифференциальной геометии. Отметим также более современную книгу Т. Фридриха [17]. По сути единственной зарубежной книгой по алгебрам Клиффорда, преведенной на русский язык, на сегодняшний день остается книга Г. Казанова “Векторная алгебра” [18]. Различными приложениями алгебры Клиффорда и теории спиноров в геометрии занимались Атья, Зингер, Лоусон, Громов, Хитчин, Виттен и др.

Курс построен таким образом, что алгебра Клиффорда рассматривается не как абстрактная алгебра, а как математический аппарат, который активно используется в приложениях математической физики. На некоторые вопросы излагается своя точка зрения, предложен ряд новых результатов [19]–[28].

Никаких дополнительных знаний, выходящих за рамки программы первого курса университета по математическим и физическим специальностям, от читателей не требуется. Все дополнительные необходимые понятия даются по ходу изложения и в Приложении.

Курс может быть полезен как студентам младших курсов для расширения своего кругозора, так и студентам старших курсов и аспирантам для возможного применения аппарата алгебр Клиффорда в различных приложениях.

---

[1] Последняя конференция: Bauhaus-University, Weimar, Germany, 2011.

[2] Журнал AACA издается издательством Birkhäuser Verlag, ISSN 0188-7009, http://www.springer.com/birkhauser/physics/journal/6.

Излагаемый материал сопровождается упражнениями, которые помогут лучше усвоить новый материал и подтолкнут читателей к более детальному изучению предмета.

Данное изложение по возможности минимизирует необходимость смотреть другую литературу. Для удобства читателей в конце книги приводится список рекомендуемой литературы для более детального изучения исследуемых проблем.

Автор выражает глубокую благодарность И. В. Воловичу, Н. Г. Марчуку и рецензенту за полезные замечания.

Лекция 1

1.1. Алгебры Клиффорда (АК) с фиксированным базисом

Имеется несколько различных (эквивалентных) определений алгебр Клиффорда. Например, в [29] рассмотрены сразу три различных определения алгебры Клиффорда и показана их эквивалентность.

В рассматриваемом далее определении алгебры Клиффорда используется базис специального вида – занумерованный упорядоченными мультииндексами. Подчеркнем, что введенные далее генераторы и базис фиксированы (не меняются). Такое определение ближе к первоначальному определению В. Клиффорда. Другие определения (с фиксированным n-мерным векторным пространством V и заданной на нем квадратичной формой Q) обсуждаются в упражнениях.

Пусть E – векторное (линейное) пространство над полем $\mathbb{F}$ вещественных чисел $\mathbb{R}$ или над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Пусть n – натуральное число и размерность пространства E равна $\dim E = 2^n$. Пусть в E введен базис

$$e,\, e^a,\, e^{a_1 a_2},\, \ldots, e^{1\ldots n}, \quad \text{где} \quad a_1 < a_2 < \ldots, \qquad (\text{их } 2^n \text{ штук}) \tag{1.1}$$

занумерованный упорядоченными мультииндексами длины от 0 до n. Индексы $a, a_1, a_2, \ldots$ пробегают значения от 1 до n.

Пусть p и q – неотрицательные целые числа и $p+q=n$, $n \geqslant 1$. Введем диагональную матрицу η размера n:

$$\eta = \|\eta^{ab}\| = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1), \tag{1.2}$$

у которой на диагонали стоят p штук $+1$ и q штук -1.

Введем на E операцию *Клиффордова умножения* $U, V \to UV$ по следующим правилам:

1) (дистрибутивность и согласованность с линейной структурой) для любых $U, V, W \in E$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$

$$U(\alpha V + \beta W) = \alpha UV + \beta UW, \ (\alpha U + \beta V)W = \alpha UW + \beta VW;$$

2) (ассоциативность) для любых $U, V, W \in E$

$$(UV)W = U(VW);$$

3) (унитальность) для любого $U \in E$

$$Ue = eU = U;$$

4) для всех $a, b = 1, \ldots, n$

$$e^a e^b + e^b e^a = 2\eta^{ab} e; \tag{1.3}$$

5) для всех $1 \leqslant a_1 < \cdots < a_k \leqslant n$

$$e^{a_1} \cdots e^{a_k} = e^{a_1 \ldots a_k}.$$

Тогда введенная таким образом алгебра называется *алгеброй Клиффорда* и обозначается $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$ в случае поля вещественных чисел и $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{C}}(p,q) = \mathcal{C}\!\ell(p,q)$ в случае поля комплексных чисел. Заметим, что в случае поля комплексных чисел мы часто будем опускать индекс $\mathbb{C}$ и писать просто $\mathcal{C}\!\ell(p,q)$. Заметим, что

$$\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q) \subset \mathcal{C}\!\ell(p,q).$$

В тех случаях, когда рассуждения верны для обоих случаев, будем писать $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$, подразумевая, что $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Элементы e^a называются *генераторами*[1] алгебры Клиффорда, элемент e называется *единицей* алгебры Клиффорда. Пара чисел (p,q) называется *сигнатурой* алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$. Иногда под сигнатурой понимают число $p - q$.

Итак, ввиду условий 1)–4) мы имеем ассоциативную некоммутативную унитальную алгебру с определяющими соотношениями (1.3).

Любой элемент U алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ представляется в виде разложения по базису (1.1):

$$U = ue + u_a e^a + \sum_{a_1 < a_2} u_{a_1 a_2} e^{a_1 a_2} + \cdots + u_{1\ldots n} e^{1\ldots n}, \tag{1.4}$$

где $u, u_a, u_{a_1 a_2}, \ldots, u_{1\ldots n}$ – вещественные (в случае $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$) или комплексные числа (в случае $\mathcal{C}\!\ell(p,q)$). Далее будем использовать

[1] В русскоязычной литературе вместо термина “генератор” часто используется термин “порождающий”.

подобные обозначения для элементов и их коэффициентов без дополнительных оговорок.

Упражнения

1. Показать, что в базисе (1.1), занумерованном упорядоченными мультииндексами длины от 0 до n, ровно 2^n элементов.
2. Вычислить произведение UV двух элементов
   - $U = e + e^{12} - e^{1234}, \quad V = e^1 + e^{234} \in \mathcal{C}\!\ell(1,3)$;
   - $U = V = e^1 + e^2 + e^3 \in \mathcal{C}\!\ell(3,0)$.
3. Вычислить обратный элемент к элементу U или показать, что его нет
   - $U = e + e^1 \in \mathcal{C}\!\ell(1,1)$;
   - $U = e + e^1 \in \mathcal{C}\!\ell(0,2)$.
4. Привести примеры таких элементов алгебры Клиффорда, что
   - $UV \neq VU$;
   - $UV = WV$, но $U \neq W$;
   - $UV = 0$, но $VU \neq 0$;
   - $U^2 = U$, но $U \neq e$;
   - $U^2 = 0$, но $U \neq 0$.

5*. Найти в литературе (см., например, [29]) другие определения алгебры Клиффорда (без фиксированного базиса) и доказать их эквивалентность
   - как фактор-алгебру $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(V,Q) = T(V)/I(V,Q)$ тензорной алгебры $T(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigotimes^k V$ по двустороннему идеалу $I(V,Q)$, порожденному элементами вида
   $$x \otimes x - Q(x),$$
   где Q – квадратичная форма на векторном пространстве V;
   - как универсальный объект.

1.2. Примеры АК, кватернионы, матрицы Паули и Дирака

Рассмотрим несколько примеров алгебр Клиффорда малых размерностей.

Имеем следующие изоморфизмы алгебр (см. упражнения)

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(0,0) &\simeq \mathbb{R}, & \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{C}}(0,0) &\simeq \mathbb{C}, \\ \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(1,0) &\simeq \mathbb{R}\oplus\mathbb{R}, & \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(0,1) &\simeq \mathbb{C}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

При $n=2$ имеем три алгебры Клиффорда

$$\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(2,0), \qquad \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(1,1), \qquad \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(0,2).$$

Произвольный элемент этих алгебр запишется в виде

$$U = ue + u_1e^1 + u_2e^2 + u_{12}e^{12}.$$

Оказывается, что $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(2,0)$ изоморфна (как алгебра) $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(1,1)$ в силу того, что элементы e^1, e^2 и e^{12} попарно антикоммутируют в обоих случаях и для $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(2,0)$ имеем

$$(e^1)^2 = \eta^{11}e = e, \qquad (e^2)^2 = \eta^{22}e = e,$$
$$(e^{12})^2 = e^{12}e^{12} = e^1e^2e^1e^2 = -e^1e^2e^2e^1 = -\eta^{11}\eta^{22}e = -e,$$

а для $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(1,1)$ имеем

$$(e^1)^2 = \eta^{11}e = e, \qquad (e^2)^2 = \eta^{22}e = -e,$$
$$(e^{12})^2 = -\eta^{11}\eta^{22}e = e.$$

Для элементов алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(2,0)$ можно построить матричное представление, например, сопоставив элементам базиса следующие матрицы:

$$e \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad e^1 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$e^2 \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e^{12} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеем следующие изоморфизмы

$$\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(2,0) \simeq \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(1,1) \simeq \mathrm{Mat}(2,\mathbb{R}).$$

Здесь и далее $\mathrm{Mat}(k,\mathbb{F})$ – алгебра квадратных матриц размера k над полем или телом $\mathbb{F}$.

Рассмотрим более подробно алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(0,2)$. Для элементов базиса имеем:

$$(e^1)^2 = -e, \qquad (e^2)^2 = -e, \qquad (e^{12})^2 = -e,$$

$$e^1e^2 = -e^2e^1 = e^{12},$$
$$e^{12}e^1 = -e^1e^{12} = e^2,$$
$$e^2e^{12} = -e^{12}e^2 = e^1.$$

Таким образом, сопоставив

$$e^1 \to i, \qquad e^2 \to j, \qquad e^{12} \to k,$$

получим, что алгебра Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(0,2)$ изоморфна алгебре (телу) *кватернионов* $\mathbb{H}$. Алгебра кватернионов является ассоциативной алгеброй с единицей 1. Элементы $\mathbb{H}$ (кватернионы) записываются в виде

$$q = a + bi + cj + dk,$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и *мнимые единицы* i, j, k удовлетворяют условиям

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$
$$ij = -ji = k, \qquad jk = -kj = i, \qquad ki = -ik = j.$$

Рассмотренные примеры показывают, что алгебру Клиффорда можно рассматривать как обобщение тела кватернионов, а также как обобщение поля комплексных чисел.

Отметим, что в физике и механике наибольшее применение имеют алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(1,3)$ и $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(3,0)$. В первом случае генератор e^1 соответствует времени, а генераторы e^2, e^3, e^4 – трем пространственным координатам. В алгебре Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(3,0)$ все три генератора соответствуют пространственным координатам.

При этом матричное представление для $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(3,0)$ обычно задается с использованием *матриц Паули*

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

следующим образом:

$$e \to \sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad e^1 \to \sigma^1, \qquad e^2 \to \sigma^2, \qquad e^3 \to \sigma^3.$$

Произведению генераторов здесь и далее сопоставляется матрица, полученная как произведение матриц, соответствующих этим генераторам.

В силу

$$\sigma^1\sigma^2 = i\sigma^3, \qquad \sigma^2\sigma^3 = i\sigma^1, \qquad \sigma^3\sigma^1 = i\sigma^2$$

получаем, что элементам базиса алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(3,0)$ будут сопоставлены следующие матрицы

$$\sigma^0, \quad \sigma^1, \quad \sigma^2, \quad \sigma^3, \quad i\sigma^1, \quad i\sigma^2, \quad i\sigma^3, \quad i\sigma^0,$$

образующие базис в $\mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})$.

Имеем изоморфизм

$$\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(3,0) \simeq \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C}).$$

Напомним, что матрицы Паули $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$ образуют базис в пространстве всех эрмитовых матриц размера 2 на 2 с нулевым следом. Они были предложены Вольфгангом Паули для описания спина электрона в квантовой механике. Для них верны соотношения:

$$\begin{gathered}(\sigma^i)^\dagger = \sigma^i, \quad \mathrm{tr}(\sigma^i) = 0, \quad (\sigma^i)^2 = \sigma^0, \qquad i = 1,2,3,\\ \sigma^i\sigma^j = -\sigma^j\sigma^i, \quad i \neq j, \qquad i,j = 1,2,3,\end{gathered} \tag{1.6}$$

где $\dagger$ означает операцию эрмитова сопряжения матрицы – композиция транспонирования и взятия комплексного сопряжения от всех элементов матрицы.

Матричное представление для $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{C}}(1,3)$ может быть получено с помощью *матриц Дирака* размера 4×4

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \qquad i = 1,2,3,$$

где σ^i – матрицы Паули и $\mathbf{1}_2$ – единичная матрица размера 2 на 2. Представление задается следующим образом:

$$e \to \mathbf{1}_4, \quad e^i \to \gamma^{i-1}, \qquad i = 1,2,3,$$

где $\mathbf{1}_4$ – единичная матрица размера 4.

Матрицы Дирака, известные также как γ – матрицы, применялись Дираком при написании уравнения для электрона. Они удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{gathered}(\gamma^0)^2 = \mathbf{1}_4, \quad (\gamma^i)^2 = -\mathbf{1}_4, \quad \mathrm{tr}(\gamma^0) = \mathrm{tr}(\gamma^i) = 0, \qquad i = 1,2,3,\\ \{\gamma^i, \gamma^j\} = \gamma^i\gamma^j + \gamma^i\gamma^j = 2\eta^{ij}\mathbf{1}_4, \quad (\gamma^i)^\dagger = \gamma^0\gamma^i\gamma^0, \qquad i,j = 0,1,2,3,\end{gathered} \tag{1.7}$$

где η^{ij} – элементы диагональной матрицы $\eta = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$.

Имеем изоморфизм

$$\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{C}}(1,3) \simeq \mathrm{Mat}(4,\mathbb{C}).$$

В дальнейшем мы дадим полную классификацию всех вещественных и комплексных алгебр Клиффорда и установим их изоморфизмы матричным алгебрам (см. параграфы 3.1 и 3.2).

Упражнения

1. Доказать изоморфизмы алгебр (1.5).
2. Показать, что любой элемент в $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(0,2)$ обратим ($\mathbb{H}$ является телом). Предъявить явную формулу для обратного элемента U^{-1}.
3. Проверить свойства для матриц Паули (1.6) и матриц Дирака (1.7).

1.3. Классификации элементов АК по рангам, четности и кватернионным типам

Векторные подпространства, натянутые на элементы $e^{a_1\ldots a_k}$, занумерованные упорядоченными мультииндексами длины k, обозначаются как $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_k(p,q)$. Элементы подпространства $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_k(p,q)$ называются *элементами ранга* k. Для элементов ранга k иногда будут использоваться обозначения $\overset{k}{U}$, $\overset{k}{V}$, $\overset{k}{W}$ и подобные им. Разбиение

$$\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q) = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_k(p,q) \tag{1.8}$$

задает классификацию элементов алгебр Клиффорда по рангам.

Итак, любой элемент алгебры Клиффорда – это элемент определенного ранга или сумма элементов разных рангов:

$$U = \overset{k_1}{U} + \overset{k_2}{U} + \cdots + \overset{k_m}{U}, \qquad 0 \leqslant k_1 < \cdots < k_m \leqslant n.$$

Отметим, что размерность подпространства элементов ранга k равна биномиальному коэффициенту

$$\dim \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_k(p,q) = C^k_n.$$

Алгебра Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ является супералгеброй ($\mathbb{Z}_2$ – градуированной алгеброй).

Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ над полем вещественных или комплексных чисел, представленную в виде прямой суммы двух векторных подпространств

$$\mathcal{A} = \mathbb{L} \oplus \mathbb{M} \tag{1.9}$$

с билинейной операцией умножения $\circ\colon \mathcal{A}\times\mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Тогда алгебру $\mathcal{A}$ будем называть $\mathbb{Z}_2$-*градуированной алгеброй* (*супералгеброй*), если для всех элементов из соответствующих подпространств выполняются условия

$$\overset{\mathbb{L}}{A} \circ \overset{\mathbb{L}}{B},\ \overset{\mathbb{M}}{A} \circ \overset{\mathbb{M}}{B} \in \mathbb{L}, \qquad \overset{\mathbb{L}}{A} \circ \overset{\mathbb{M}}{B},\ \overset{\mathbb{M}}{A} \circ \overset{\mathbb{L}}{B} \in \mathbb{M}. \tag{1.10}$$

При этом элементы подпространства $\mathbb{L}$ называются *четными*, а элементы подпространства $\mathbb{M}$ называются *нечетными* элементами.

Алгебра Клиффорда представляется в виде прямой суммы

$$\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q) = \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Even}}(p,q) \oplus \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Odd}}(p,q), \tag{1.11}$$

где

$$\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Even}}(p,q) = \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{0}(p,q) \oplus \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{2}(p,q) \oplus \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{4}(p,q) \oplus \cdots,$$
$$\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Odd}}(p,q) = \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{1}(p,q) \oplus \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{3}(p,q) \oplus \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{5}(p,q) \oplus \cdots$$

с соответствующими свойствами для четного и нечетного подпространства.

Разбиение (1.11) задает классификацию элементов алгебры Клиффорда относительно понятия четности.

Элементы подпространства $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Even}}(p,q)$ называются *четными элементами* алгебры Клиффорда, элементы подпространства $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Odd}}(p,q)$ называются *нечетными элементами* алгебры Клиффорда.

Итак, любой элемент алгебры Клиффорда – это либо четный элемент, либо нечетный элемент, либо сумма четного и нечетного элементов.

Размерности подпространств четных элементов и нечетных элементов алгебры Клиффорда совпадают и равны (см. упражнения)

$$\dim \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Even}}(p,q) = \dim \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Odd}}(p,q) = 2^{n-1}.$$

Представим алгебру Клиффорда, рассматриваемую как векторное пространство, в виде прямой суммы четырех подпространств:

$$\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q) = \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\overline{0}}(p,q) \oplus \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\overline{1}}(p,q) \oplus \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\overline{2}}(p,q) \oplus \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\overline{3}}(p,q), \tag{1.12}$$

где

$$\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\overline{0}}(p,q) = \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{0}(p,q) \oplus \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{4}(p,q) \oplus \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{8}(p,q) \oplus \cdots,$$
$$\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\overline{1}}(p,q) = \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{1}(p,q) \oplus \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{5}(p,q) \oplus \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{9}(p,q) \oplus \cdots,$$
$$\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\overline{2}}(p,q) = \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{2}(p,q) \oplus \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{6}(p,q) \oplus \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{10}(p,q) \oplus \cdots,$$
$$\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\overline{3}}(p,q) = \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{3}(p,q) \oplus \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{7}(p,q) \oplus \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{11}(p,q) \oplus \cdots$$

и в правой части стоят прямые суммы подпространств фиксированных рангов с шагом 4, причем $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{k}(p,q) = \varnothing$ при $k > p+q$.

Будем называть подпространства

$$\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\overline{0}}(p,q), \qquad \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\overline{1}}(p,q), \qquad \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\overline{2}}(p,q), \qquad \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\overline{3}}(p,q)$$

подпространствами главных кватернионных типов [25].

Целесообразность рассмотрения алгебры Клиффорда как прямой суммы четырех приведенных подпространств обсуждается ниже (см. параграф 4.1).

Упражнения

1. Показать, что квадрат от элемента алгебры Клиффорда ранга 1 есть элемент ранга 0.
2. Показать, что
$$\dim \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Even}}(p,q) = \dim \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Odd}}(p,q) = 2^{n-1}$$
(с помощью Бинома Ньютона).
3. Показать, что алгебра Клиффорда является супералгеброй.
4. Доказать, что для двух произвольных элементов алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ заданных рангов $k \geqslant l$, верно
$$\overset{k}{U}\overset{l}{V} \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{k-l}(p,q) \oplus \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{k-l+2}(p,q) \oplus \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{k-l+4}(p,q) \oplus \cdots \oplus \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{k+l}(p,q).$$

5*. Показать, что

$$\dim \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\overline{0}}(p,q) = \sum_k C_n^{4k} = \frac{2^{n-1} + 2^{n/2}\cos(\pi n/4)}{2},$$
$$\dim \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\overline{1}}(p,q) = \sum_k C_n^{4k+1} = \frac{2^{n-1} + 2^{n/2}\sin(\pi n/4)}{2},$$
$$\dim \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\overline{2}}(p,q) = \sum_k C_n^{4k+2} = \frac{2^{n-1} - 2^{n/2}\cos(\pi n/4)}{2},$$
$$\dim \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\overline{3}}(p,q) = \sum_k C_n^{4k+3} = \frac{2^{n-1} - 2^{n/2}\sin(\pi n/4)}{2}.$$

1.4. Операции сопряжения и проектирования в АК

Комплексное сопряжение. Если элемент $U \in \mathcal{C}\!\ell(p,q)$ задан в виде разложения (1.4), то операцию *комплексного сопряжения от элемента алгебры Клиффорда* $U \to \overline{U}$ зададим формулой

$$\overline{U} = \overline{u}e + \overline{u}_a e^a + \sum_{a_1<a_2} \overline{u}_{a_1a_2} e^{a_1a_2} + \sum_{a_1<a_2<a_3} \overline{u}_{a_1a_2a_3} e^{a_1a_2a_3} + \cdots \tag{1.13}$$

в которую входят комплексно сопряженные коэффициенты $\overline{u}, \overline{u}_a, \overline{u}_{a_1a_2}, \overline{u}_{a_1a_2a_3}, \ldots$.

В соответствии с этой формулой элементы базиса алгебры Клиффорда рассматриваются как вещественные величины, т.е. $\overline{e}^{a_1\ldots a_k} = e^{a_1\ldots a_k}$.

Если элемент $U \in \mathcal{C}\!\ell(p,q)$ записан в виде суммы элементов рангов от 0 до n

$$U = \sum_{k=0}^{n} \overset{k}{U}, \tag{1.14}$$

то для него имеем

$$\overline{U} = \sum_{k=0}^{n} \overline{\overset{k}{U}}\,.$$

Верно (предлагается удостовериться в этом в упражнении)

$$\overline{\overline{U}} = U, \quad (\overline{UV}) = \overline{U}\,\overline{V}, \quad (\overline{U+V}) = \overline{U} + \overline{V}, \quad (\overline{\lambda U}) = \overline{\lambda}\,\overline{U} \tag{1.15}$$

для произвольных элементов $U, V \in \mathcal{C}\!\ell(p,q)$, чисел $\lambda \in \mathbb{C}$.

Реверс. Для элемента $U \in \mathcal{C}\!\ell(p,q)$, заданного в виде (1.14), определим операцию сопряжения $U \to U^\sim$, называемую *реверсом*

$$U^\sim = \left(\sum_{k=0}^{n} \overset{k}{U}\right)^\sim = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k(k-1)/2}\,\overset{k}{U}\,.$$

Отметим, что реверс обращает порядок следования множителей в произведениях генераторов (что и отражено в слове “реверс”)

$$(e^{a_1}e^{a_2}\cdots e^{a_k})^\sim = e^{a_k}\cdots e^{a_2}e^{a_1},$$

в частности $(e^a)^\sim = e^a$.

Верно

$$
\begin{gathered}
U^{\sim\sim} = U, \qquad (UV)^{\sim} = V^{\sim}U^{\sim}, \\
(U+V)^{\sim} = U^{\sim} + V^{\sim}, \quad (\lambda U)^{\sim} = \lambda U^{\sim}.
\end{gathered}
\tag{1.16}
$$

Псевдоэрмитово сопряжение. Суперпозиция реверса и комплексного сопряжения дает операцию сопряжения, называемую *псевдоэрмитовым сопряжением*

$$
U^{\ddagger} = \overline{U}^{\sim}.
$$

В частности имеем $(e^a)^{\ddagger} = e^a$.

Верно

$$
\begin{gathered}
U^{\ddagger\ddagger} = U, \qquad (UV)^{\ddagger} = V^{\ddagger}U^{\ddagger}, \\
(U+V)^{\ddagger} = U^{\ddagger} + V^{\ddagger}, \qquad (\lambda U)^{\ddagger} = \overline{\lambda}U^{\ddagger}.
\end{gathered}
\tag{1.17}
$$

Четностное сопряжение (grade involution). Операция *четностного сопряжения* $U \to U^{\curlywedge}$ такова, что нечетные элементы умножает на -1, а четные элементы не меняет. В частности, имеем $(e^a)^{\curlywedge} = -e^a$.

Для элемента $U \in \mathcal{C}\ell(p,q)$, заданного в виде (1.14), имеем

$$
U^{\curlywedge} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \overset{k}{U}.
$$

Верно

$$
\begin{gathered}
U^{\curlywedge\curlywedge} = U, \qquad (UV)^{\curlywedge} = U^{\curlywedge}V^{\curlywedge}, \\
(U+V)^{\curlywedge} = U^{\curlywedge} + V^{\curlywedge}, \qquad (\lambda U)^{\curlywedge} = \lambda U^{\curlywedge}.
\end{gathered}
\tag{1.18}
$$

Клиффордово сопряжение. Суперпозиция четностного сопряжения и реверса дает операцию *клиффордова сопряжения* $U \to U^{\curlywedge\sim}$. Для элемента $U \in \mathcal{C}\ell(p,q)$, заданного в виде (1.14), имеем

$$
U^{\curlywedge\sim} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k(k+1)/2} \overset{k}{U}.
$$

В частности имеем $(e^a)^{\curlywedge\sim} = -e^a$.

Верно

$$
\begin{gathered}
U^{\curlywedge\sim\curlywedge\sim} = U, \qquad (UV)^{\curlywedge\sim} = V^{\curlywedge\sim}U^{\curlywedge\sim}, \\
(U+V)^{\curlywedge\sim} = U^{\curlywedge\sim} + V^{\curlywedge\sim}, \qquad (\lambda U)^{\curlywedge\sim} = \lambda U^{\curlywedge\sim}.
\end{gathered}
\tag{1.19}
$$

Операция клиффордова сопряжения играет важную роль при изучении связи ортогональных и спинорных групп.

Операции проектирования на подпространства $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_k(p,q)$. Пусть $\mathbb{F}$ – поле комплексных или вещественных чисел и пусть $U\in\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ записано в виде (1.13). Введем обозначение для линейных операций проектирования на подпространства элементов ранга k

$$\langle U\rangle_k=\overset{k}{U}=\sum_{a_1<\dots<a_k}u_{a_1\dots a_k}e^{a_1\dots a_k}\in\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_k(p,q).$$

Введем операцию *следа* элемента $U\in\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ как операцию проектирования на одномерное подпространство $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_0(p,q)$, натянутое на единичный элемент e:

$$\mathrm{Tr}(U)=\langle U\rangle_0|_{e\to1}. \tag{1.20}$$

Для произвольного элемента $U\in\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$, расписанного по базису, имеем

$$\mathrm{Tr}(ue+u_ae^a+\cdots)=u.$$

Сформулируем некоторые свойства операции следа от элемента алгебры Клиффорда.

Теорема 1.1. *Операция взятия следа* (1.20) *от элемента алгебры Клиффорда* $U\in\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ *обладает следующими свойствами*:

- *линейность*:

$$\mathrm{Tr}(U+V)=\mathrm{Tr}(U)+\mathrm{Tr}(V),\qquad \mathrm{Tr}(\alpha U)=\alpha\mathrm{Tr}(U)$$
$$\forall U,V\in\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q),\quad \forall\alpha\in\mathbb{F},$$

- *цикличность*:

$$\mathrm{Tr}(UV)=\mathrm{Tr}(VU),\qquad \mathrm{Tr}(UVW)=\mathrm{Tr}(VWU)=\mathrm{Tr}(WUV)$$
$$\forall U,V,W\in\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q),$$

  однако, в общем случае

$$\mathrm{Tr}(UVW)\neq\mathrm{Tr}(WVU).$$

- *инвариантность при подобии*:

$$\mathrm{Tr}(U^{-1}VU) = \mathrm{Tr}(V) \qquad \forall V \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q),\ U \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}\times}(p,q).$$[2]

- *инвариантность относительно операций сопряжения*:

$$\mathrm{Tr}(U) = \mathrm{Tr}(U^{\curlywedge}) = \mathrm{Tr}(U^{\sim}) = \overline{\mathrm{Tr}(\overline{U})} = \overline{\mathrm{Tr}(U^{\ddagger})} = \overline{\mathrm{Tr}(U^{\dagger})}.$$

Доказательство. Линейность следует непосредственно из определения (1.20).

Для доказательства свойства

$$\mathrm{Tr}(UV) = \mathrm{Tr}(VU)$$

в силу линейности операции Tr, достаточно доказать, что

$$\mathrm{Tr}(\overset{k}{U}\overset{l}{V} - \overset{k}{U}\overset{l}{V}) = 0 \qquad \forall k, l = 0, \ldots, n$$

(это предлагается показать в упражнении). Цикличность для большего числа элементов алгебры Клиффорда следует из предыдущего утверждения. Инвариантность при подобии получаем как простое следствие цикличности. Последние свойства следуют также из определения следа (1.20) и определения соответствующих операций сопряжения (см. параграф 1.4). Операция эрмитова сопряжения $\dagger$ введена в следующем параграфе и представляет из себя композицию операции $\ddagger$, преобразование подобия и, иногда, четностного сопряжения (см. параграф 2.1), откуда следует требуемое свойство. $\triangleright$

Упражнения

1. Доказать, что

$$\mathrm{Tr}(\overset{k}{U}\overset{l}{V} - \overset{k}{U}\overset{l}{V}) = 0, \qquad \forall k, l = 0, \ldots, n.$$

2. Доказать свойства операций сопряжения (1.15)–(1.19) для произвольных элементов алгебры Клиффорда.

[2]Через $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}\times}(p,q)$ обозначено множество обратимых элементов алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$.

Лекция 2

2.1. Структура унитарного (евклидова) пространства на АК

В настоящем параграфе введем структуру унитарного (или евклидова в вещественном случае) пространства на алгебрах Клиффорда. Более подробно об этом можно найти в [26].

Рассмотрим алгебру $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{F}}(n) = \mathcal{C}\ell^{\mathbb{F}}(n,0)$. Зададим операцию $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{F}}(n) \times \mathcal{C}\ell^{\mathbb{F}}(n) \to \mathbb{F}$ формулой

$$(U,V) = \mathrm{Tr}(U^{\ddagger}V). \tag{2.1}$$

Теорема 2.1. *Операция $U,V \to (U,V) = \mathrm{Tr}(U^{\ddagger}V)$ является евклидовым скалярным произведением элементов $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{F}}(n)$ при $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ и эрмитовым скалярным произведением при $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.*

Доказательство. Проверим, что выполняются следующие свойства скалярного произведения для всех $U,V,W \in \mathcal{C}\ell^{\mathbb{F}}(n)$, $\lambda \in \mathbb{F}$:

$$\begin{gathered}(U,V) = \overline{(V,U)},\\ (U,\lambda V) = \lambda(U,V),\\ (U+V,W) = (U,W)+(V,W),\\ (U,U) \geqslant 0, \qquad (U,U) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad U = 0. \end{gathered}\tag{2.2}$$

Выполнение первых трех свойств очевидно (см. упражнение). Для доказательства (2.2) нам достаточно доказать ортонормированность базиса (1.1) по отношению к операции $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$

$$(e^{i_1\ldots i_k}, e^{j_1\ldots j_l}) = \begin{cases} 0, & \text{если } (i_1\ldots i_k) \neq (j_1\ldots j_l);\\ 1, & \text{если } (i_1\ldots i_k) = (j_1\ldots j_l).\end{cases}$$

Легко видеть, что если мультииндексы $i_1\ldots i_k$ и $j_1\ldots j_l$ содержат r совпадающих индексов, то

$$e^{i_1\ldots i_k}e^{j_1\ldots j_l} \in \mathcal{C}\ell^{\mathbb{F}}_{k+l-2r}(n),$$

т.е. $(e^{i_1\ldots i_k}, e^{j_1\ldots j_l}) = 0$ для $k+l-2r > 0$. Равенство $k+l-2r = 0$ имеет место только в случае, когда мультииндексы $i_1\ldots i_k$ и

$j_1 \dots j_l$ совпадают. В последнем случае имеем

$$(e^{i_1 \dots i_k}, e^{j_1 \dots j_l}) = \mathrm{Tr}(e^{i_k} \cdots e^{i_1} e^{i_1} \cdots e^{i_k}) = \mathrm{Tr}(e) = 1. \tag{2.3}$$

Ортонормированность базиса (1.1) доказана. Поэтому для $U \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(n)$ имеем

$$(U, U) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{a_1 < \dots < a_k} |u_{a_1 \dots a_k}|^2 \geqslant 0. \tag{2.4}$$

$\triangleright$

Таким образом, алгебра Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(n)$ со скалярным произведением $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ является *евклидовым пространством* при $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ и *унитарным пространством* при $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Для алгебр Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p, q)$ с $q > 0$ свойство (2.2) для рассматриваемого скалярного произведения не выполняется.

Однако при $q > 0$ на алгебре $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p, q)$ можно ввести структуру унитарного (евклидова) пространства с помощью другого скалярного произведения.

Введем операцию *эрмитова сопряжения от элементов алгебры Клиффорда* $\dagger\colon \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p, q) \to \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p, q)$ как

$$U^\dagger = U|_{(e^{i_1 \cdots i_k})^\dagger \to e_{i_k} \dots e_{i_1},\ \lambda^\dagger \to \bar{\lambda}}, \tag{2.5}$$

для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, где $e_a = \eta_{ab} e^b$.

Заметим, что в случае алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(n, 0)$ операция $\dagger$ совпадает с операцией $\ddagger$.

Легко видеть, что

$$(U + V)^\dagger = U^\dagger + V^\dagger, \qquad (UV)^\dagger = V^\dagger U^\dagger, \qquad U^{\dagger\dagger} = U.$$

Теорема 2.2. *Операция $U, V \to (U, V) = \mathrm{Tr}(V^\dagger U)$ является евклидовым скалярным произведением элементов $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p, q)$ при $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ и эрмитовым скалярным произведением при $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.*

Доказательство. Доказательство подобно доказательству предыдущей теоремы. Ортонормированность базиса по отношению к введенному скалярному произведению следует из выкладки

$$(e^{i_1 \dots i_k}, e^{i_1 \dots i_k}) = \mathrm{Tr}(e_{i_k} \cdots e_{i_1} e^{i_1} \cdots e^{i_k}) = \mathrm{Tr}(e) = 1, \tag{2.6}$$

где нет суммирования по $i_1, \dots, i_k$. Остальное аналогично. $\triangleright$

Для генераторов e^a формула эрмитова сопряжения (2.5) дает

$$\begin{aligned} &(e^a)^\dagger = e^a &&\text{для} \quad a = 1, \ldots, p; \\ &(e^a)^\dagger = -e^a &&\text{для} \quad a = p+1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Элементы алгебры Клиффорда $U \in \mathcal{C}\!\ell(p,q)$, удовлетворяющие условию $U^\dagger = U^{-1}$, называются *унитарными элементами алгебры Клиффорда*. Произведение двух унитарных элементов есть унитарный элемент. Множество унитарных элементов образует *унитарную группу алгебры Клиффорда*.

Из формул (2.7) получаем $(e^a)^\dagger = (e^a)^{-1}$. Поэтому генераторы e^a и все элементы базиса (1.1) являются унитарными элементами алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(p,q)$.

Для формулы (2.5) ниже укажем эквивалентные формулы (2.8), (2.9), пользоваться которыми, как правило, удобнее.

Теорема 2.3. *Пусть $p \geqslant 0, q \geqslant 0, n = p+q \geqslant 1$ – целые числа. Операцию эрмитова сопряжения $\dagger$ (2.5) можно эквивалентным образом определить как*

$$\begin{aligned} &U^\dagger = e_{1\ldots p} U^\ddagger e^{1\ldots p}, &&\text{если} \quad p \text{ – нечетно}, \\ &U^\dagger = e_{1\ldots p} U^{\ddagger\curlywedge} e^{1\ldots p}, &&\text{если} \quad p \text{ – четно}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

или как

$$\begin{aligned} &U^\dagger = e_{p+1\ldots n} U^\ddagger e^{p+1\ldots n}, &&\text{если} \quad q \text{ – четно}, \\ &U^\dagger = e_{p+1\ldots n} U^{\ddagger\curlywedge} e^{p+1\ldots n}, &&\text{если} \quad q \text{ – нечетно}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Здесь

$$e_{1\ldots p} = e_p \cdots e_1 = (e^{1\ldots p})^{-1}, \qquad e_{p+1\ldots n} = e_n \cdots e_{p+1} = (e^{p+1\ldots n})^{-1}.$$

Таким образом операция $\dagger$ является композицией операций $\ddagger$, преобразования подобия и, иногда, четностного сопряжения $\curlywedge$.

Распишем формулы из теоремы для разных сигнатур:

$$U^\dagger = \begin{cases} e^n \cdots e^1 U^{\ddagger\flat} e^1 \cdots e^n & \text{для } (p,q) = (n,0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ e^3 e^2 e^1 U^\ddagger e^1 e^2 e^3 & \text{для } (p,q) = (3, n-3), \\ e^2 e^1 U^{\ddagger\curlywedge} e^1 e^2 & \text{для } (p,q) = (2, n-2), \\ e^1 U^\ddagger e^1 & \text{для } (p,q) = (1, n-1), \\ U^{\ddagger\curlywedge} & \text{для } (p,q) = (0, n), \end{cases} \tag{2.10}$$

где через $\flat$ обозначена операция четностного сопряжения $\curlywedge$ при четном p и тождественная операция при нечетном p.

$$U^\dagger = \begin{cases} U^\ddagger & \text{для } (p,q)=(n,0),\\ -e^n U^{\ddagger\curlywedge} e^n & \text{для } (p,q)=(n-1,1),\\ e^n e^{n-1} U^\ddagger e^{n-1} e^n & \text{для } (p,q)=(n-2,2),\\ -e^n e^{n-1} e^{n-2} U^{\ddagger\curlywedge} e^{n-2} e^{n-1} e^n & \text{для } (p,q)=(n-3,3),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, & \\ (-1)^q e^n\cdots e^1 U^{\ddagger\sharp} e^1\cdots e^n & \text{для } (p,q)=(0,n). \end{cases} \tag{2.11}$$

где знаком $\sharp$ обозначена операция четностного сопряжения $\curlywedge$ при нечетном q и тождественная операция при четном q.

Доказательство. Для доказательства теоремы нам достаточно установить эквивалентность формулы (2.5) и формул

$$(e^{i_1\dots i_k})^\dagger = e^p\cdots e^1 (e^{i_1\dots i_k})^{\ddagger\flat} e^1\cdots e^p,$$

где $\flat$–$\curlywedge$, если p – четное, и

$$(e^{i_1\dots i_k})^\dagger = (-1)^q e^n\cdots e^{p+1} (e^{i_1\dots i_k})^{\ddagger\sharp} e^{p+1}\cdots e^n,$$

где $\sharp$–$\curlywedge$, если q – нечетное. Пусть s – число общих элементов у множеств $\{i_1\dots i_k\}$ и $\{1\dots p\}$. Используя равенства

$$\eta^{11}=\dots=\eta^{pp}=1,\qquad \eta^{p+1p+1}=\dots=\eta^{nn}=-1,$$

преобразуем выписанные формулы к одинаковому виду:

$$\begin{aligned} &e^p\cdots e^1 (e^{i_1\dots i_k})^{\ddagger\flat} e^1\cdots e^p\\ &\qquad = e^p\cdots e^1 (e^{i_k}\cdots e^{i_1})^\flat e^1\cdots e^p\\ &\qquad = (-1)^{(p+1)k} e^p\cdots e^1 e^{i_k}\cdots e^{i_1} e^1\cdots e^p\\ &\qquad = (-1)^{(p+1)k}(-1)^{kp-s} e^{i_k}\cdots e^{i_1}\\ &\qquad = (-1)^{k-s} e^{i_k}\cdots e^{i_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(-1)^q e^n\cdots e^{p+1} (e^{i_1\dots i_k})^{\ddagger\sharp} e^{p+1}\cdots e^n\\ &\qquad = (-1)^q e^n\cdots e^{p+1} (e^{i_k}\cdots e^{i_1})^\sharp e^{p+1}\cdots e^n\\ &\qquad = (-1)^q(-1)^{qk} e^n\cdots e^{p+1} e^{i_k}\cdots e^{i_1} e^{p+1}\cdots e^n\\ &\qquad = (-1)^q(-1)^{qk}(-1)^{kq-(k-s)}(-1)^q e^{i_k}\cdots e^{i_1}\\ &\qquad = (-1)^{k-s} e^{i_k}\cdots e^{i_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{i_k}\ldots e_{i_1} &= \eta_{i_1 i_1}\cdots\eta_{i_k i_k} e^{i^k}\cdots e^{i^1} \\ &= (-1)^{k-s}1^s e^{i_k}\cdots e^{i_1} \\ &= (-1)^{k-s} e^{i_k}\cdots e^{i_1}, \end{aligned}$$

где нет суммирования по индексам $i_1 \ldots i_k$. Теорема доказана. $\triangleright$

Упражнения

1. Докажите для операции $(U,V) = \mathrm{Tr}(U^\dagger V)$ выполнение первых трех свойств скалярного произведения (в частности для $(U,V) = \mathrm{Tr}(U^\ddagger V)$ в случае алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(n,0)$)

$$(U,V) = \overline{(V,U)}, \qquad (U,\lambda V) = \lambda(U,V),$$
$$(U+V,W) = (U,W) + (V,W).$$

2. Показать, что для введенного скалярного произведения верно

$$(AU,V) = (U,A^\dagger V) \qquad \forall A,U,V \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q).$$

3. Пусть $A \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$. Если $A = A^\dagger$, то элемент A называется *эрмитовым.* Если $A = -A^\dagger$, то элемент A называется *антиэрмитовым.* Показать, что любой элемент $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ раскладывается в сумму эрмитова и антиэрмитова элементов

$$A = \frac{1}{2}(A+A^\dagger) + \frac{1}{2}(A-A^\dagger).$$

Показать, что если A – эрмитов элемент, то $\mathrm{Tr}\, A \in \mathbb{R}$.

4. Эрмитов элемент $A \in \mathcal{C}\!\ell(p,q)$ называется *положительно определенным*, если

$$(AU,U) > 0 \qquad \forall U \in \mathcal{C}\!\ell(p,q)\colon \quad U \neq 0,$$

и называется *отрицательно определенным*, если

$$(AU,U) < 0 \qquad \forall U \in \mathcal{C}\!\ell(p,q)\colon \quad U \neq 0.$$

Показать, что след положительно определенного элемента положителен и след отрицательно определенного элемента отрицателен.

2.2. Утверждение о центре АК

Рассмотрим алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ над полем вещественных или комплексных чисел.

Рассмотрим понятия *коммутатора* и *антикоммутатора* двух элементов алгебры Клиффорда $U, V \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$

$$[U,V] = UV - VU, \quad \{U,V\} = UV + VU. \tag{2.12}$$

Отметим, что

$$UV = \frac{1}{2}[U,V] + \frac{1}{2}\{U,V\}. \tag{2.13}$$

Следующая известная теорема дает общий вид элемента алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$, коммутирующего со всеми генераторами алгебры Клиффорда. Следствием является известное утверждение о центре алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$.

Теорема 2.4. *Рассмотрим алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ над полем вещественных или комплексных чисел. Пусть элемент $U \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ коммутирует со всеми генераторами*

$$[U, e^k] = 0, \qquad k = 1,\dots,n.$$

Тогда в случае четной размерности $n = p+q$ алгебры Клиффорда элемент U имеет вид

$$U = ue,$$

а в случае нечетной размерности n элемент U имеет вид

$$U = ue + u_{1\dots n}e^{1\dots n}.$$

Доказательство. Представим U в виде суммы четного и нечетного элементов алгебры Клиффорда

$$U = U_0 + U_1.$$

Из условий теоремы получаем следующие $2n$ уравнений на U_0 и U_1:

$$U_i e^k = e^k U_i, \qquad i = 0,1, \quad k = 1,\dots,n.$$

Четный элемент U_0 представляется в виде

$$U_0 = A_0 + e^1 B_1,$$

где четный A_0 и нечетный B_1 не содержат генератора e^1. При $k=1$ имеем

$$(A_0 + e^1 B_1)e^1 = e^1(A_0 + e^1 B_1).$$

Но $A_0 e^1 = e^1 A_0$ и $e^1 B_1 e^1 = -e^1 e^1 B_1$, значит $B_1 = 0$.

Действуя аналогично по отношению к другим генераторам, получаем, что элемент U_0 не содержит ни одного генератора, а значит, $U_0 = ue$.

Представляя U_1 в виде

$$U_1 = A_1 + e^1 B_0,$$

где A_1 и B_0 не содержат генератора e^1, при $k=1$ получаем

$$(A_1 + e^1 B_0)e^1 = e^1(A_1 + e^1 B_0).$$

Из $A_1 e^1 = -e^1 A_1$ и $e^1 B_0 e^1 = e^1 e^1 B_0$ следует, что $A_1 = 0$.

Действуя аналогично, получаем, что U_1 содержит все генераторы, либо является нулевым, т.е. $U_1 = u_{1\ldots n} e^{1\ldots n}$ (в случае нечетного n), либо $U_1 = 0$ (в случае четного n). $\triangleright$

Сформулируем известную теорему о центре алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$.

Следствие 2.1. *Центром алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ размерности $n = p+q$ является подпространство*

$$\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_0(p,q)$$

в случае четного n и подпространство

$$\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_0(p,q) \oplus \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_n(p,q)$$

в случае нечетного n, т.е.

$$\mathrm{cen}\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q) = \begin{cases} \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_0(p,q), & n \text{ – четное};\\ \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_0(p,q) \oplus \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_n(p,q), & n \text{ – нечетное}. \end{cases}$$

Теперь сформулируем теорему об элементах, антикоммутирующих со всеми генераторами алгебры Клиффорда.

Теорема 2.5. *Рассмотрим алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ над полем вещественных или комплексных чисел. Пусть элемент $U \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ антикоммутирует со всеми генераторами*

$$\{U, e^k\} = 0, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Тогда в случае четного n элемент U имеет вид

$$U = u_{1\ldots n} e^{1\ldots n},$$

а в случае нечетного n имеет вид

$$U = 0.$$

Доказательство. Доказательство проводится тем же методом, что и доказательство предыдущей теоремы. $\triangleright$

Упражнения

1. Провести доказательство теоремы 2.5.

2*. С помощью того же приема, что и при доказательстве теорем настоящего параграфа, доказать следующие утверждения:

- пусть $[e^a, X] = 0$ для выделенного генератора e^a; тогда $X = A_0 + e^a B_0$, где A_0 и B_0 – произвольные четные элементы, не содержащие генератора e^a;
- пусть $[e^{a_1 a_2}, X] = 0$ для выделенного элемента базиса $e^{a_1 a_2}$; тогда $X = A + e^{a_1 a_2} C$, где A и C – произвольные элементы, которые не содержат e^{a_1} и e^{a_2};
- пусть $\{e^a, X\} = 0$ для выделенного генератора e^a; тогда $X = A_1 + e^a B_1$, где A_1 и B_1 – произвольные нечетные элементы, не содержащие генератора e^a;
- пусть $\{e^{a_1 a_2}, X\} = 0$ для выделенного элемента базиса $e^{a_1 a_2}$; тогда $X = B^{a_1} e^{a_1} + B^{a_2} e^{a_2}$, где B^{a_1} и B^{a_2} – произвольные элементы, не содержащие e^{a_1} и e^{a_2}.

3*. Обобщить утверждения из упражнения 2 на элементы базиса $e^{a_1 \cdots a_k}$ произвольной длины k.

Лекция 3

3.1. Периодичность Картана–Ботта и матричные представления вещественных АК

Вопрос, связанный с периодичностью Картана–Ботта, довольно подробно рассмотрен в [29], [13] и в других источниках. Мы изложим в этом параграфе общеизвестные факты, а также свой взгляд на этот вопрос.

Впервые периодичность вещественных алгебр Клиффорда открыл французский математик Э. Картан (Elie Cartan, 1869–1951). Он описал 8-периодичность и связь вещественных алгебр Клиффорда с матричными алгебрами в 1908 г. В 1957–1959 гг. американский математик Р. Ботт (Rauol Bott, 1923–2005) доказал 8-периодичность гомотопических групп стабильной ортогональной группы $\mathrm{O}(\infty)$[1]. Связь его результата с теорией алгебр Клиффорда впервые была установлена в работе Атьи, Ботта и Шапиро [13] (1964 г.).

В этом параграфе будем рассматривать вещественные алгебры Клиффорда и устанавливать изоморфизмы (как алгебр) матричным алгебрам.

Лемма 3.1. *Выполнено*

$$\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p+1,q+1) \simeq \mathrm{Mat}(2, \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)). \tag{3.1}$$

Доказательство. Пусть $e^1, \ldots, e^n$ – генераторы для $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$. Рассмотрим дополнительные два генератора e^+, e^- такие, что

$$(e^+)^2 = e, \qquad (e^-)^2 = -e. \tag{3.2}$$

Зададим следующее сопоставление:

$$e^i \to \begin{pmatrix} e^i & 0 \\ 0 & -e^i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$e^+ \to \begin{pmatrix} 0 & e \\ e & 0 \end{pmatrix}, \quad e^- \to \begin{pmatrix} 0 & -e \\ e & 0 \end{pmatrix}.$$

[1] Это индуктивный предел ортогональных групп $O(n), n \to \infty$.

Нетрудно проверить, что эти матрицы будут генерировать базис в алгебре матриц $\mathrm{Mat}(2, \mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(p,q))$, что доказывает утверждение леммы. $\triangleright$

Лемма 3.2. *Выполнено*

$$\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(p+1,q+1) \simeq \mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(p,q) \otimes \mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(1,1). \tag{3.3}$$

Доказательство. Пусть $e^1, \ldots, e^n$ – генераторы для $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$. Рассмотрим дополнительные два генератора e^+, e^- такие, что выполняются условия (3.2). Элементы

$$(e^i)' = e^i e^+ e^-, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{3.4}$$

генерируют базис в $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$, элементы

$$e^+, \quad e^- \tag{3.5}$$

генерируют базис в $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(1,1)$, а вместе эти два множества генерируют базис в $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(p+1,q+1)$. Причем каждый элемент из (3.4) коммутирует с каждым из (3.5). Таким образом, получаем нужный нам изоморфизм. $\triangleright$

Лемма 3.3. *Выполнено*

$$\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(p,q) \simeq \mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(q+1,p-1). \tag{3.6}$$

Доказательство. Пусть $e^1, \ldots, e^n$ – генераторы для $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$. Нетрудно проверить, что элементы

$$(e^i)' = \begin{cases} e^1, & i = 1; \\ e^i e^1, & i = 2, \ldots, n \end{cases} \tag{3.7}$$

генерируют базис в $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(q+1,p-1)$. $\triangleright$

Лемма 3.4. *Выполнено*

$$\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(p,q) \simeq \mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(p-4,q+4). \tag{3.8}$$

Доказательство. Пусть $e^1, \ldots, e^n$ – генераторы для $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$. Нетрудно проверить, что элементы

$$(e^i)' = \begin{cases} e^i e^1 e^2 e^3 e^4, & i = 1,2,3,4; \\ e^i, & i = 5, \ldots, n \end{cases} \tag{3.9}$$

генерируют базис в $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(p-4,q+4)$.

Заметим, что домножение элементов базиса на 4 генератора неслучайно. Можно проверить, что домножение на другое количество генераторов, не кратное четырем, будет приводить либо к базису той же самой алгебры (т.е. будет получаться тривиальный изоморфизм), либо к набору элементов, не образующих базис. ▷

Лемма 3.5. *Имеем*

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(p,q+8) &\simeq \mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(p,q)\otimes\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(0,8)\\ &\simeq \mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(p,q)\otimes\mathrm{Mat}(16,\mathbb{R})\simeq\mathrm{Mat}(16,\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(p,q)).\end{aligned}\tag{3.10}$$

Доказательство. Пусть

$$e^1,\ldots,e^n,e^{n+1},\ldots,e^{n+8}$$

– генераторы для $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(p,q+8)$. Нетрудно проверить, что элементы

$$(e^i)'=e^ie^{n+1}\cdots e^{n+8},\qquad i=1,\ldots,n \tag{3.11}$$

генерируют базис в $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$, а

$$e^{n+1},\ \ldots,\ e^{n+8} \tag{3.12}$$

генерируют базис в $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(0,8)$, а вместе эти два множества генерируют базис в $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(p,q+8)$. Причем каждый элемент из (3.11) коммутирует с каждым элементом из (3.12). Таким образом, получаем нужный нам изоморфизм. Для получения остальных утверждений следует учесть, что в силу лемм 3.4 (с. 30), 3.1 (с. 29) и 3.2 (с. 30)

$$\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(0,8)\simeq\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(4,4)\simeq\mathrm{Mat}(16,\mathbb{R}).$$

▷

С помощью лемм 3.1 (с. 29)–3.4 (с. 30) мы можем получить связь всех вещественных алгебр Клиффорда с матричными алгебрами, если знаем следующие 5 изоморфизмов для алгебр Клиффорда малых размерностей:

$$\begin{aligned}&\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(0,0)\simeq\mathbb{R},\\ &\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(1,0)\simeq\mathbb{R}\oplus\mathbb{R},\\ &\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(0,1)\simeq\mathbb{C},\\ &\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(0,2)\simeq\mathbb{H},\\ &\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(0,3)\simeq\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}.\end{aligned}$$

Первые 4 из этих случаев были рассмотрены в параграфе 1.2. Пятый изоморфизм получаем, если сделаем следующее сопоставление:

$$e \to (1,1), \quad e^1 \to (i,-i), \quad e^2 \to (j,-j), \quad e^3 \to (k,-k).$$

Можно проверить, что эти элементы будут генерировать базис в $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$.

Удобно изобразить изоморфизмы вещественных алгебр Клиффорда матричным алгебрам в виде следующей таблицы. В первом столбце указано значение $n = p + q$, а в первой строке – $p - q$. На пересечении соответствующей строки и соответствующего столбца указано кольцо, над которым построена матричная алгебра, изоморфная заданной вещественной алгебре Клиффорда. В таблице использованы обозначения вида ${}^2\mathbb{R} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ и ${}^2\mathbb{H} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$.

	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0	–	–	–	–	–	$\mathbb{R}$	–	–	–	–	–
1	–	–	–	–	$\mathbb{C}$	–	${}^2\mathbb{R}$	–	–	–	–
2	–	–	–	$\mathbb{H}$	–	$\mathbb{R}(2)$	–	$\mathbb{R}(2)$	–	–	–
3	–	–	${}^2\mathbb{H}$	–	$\mathbb{C}(2)$	–	${}^2\mathbb{R}(2)$	–	$\mathbb{C}(2)$	–	–
4	–	$\mathbb{H}(2)$	–	$\mathbb{H}(2)$	–	$\mathbb{R}(4)$	–	$\mathbb{R}(4)$	–	$\mathbb{H}(2)$	–
5	$\mathbb{C}(4)$	–	${}^2\mathbb{H}(2)$	–	$\mathbb{C}(4)$	–	${}^2\mathbb{R}(4)$	–	$\mathbb{C}(4)$	–	${}^2\mathbb{H}(2)$

Таблицу можно продолжить бесконечно вниз. Движение на два шага вниз по таблице соответствует увеличению размера матрицы в 2 раза в силу лемм 3.1 (с. 29) и 3.2 (с. 30). В силу леммы 3.3 (с. 30) таблица симметрична относительно столбца со значением $p - q = 1$. В силу леммы 3.4 (с. 30) имеется периодичность в каждой строке с периодом 8.

В конечном итоге получаем следующую теорему.

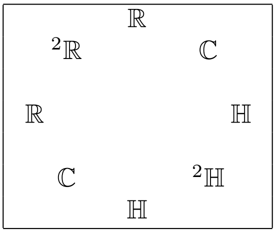
Теорема 3.1. *Вещественные алгебры Клиффорда* $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$, $n = p + q$, *изоморфны следующим матричным алгебрам:*

$$\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q) \simeq \begin{cases} \mathrm{Mat}(2^{n/2},\mathbb{R}), & p-q \equiv 0,2 \bmod 8; \\ \mathrm{Mat}(2^{(n-1)/2},\mathbb{R}) \oplus \mathrm{Mat}(2^{(n-1)/2},\mathbb{R}), & p-q \equiv 1 \bmod 8; \\ \mathrm{Mat}(2^{(n-1)/2},\mathbb{C}), & p-q \equiv 3,7 \bmod 8; \\ \mathrm{Mat}(2^{(n-2)/2},\mathbb{H}), & p-q \equiv 4,6 \bmod 8; \\ \mathrm{Mat}(2^{(n-3)/2},\mathbb{H}) \oplus \mathrm{Mat}(2^{(n-3)/2},\mathbb{H}), & p-q \equiv 5 \bmod 8. \end{cases} \tag{3.13}$$

Доказательство. Доказательство проводится с помощью выписанных выше 5 изоморфизмов для малых размерностей алгебр Клиффорда и лемм 3.1 (с. 29)–3.4 (с. 30). Иллюстрацией доказательства может служить приведенная выше таблица. ▷

Лемма 3.4 (с. 30) отражает 8-периодичность (периодичность Картана–Ботта) алгебр Клиффорда относительно значения выражения $p-q$. Теорема 3.1 (с. 32) также указывает явный вид матричных алгебр, которым изоморфны вещественные алгебры Клиффорда разных размерностей и сигнатур.

В литературе изображают периодичность Ботта для алгебр Клиффорда в виде, так называемых, часов Клиффорда (Clifford clock). В одном дне имеем 8 часов, а не как обычно 12. Движение по часовой стрелке соответствует увеличению значения выражения $p-q$ на единицу. Часы симметричны относительно оси, проходящей через третий и седьмой час.



Упражнения

1. Используя технику доказательств лемм 3.1–3.5, установить следующие изоморфизмы
$$\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Even}}(p,q) \simeq \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q-1), \qquad \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Even}}(p,q) \simeq \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(q,p-1). \tag{3.14}$$
2. Из предыдущего упражнения получить изоморфизм алгебр
$$\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Even}}(p,q) \simeq \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Even}}(q,p). \tag{3.15}$$

3.2. Матричные представления комплексных АК

Теорема 3.2. *Комплексные алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(p,q)$ одной и той же размерности n изоморфны*:
$$\mathcal{C}\!\ell(p,q) \simeq \mathcal{C}\!\ell(n,0), \qquad \forall p,q\colon \quad p+q=n. \tag{3.16}$$

Доказательство. Действительно, пусть $e^1, e^2, \ldots, e^n$ – набор генераторов алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(p,q)$. Они антикоммутируют и

$$(e^a)^2 = e, \qquad a = 1, 2, \ldots, p,$$
$$(e^a)^2 = -e, \qquad a = p+1, p+2, \ldots, n.$$

Но всегда можно взять новый набор генераторов

$$(e^a)' = e^a, \qquad a = 1, 2, \ldots, p,$$
$$(e^a)' = ie^a, \qquad a = p+1, p+2, \ldots, n.$$

Этот набор генераторов порождает комплексную алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(n,0)$, так как $((e^a)')^2 = e$, $a = 1, \ldots, n$. ▷

Многие авторы по этой причине рассматривают только комплексные алгебры сигнатуры $(n,0)$. Однако, с точки зрения некоторых приложений, иногда оказывается целесообразным и рассмотрение комплексных алгебр других сигнатур.

Теорема 3.3. *Имеем следующие изоморфизмы комплексных алгебр Клиффорда матричным алгебрам*

$$\mathcal{C}\!\ell(p,q) \simeq \mathrm{Mat}(2^{n/2}, \mathbb{C}), \qquad n \text{ – четно},$$
$$\mathcal{C}\!\ell(p,q) \simeq \mathrm{Mat}(2^{(n-1)/2}, \mathbb{C}) \oplus \mathrm{Mat}(2^{(n-1)/2}, \mathbb{C}), \qquad n \text{ – нечетно}.$$

Доказательство. Для доказательства утверждения достаточно предъявить явный вид матричных представлений для всех комплексных алгебр Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(p,q)$. Элементы комплексных алгебр Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(p,q)$ представляются комплексными матрицами, минимальный размер которых равен $2^{[(n+1)/2]}$. Причем, при нечетном n это будут блочно-диагональные матрицы размера $2^{(n+1)/2}$, у которых на диагонали стоят два блока размера $2^{(n-1)/2}$, а остальные элементы – нули. Ниже приводится явный вид одного из таких представлений. ▷

Приведем рекуррентный метод построения матричных представлений.

Единичному элементу e алгебры Клиффорда всегда сопоставляется единичная матрица соответствующего размера. Далее представлены матричные представления генераторов для случая алгебры Клиффорда сигнатуры $(n,0)$. В случае других сигнатур

(p,q) генераторам с номерами большими, чем p, сопоставляются те же матрицы, умноженные на мнимую единицу i. Элементам базиса $e^{a_1\dots a_k}$ сопоставляются матрицы, являющиеся последовательными произведениями матриц, сопоставляемых элементам $e^{a_1},\dots,e^{a_k}$.

При $n=1$ генератору e^1 сопоставляется матрица

$$e^1 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

При $n=2$ генераторам сопоставляются матрицы

$$e^1 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad e^2 \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее, пусть есть матричное представление для алгебры Клиффорда четной размерности $n=2k$

$$e^1,\dots,e^n \to \gamma^1,\dots,\gamma^n.$$

Тогда для алгебры Клиффорда размерности $n+1=2k+1$ матричное представление строится следующим образом

$$e^a \to \begin{pmatrix} \gamma^a & 0 \\ 0 & -\gamma^a \end{pmatrix}, \qquad a=1,\dots,n,$$
$$e^{n+1} \to \begin{pmatrix} i^k\gamma^1\cdots\gamma^n & 0 \\ 0 & -i^k\gamma^1\cdots\gamma^n \end{pmatrix}.$$

Теперь, для алгебры Клиффорда размерности $n+2=2k+2$ матричное представление строится следующим образом. Генераторам $e^a, a=1,\dots,n+1$ ставятся в соответствие те же матрицы, что и при размерности $n+1$, а генератору e^{n+2}

$$e^{n+2} \to \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Упражнения

1. Проверить, что рекуррентное задание матриц, представленное выше, действительно задает представление алгебры Клиффорда.
2. Предъявить матрицу, сопоставляемую явно заданному произвольному элементу U (см. (1.4)) алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(3,0)$ (элементы матрицы должны быть функциями от коэффициентов $u_{a_1\dots a_k}$).

3. Выписать матрицы, которые сопоставляются генераторам комплексной алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(1,3)$. Сравнить с матричным сопоставлением с помощью матриц Дирака (см. с. 13).

3.3. Метод задания матричного представления комплексных АК с помощью эрмитова идемпотента и левого идеала

В настоящем параграфе обсудим еще один метод построения матричного представления алгебр Клиффорда – с помощью выбора эрмитова идемпотента и связанного с ним левого идеала. Более подробно, см. [26] или [15].

Рассмотрим комплексную алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(p,q)$. Элемент $t \in \mathcal{C}\!\ell(p,q)$, удовлетворяющий условиям

$$t^2 = t, \qquad t^\dagger = t,$$

называется *эрмитовым идемпотентом.*[2]

Множество элементов алгебры Клиффорда

$$I(t) = \{U \in \mathcal{C}\!\ell(p,q) : U = Ut\}$$

называется *левым идеалом* алгебры Клиффорда, порожденным эрмитовым идемпотентом t.

Левый идеал алгебры Клиффорда, не содержащий других левых идеалов кроме себя самого и тривиального (соответствующего $t = 0$), называется *минимальным левым идеалом.* Эрмитов идемпотент, порождающий минимальный левый идеал, называется *примитивным.*

Основное свойство левого идеала $I(t)$ состоит в следующем (предлагается доказать в качестве упражнения).

Лемма 3.6. *Если $U \in I(t)$ и $V \in \mathcal{C}\!\ell(p,q)$, то $VU \in I(t)$.*

Для каждого эрмитова идемпотента t левый идеал $I(t)$ является комплексным векторным пространством. Эрмитово скалярное произведение $U, V \to (U,V) = \mathrm{Tr}(U^\dagger V)$, рассматриваемое на элементах $U, V \in I(t)$, задает структуру унитарного пространства на левом идеале.

[2] Иногда используется термин *проектор* вместо термина *идемпотент.*

Возьмем ортонормированный базис левого идеала $\tau_1, \ldots, \tau_d \in I(t)$, где $d = \dim I(t)$ и $\tau^l = \tau_l$

$$(\tau_k, \tau^l) = \delta_k^l, \qquad k, l = 1, \ldots, d. \tag{3.17}$$

С помощью базиса левого идеала (3.17) зададим линейное отображение, которое элементам алгебры Клиффорда сопоставляет матрицы

$$\gamma\colon \mathcal{C}\!\ell(p,q) \to \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$$

по формуле

$$U\tau_k = \gamma(U)_k^l \tau_l, \qquad k = 1, 2, \ldots, d, \tag{3.18}$$

где $U \in \mathcal{C}\!\ell(p,q)$ и $\gamma(U) = \|\gamma(U)_k^l\| \in \mathrm{Mat}(d, \mathbb{C})$.

Поясним формулу (3.18). Левая часть формулы (3.18) для каждого k принадлежит левому идеалу в силу леммы 3.6, а значит, может быть разложена по базису τ_l. Коэффициенты разложения мы обозначаем через $\gamma(U)_k^l$.

Очевидно имеем

$$\gamma(U)_l^k = (\tau^k, U\tau_l). \tag{3.19}$$

Предлагается проверить в качестве упражнения следующее свойство.

Лемма 3.7. *Отображение γ является представлением, т.е.*

$$\gamma(UV) = \gamma(U)\gamma(V).$$

Размерность этого представления равна размерности левого идеала $I(t)$. Минимальный левый идеал дает представление элементов алгебры Клиффорда минимальной размерности.

Заметим, что $\gamma(e) = \mathbf{1}$ – единичная матрица соответствующего размера. Будем обозначать $\gamma^a = \gamma(e^a)$. Соотношения для генераторов алгебры Клиффорда $e^a e^b + e^b e^a = 2\eta^{ab} e$ дают соотношения для матриц $\gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a = 2\eta^{ab}\mathbf{1}$.

Лемма 3.8. *Для представления γ имеем*

$$\gamma(U^\dagger) = \gamma(U)^\dagger, \qquad \forall U \in \mathcal{C}\!\ell(p,q), \tag{3.20}$$

где $U^\dagger$ – эрмитово сопряженный элемент алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(p,q)$, а $\gamma(U)^\dagger$ – эрмитово сопряженная матрица к матрице $\gamma(U)$.

Доказательство. Операция эрмитова скалярного произведения $(A, B) = \mathrm{Tr}(A^\dagger B)$ обладает следующими свойствами:

$$(A, UB) = (U^\dagger A, B), \qquad (A, B) = \overline{(B, A)}.$$

Поэтому из (3.19) получим

$$\gamma(U)^k_l = (U^\dagger \tau^k, \tau_l), \qquad \overline{\gamma(U)}^k_l = (\tau_l, U^\dagger \tau^k).$$

Подействуем операцией транспонирования и получим

$$(\gamma(U)^k_l)^\dagger = (\tau_k, U^\dagger \tau^l),$$

что совпадает с $\gamma(U^\dagger)^k_l = (\tau^k, U^\dagger \tau_l)$. ▷

Фактически, лемма говорит о том, что операция эрмитова сопряжения от элементов алгебры Клиффорда согласована с операцией эрмитова сопряжения от матриц.

Далее для каждой комплексной алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell(p, q)$ будет указан некоторый стандартный эрмитов идемпотент t и соответствующий ортонормированный базис левого идеала $I(t)$ такой, что мы получим представление алгебры Клиффорда минимальной размерности. Размерность матриц будет равна $2^{[(n+1)/2]}$. При этом в случае нечетного n элементы алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell(p, q)$ представляются блочно-диагональными матрицами размера $2^{(n+1)/2}$, у которых на диагонали стоят два блока размера $2^{(n-1)/2}$ и остальные элементы нули.

Лемма 3.9. *Следующий элемент является эрмитовым идемпотентом*:

$$t = \frac{1}{2}(e + i^a e^1) \prod_{k=1}^{[n/2]-1} \frac{1}{2}(e + i^{b_k} e^{2k} e^{2k+1}) \in \mathcal{C}\ell(p, q), \tag{3.21}$$

где

$$a = \begin{cases} 0, & \text{для } p \neq 0, \\ 1, & \text{для } p = 0, \end{cases} \qquad b_k = \begin{cases} 0, & \text{для } 2k = p, \\ 1, & \text{для } 2k \neq p. \end{cases}$$

Доказательство. В произведении (3.21) все множители коммутируют между собой. Кроме этого, используя формулу (2.7), получим

$$\left(\frac{1}{2}(e + i^a e^1)\right)^2 = \frac{1}{2}(e + i^a e^1) = \left(\frac{1}{2}(e + i^a e^1)\right)^\dagger,$$

$$\left(\frac{1}{2}(e+i^{b_k}e^{2k}e^{2k+1})\right)^2 = \frac{1}{2}(e+i^{b_k}e^{2k}e^{2k+1})$$
$$= \left(\frac{1}{2}(e+i^{b_k}e^{2k}e^{2k+1})\right)^\dagger.$$

Поэтому

$$t^2 = t, \qquad t^\dagger = t,$$

и, значит, элемент t является эрмитовым идемпотентом. $\triangleright$

Можно показать, что при четном n элемент t есть примитивный идемпотент алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(p,q)$.

Зафиксируем последовательность элементов в базисе алгебры Клиффорда. А именно, пусть элемент $e^{a_1}\cdots e^{a_k}$, $a_1 < \cdots < a_k$, предшествует элементу $e^{b_1}\cdots e^{b_k}$, $b_1 < \cdots < b_k$, если $a_1 < b_1$, либо $a_1 = b_1$, $a_2 < b_2$, либо $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 < b_3$ и т.д.

Рассмотрим в случае четного n только генераторы с четными индексами $e^2, e^4, \ldots, e^n$ и обозначим через c_k, $k = 1, \ldots, 2^{n/2}$ набор элементов базиса, которые с помощью них генерируются. Причем сначала идут $2^{(n-2)/2}$ четных элементов базиса, а затем $2^{(n-2)/2}$ нечетных элементов базиса:

$$e,\ e^{24},\ e^{26},\ \ldots,\ e^2,\ e^4,\ \ldots \tag{3.22}$$

В случае нечетного n рассмотрим генераторы с четными индексами $e^2, e^4, \ldots, e^{n-1}$ и генератор e^n. Обозначим также через c_k, $k = 1, \ldots, 2^{(n+1)/2}$ набор элементов базиса, которые с помощью них генерируются. Причем сначала идут $2^{(n-1)/2}$ четных элементов базиса, а затем $2^{(n-1)/2}$ нечетных элементов базиса.

Лемма 3.10. *Элементы левого идеала $I(t)$*

$$\tau_k = (\sqrt{2})^{[n/2]} c_k t, \qquad k = 1, \ldots, 2^{[(n+1)/2]}$$

образуют ортонормированный базис $I(t)$.

Доказательство. Имеем

$$(\tau_k, \tau_l) = \mathrm{Tr}(\tau_k^\dagger \tau_l) = (\sqrt{2})^{2[n/2]}\mathrm{Tr}(t^\dagger c_k^\dagger c_l t) = (\sqrt{2})^{2[n/2]}\mathrm{Tr}(c_k^\dagger c_l t).$$

Покажем, что

$$\begin{cases} c_k^\dagger c_l = e & \text{для } k = l, \\ \mathrm{Tr}(c_k^\dagger c_l t) = 0 & \text{для } k \neq l. \end{cases}$$

Первое верно, так как c_k является элементом базиса алгебры Клиффорда, а значит, является унитарным элементом (см. параграф 2.1). Значит, имеем в этом случае

$$(\tau_k, \tau_k) = (\sqrt{2})^{2[n/2]}\mathrm{Tr}t = 1, \qquad k = 1, \dots, 2^{[(n+1)/2]}.$$

Пусть теперь $k \neq l$. Тогда

$$\begin{gathered} c_k^\dagger c_l = \pm e^{a_1}\cdots e^{a_s} \qquad \text{при четном } n, \\ c_k^\dagger c_l = \pm e^{a_1}\cdots e^{a_s}, \quad \text{либо} \\ c_k^\dagger c_l = \pm e^{a_1}\cdots e^{a_s} e^n \qquad \text{при нечетном } n, \end{gathered} \tag{3.23}$$

где $a_1 < \cdots < a_s$ и $a_1, \dots, a_s$ – четные индексы. Правая часть формулы (3.23) содержит, по крайней мере, один множитель и, значит, $\mathrm{Tr}(c_k^\dagger c_l) = 0$.

Идемпотент t из (3.21) запишем в виде

$$t = 2^{-[n/2]}e + \sum_{r=1}^{n} \sum_{b_1<\cdots<b_r} \lambda_{b_1\dots b_r} e^{b_1}\cdots e^{b_r},$$

где $\lambda_{b_1\dots b_r} \in \mathbb{C}$ и каждое из слагаемых $\lambda_{b_1\dots b_r} e^{b_1}\cdots e^{b_r}$ содержит, по крайней мере, один генератор e^b с нечетным индексом (при нечетном n идемпотент не содержит генератора e^n). Имеем

$$c_k^\dagger c_l t = 2^{-[n/2]} c_k^\dagger c_l + \left(\sum_{r=1}^{n} \sum_{b_1<\cdots<b_r} \lambda_{b_1\dots b_r} c_k^\dagger c_l e^{b_1}\cdots e^{b_r} \right).$$

Если выражение в круглых скобках записать в виде суммы элементов базиса алгебры Клиффорда, то в каждое слагаемое в качестве множителя входит, по крайней мере, один генератор e^b с нечетным индексом. Поэтому след каждого из слагаемых равен нулю, и

$$\mathrm{Tr}(c_k^\dagger c_l t) = 0 \qquad \text{для} \quad k \neq l.$$

Ортонормированность базиса левого идеала доказана. ▷

Таким образом, с помощью эрмитова идемпотента t и ортонормированного базиса τ_k левого идеала $I(t)$ построено представление элементов алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(p,q)$ в виде матриц из $\mathrm{Mat}(2^{[(n+1)/2]}, \mathbb{C})$. В случае нечетного n оно будет блочно-диагональным для $n \leqslant 5$. Для больших размерностей далее мы предъявим другое построение эрмитова идемпотента.

При построении стандартного эрмитова идемпотента (3.21) был выделен генератор e^1. Использованная нами процедура нумерации элементов базиса алгебры Клиффорда, когда сначала нумеруются четные элементы, а потом нумеруются нечетные элементы (3.22), приводит к тому, что генератор e^1 представляется при $p > 1$ блочно-диагональной матрицей $\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1)$ с одинаковым числом 1 и -1 на диагонали.

Теперь перейдем к случаю нечетного $n = p + q > 5$. Будем рассматривать только алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(n, 0)$ сигнатуры $(n, 0)$. При рассмотрении алгебр Клиффорда других сигнатур (p, q) генераторам $e^{p+l} \in \mathcal{C}\!\ell(p, q)$ будут соответствовать элементы $ie^{p+l} \in \mathcal{C}\!\ell(n, 0)$.

Рассмотрим алгебру $\mathcal{C}\!\ell(2m + 1, 0)$.

Лемма 3.11. *Элемент*

$$t = \frac{1}{2}(e - ie^{12}) \prod_{k=1}^{m-1} \frac{1}{2}(e + ie^{2k+2}e^{2k+3}) \qquad (3.24)$$

алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(2m + 1, 0)$ является эрмитовым идемпотентом.

Рассмотрим следующий набор элементов p_k, $k = 1, 2, \ldots, 2^m$:

$$e,\ ie^2,\ e^4,\ e^6,\ \ldots,\ ie^2e^4,\ ie^2e^6,\ \ldots,$$

которые генерируются из m элементов

$$ie^2,\ e^4,\ \ldots,\ e^{2m}$$

с четными индексами, пробегающими значения от 2 до $2m$. Мнимая единица i присутствует только при генераторе e^2.

Рассмотрим следующий базис левого идеала:

$$\begin{aligned}
\tau_k &= \frac{1}{2}p_k(e + e^3)t, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, 2^m,\\
\tau_k &= \frac{1}{2}p_k(e - e^3)t, \qquad k = 2^m + 1,\ 2^m + 2,\ \ldots,\ 2^{m+1}.
\end{aligned}$$

Можно проверить, что построенный базис τ_k, $k = 1, \ldots, 2^{m+1}$, является ортонормированным по отношению к скалярному произведению $(U, V) = \mathrm{Tr}(U^\dagger V)$.

Базис τ_k задает представление элементов алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(2m + 1, 0)$ в виде блочно-диагональных матриц, у которых на главной диагонали стоят два блока размера 2^m, а остальные элементы нули.

Упражнения

1. Доказать основное свойство левого идеала: если $U \in I(t)$ и $V \in \mathcal{C}\ell(p,q)$, то $VU \in I(t)$ (лемма 3.6).
2. Доказать лемму 3.7.
3. Доказать лемму 3.11 по аналогии с леммой 3.9.
4. Предъявить матричное представление с помощью описанного метода для алгебр Клиффорда $\mathcal{C}\ell(2,0)$, $\mathcal{C}\ell(1,3)$, $\mathcal{C}\ell(3,0)$.

Лекция 4

4.1. АК как алгебры кватернионного типа

Введем следующее абстрактное понятие, которое нам понадобится для описания некоторых свойств алгебр Клиффорда, связанных с понятием кватернионных типов [25], [27], [28].

Пусть $\mathcal{A}$ – n-мерная алгебра над полем вещественных или комплексных чисел. И пусть алгебра $\mathcal{A}$, рассматриваемая как n-мерное векторное пространство, представляется в виде прямой суммы четырех векторных подпространств

$$\mathcal{A} = \mathbb{E} \oplus \mathbb{I} \oplus \mathbb{J} \oplus \mathbb{K}. \tag{4.1}$$

Для элементов подпространств будем использовать обозначения

$$\overset{\mathbb{E}}{A} \in \mathbb{E}, \quad \overset{\mathbb{I}}{B} \in \mathbb{I}, \quad \overset{\mathbb{E}\oplus\mathbb{I}}{C} \in \mathbb{E} \oplus \mathbb{I}, \quad \ldots .$$

Алгебру $\mathcal{A}$ будем называть *алгеброй кватернионного типа относительно операции* $\circ\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, если для всех элементов из соответствующих подпространств выполняются условия

$$\begin{aligned}
&\overset{\mathbb{E}}{A} \circ \overset{\mathbb{E}}{B},\ \overset{\mathbb{I}}{A} \circ \overset{\mathbb{I}}{B},\ \overset{\mathbb{J}}{A} \circ \overset{\mathbb{J}}{B},\ \overset{\mathbb{K}}{A} \circ \overset{\mathbb{K}}{B} \in \mathbb{E},\\
&\overset{\mathbb{E}}{A} \circ \overset{\mathbb{I}}{B},\ \overset{\mathbb{I}}{A} \circ \overset{\mathbb{E}}{B},\ \overset{\mathbb{K}}{A} \circ \overset{\mathbb{J}}{B},\ \overset{\mathbb{J}}{A} \circ \overset{\mathbb{K}}{B} \in \mathbb{I},\\
&\overset{\mathbb{E}}{A} \circ \overset{\mathbb{J}}{B},\ \overset{\mathbb{J}}{A} \circ \overset{\mathbb{E}}{B},\ \overset{\mathbb{I}}{A} \circ \overset{\mathbb{K}}{B},\ \overset{\mathbb{K}}{A} \circ \overset{\mathbb{I}}{B} \in \mathbb{J},\\
&\overset{\mathbb{E}}{A} \circ \overset{\mathbb{K}}{B},\ \overset{\mathbb{K}}{A} \circ \overset{\mathbb{E}}{B},\ \overset{\mathbb{I}}{A} \circ \overset{\mathbb{J}}{B},\ \overset{\mathbb{J}}{A} \circ \overset{\mathbb{I}}{B} \in \mathbb{K}.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Из рассмотренного ниже примера алгебры Клиффорда (где в качестве операции $\circ$ берется операция взятия коммутатора $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ или антикоммутатора $\{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}$) видно, что операция $\circ$ не обязана быть коммутативной или ассоциативной.

В упражнениях предлагается рассмотреть несколько примеров алгебр кватернионного типа.

Будем говорить, что элементы алгебры $\mathcal{A}$, принадлежащие разным подпространствам

$$\mathbb{E},\ \mathbb{I},\ \mathbb{J},\ \mathbb{K},\ \mathbb{E}\oplus\mathbb{I},\ \mathbb{E}\oplus\mathbb{J},\ \mathbb{E}\oplus\mathbb{K},\ \mathbb{I}\oplus\mathbb{J},\ \mathbb{I}\oplus\mathbb{K},\ \mathbb{J}\oplus\mathbb{K},$$

$$\mathbb{E}\oplus\mathbb{I}\oplus\mathbb{J},\ \mathbb{E}\oplus\mathbb{I}\oplus\mathbb{K},\ \mathbb{E}\oplus\mathbb{J}\oplus\mathbb{K},\ \mathbb{I}\oplus\mathbb{J}\oplus\mathbb{K},\ \mathbb{E}\oplus\mathbb{I}\oplus\mathbb{J}\oplus\mathbb{K}=\mathcal{A}$$

имеют разный *кватернионный тип* (или просто *тип*).

Элементы подпространств $\mathbb{E}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{J}$, $\mathbb{K}$ будем называть элементами *главных кватернионных типов.*

Далее мы не будем писать знак прямой суммы $\oplus$, полагая

$$\mathbb{E}\mathbb{I}\equiv\mathbb{E}\oplus\mathbb{I},\quad \mathbb{I}\mathbb{J}\mathbb{K}\equiv\mathbb{I}\oplus\mathbb{J}\oplus\mathbb{K}\quad \text{и т.д.}$$

Теперь рассмотрим вещественную или комплексную алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ и следующие 4 подпространства:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\overline{k}}(p,q)&=\big\{U\in\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q):U^{\sim}=(-1)^{k(k-1)/2}U,\ U^{\curlywedge}=(-1)^{k}U\big\}\\&=\bigoplus_{m=k \bmod 4}\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{m}(p,q),\qquad k=0,1,2,3.\end{aligned}$$

Теорема 4.1. • *Алгебра Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ является алгеброй кватернионного типа относительно операции взятия антикоммутатора $U,V\to\{U,V\}$. При этом*

$$\mathbb{E}=\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\overline{0}}(p,q),\qquad \mathbb{I}=\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\overline{1}}(p,q),\qquad \mathbb{J}=\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\overline{2}}(p,q),\qquad \mathbb{K}=\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\overline{3}}(p,q).$$

• *Алгебра Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ является алгеброй кватернионного типа относительно операции взятия коммутатора $U,V\to[U,V]$. При этом*

$$\mathbb{E}=\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\overline{2}}(p,q),\qquad \mathbb{I}=\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\overline{3}}(p,q),\qquad \mathbb{J}=\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\overline{0}}(p,q),\qquad \mathbb{K}=\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\overline{1}}(p,q).$$

Доказательство. Теорема следует из следующих выкладок:

$$\begin{aligned}([x,y])^{\curlywedge}&=(xy-yx)^{\curlywedge}=x^{\curlywedge}y^{\curlywedge}-y^{\curlywedge}x^{\curlywedge}=(-1)^{k_1+k_2}[x,y],\\([x,y])^{\sim}&=(xy-yx)^{\sim}=y^{\sim}x^{\sim}-x^{\sim}y^{\sim}\\&=(-1)^{k_1(k_1-1)/2+k_2(k_2-1)/2+1}[x,y],\\(\{x,y\})^{\curlywedge}&=(xy+yx)^{\curlywedge}=x^{\curlywedge}y^{\curlywedge}+y^{\curlywedge}x^{\curlywedge}=(-1)^{k_1+k_2}\{x,y\},\\(\{x,y\})^{\sim}&=(xy+yx)^{\sim}=y^{\sim}x^{\sim}+x^{\sim}y^{\sim}\\&=(-1)^{k_1(k_1-1)/2+k_2(k_2-1)/2}\{x,y\},\end{aligned}$$

где k_1 и k_2 – кватернионные типы элементов x и y. $\triangleright$

Заметим, что утверждение теоремы эквивалентно следующим утверждениям: для любых двух элементов алгебры Клиффорда

U, V из заданных подпространств существует элемент W такой, что

$$[\overset{\overline{k}}{U}, \overset{\overline{k}}{V}] = \overset{\overline{2}}{W}, \qquad k = 0,1,2,3,$$

$$[\overset{\overline{k}}{U}, \overset{\overline{2}}{V}] = \overset{\overline{k}}{W}, \qquad k = 0,1,2,3,$$

$$[\overset{\overline{0}}{U}, \overset{\overline{1}}{V}] = \overset{\overline{3}}{W}, \quad [\overset{\overline{0}}{U}, \overset{\overline{3}}{V}] = \overset{\overline{1}}{W}, \quad [\overset{\overline{1}}{U}, \overset{\overline{3}}{V}] = \overset{\overline{0}}{W},$$

$$\{\overset{\overline{k}}{U}, \overset{\overline{k}}{V}\} = \overset{\overline{0}}{W}, \qquad k = 0,1,2,3,$$

$$\{\overset{\overline{k}}{U}, \overset{\overline{0}}{V}\} = \overset{\overline{k}}{W}, \qquad k = 0,1,2,3,$$

$$\{\overset{\overline{1}}{U}, \overset{\overline{2}}{V}\} = \overset{\overline{3}}{W}, \quad \{\overset{\overline{1}}{U}, \overset{\overline{3}}{V}\} = \overset{\overline{2}}{W}, \quad \{\overset{\overline{2}}{U}, \overset{\overline{3}}{V}\} = \overset{\overline{1}}{W}.$$

Разделение всех элементов алгебр Клиффорда $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ (при любых целых неотрицательных $p+q=n$) на 15 кватернионных типов и использование утверждений теоремы 4.1 (с. 44) для вычисления кватернионных типов коммутаторов и антикоммутаторов элементов алгебры Клиффорда составляет сущность *метода кватернионной типизации элементов алгебр Клиффорда*.

Далее иногда будем обозначать $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}_{\overline{k}}(p,q)$ через $\overline{\mathbf{k}}$. В случае комплексной алгебры Клиффорда имеем разбиение на 8 подпространств:

$$\mathcal{C}\ell(p,q) = \overline{\mathbf{0}} \oplus \overline{\mathbf{1}} \oplus \overline{\mathbf{2}} \oplus \overline{\mathbf{3}} \oplus i\overline{\mathbf{0}} \oplus i\overline{\mathbf{1}} \oplus i\overline{\mathbf{2}} \oplus i\overline{\mathbf{3}}.$$

В упражнениях предлагается с помощью теоремы 4.1 найти подалгебры и подалгебры Ли комплексной алгебры Клиффорда, найти в каком подпространстве лежит степень от элемента алгебры Клиффорда, обобщить метод кватернионной типизации на k-мерные коммутаторы и k-мерные антикоммутаторы.

Упражнения

1. Показать, что алгебра (тело) кватернионов $\mathbb{H}$ является алгеброй кватернионного типа относительно операции умножения.
2. Показать, что алгебра (множество) гладких комплекснозначных функций одной вещественной переменной является алгеброй кватернионного типа относительно операции умножения.

3. Показать, что алгебра кватернионного типа $\mathcal{A}$ имеет следующие подпространства, замкнутые относительно операции $\circ$:
$$\mathbb{E}, \qquad \mathbb{E}\oplus\mathbb{I}, \qquad \mathbb{E}\oplus\mathbb{J}, \qquad \mathbb{E}\oplus\mathbb{K}.$$

4. Показать, что следующие утверждения эквивалентны:
   - алгебра $\mathcal{A}$ является алгеброй кватернионного типа относительно операции умножения;
   - алгебра $\mathcal{A}$ градуирована по четверной группе Клейна $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$. *Четверная группа Клейна* состоит из четырех элементов
   $$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2=\{1,i,j,k\},$$
   для которых таблица умножения выглядит следующим образом

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	1	k	j
j	j	k	1	i
k	k	j	i	1

5. Показать, что следующие подпространства комплексной алгебры Клиффорда являются подалгебрами:
$$\overline{\mathbf{02}}=\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Even}}(p,q), \qquad \overline{\mathbf{02}}\oplus i\overline{\mathbf{02}}=\mathcal{C}\!\ell_{\mathrm{Even}}(p,q),$$
$$\overline{\mathbf{02}}\oplus i\overline{\mathbf{13}}=\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Even}}(p,q)\oplus i\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Odd}}(p,q), \qquad \overline{\mathbf{0123}}=\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q).$$

6. Показать, что следующие подпространства комплексной алгебры Клиффорда являются алгебрами Ли (т.е. замкнуты относительно коммутатора):
$$\overline{\mathbf{2}}, \qquad \overline{\mathbf{02}}, \qquad \overline{\mathbf{12}}, \qquad \overline{\mathbf{23}}, \qquad \overline{\mathbf{0123}},$$
$$\overline{\mathbf{02}}\oplus i\overline{\mathbf{02}}, \qquad \overline{\mathbf{12}}\oplus i\overline{\mathbf{12}}, \qquad \overline{\mathbf{23}}\oplus i\overline{\mathbf{23}},$$
$$\overline{\mathbf{2}}\oplus i\overline{\mathbf{0}}, \qquad \overline{\mathbf{2}}\oplus i\overline{\mathbf{1}}, \qquad \overline{\mathbf{2}}\oplus i\overline{\mathbf{2}}, \qquad \overline{\mathbf{2}}\oplus i\overline{\mathbf{3}},$$
$$\overline{\mathbf{02}}\oplus i\overline{\mathbf{13}}, \qquad \overline{\mathbf{12}}\oplus i\overline{\mathbf{03}}, \qquad \overline{\mathbf{23}}\oplus i\overline{\mathbf{01}}.$$

7. Показать, что следующие подпространства комплексной алгебры Клиффорда замкнуты относительно антикоммутатора:
$$\overline{\mathbf{0}}, \qquad \overline{\mathbf{01}}, \qquad \overline{\mathbf{02}}, \qquad \overline{\mathbf{03}}, \qquad \overline{\mathbf{0123}},$$

$$\overline{\mathbf{01}} \oplus i\overline{\mathbf{01}}, \qquad \overline{\mathbf{02}} \oplus i\overline{\mathbf{02}}, \qquad \overline{\mathbf{03}} \oplus i\overline{\mathbf{03}},$$
$$\overline{\mathbf{0}} \oplus i\overline{\mathbf{0}}, \qquad \overline{\mathbf{0}} \oplus i\overline{\mathbf{1}}, \qquad \overline{\mathbf{0}} \oplus i\overline{\mathbf{2}}, \qquad \overline{\mathbf{0}} \oplus i\overline{\mathbf{3}},$$
$$\overline{\mathbf{01}} \oplus i\overline{\mathbf{23}}, \qquad \overline{\mathbf{02}} \oplus i\overline{\mathbf{13}}, \qquad \overline{\mathbf{03}} \oplus i\overline{\mathbf{12}}.$$

8. Показать, что для элемента U алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ заданного кватернионного типа $\overline{k} = \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}$ имеет место следующая формула для степени от элемента алгебры Клиффорда:

$$(\overset{\overline{k}}{U})^m = \begin{cases} \overset{\overline{k}}{W}, & m \text{ – нечетное },\\ \overset{\overline{0}}{W}, & m \text{ – четное.} \end{cases}$$

9. Для произвольного элемента U вещественной алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$ доказать

$$UU^{\sim},\ U^{\sim}U,\ [U,U^{\sim}],\ \{U,U^{\sim}\} \in \overline{\mathbf{01}},$$
$$[U,U^{\curlywedge}] \in \overline{\mathbf{13}}, \qquad \{U,U^{\curlywedge}\} \in \overline{\mathbf{02}},$$
$$UU^{\sim\curlywedge},\ U^{\sim\curlywedge}U,\ [U,U^{\sim\curlywedge}],\ \{U,U^{\sim\curlywedge}\} \in \overline{\mathbf{03}}.$$
$$\text{Если}\quad U \in \overline{\mathbf{01}},\ \overline{\mathbf{23}}, \qquad \text{то}\quad [U,U^{\sim}] = 0.$$
$$\text{Если}\quad U \in \overline{\mathbf{02}},\ \overline{\mathbf{13}}, \qquad \text{то}\quad [U,U^{\curlywedge}] = 0.$$
$$\text{Если}\quad U \in \overline{\mathbf{03}},\ \overline{\mathbf{12}}, \qquad \text{то}\quad [U,U^{\sim\curlywedge}] = 0.$$

Для произвольного элемента U комплексной алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(p,q)$ доказать (через U^{-} обозначен комплексно-сопряженный элемент алгебры Клиффорда)

$$UU^{\sim},\ U^{\sim}U,\ [U,U^{\sim}],\ \{U,U^{\sim}\} \in \overline{\mathbf{01}} \oplus i\overline{\mathbf{01}},$$
$$[U,U^{\curlywedge}] \in \overline{\mathbf{13}} \oplus i\overline{\mathbf{13}}, \qquad \{U,U^{\curlywedge}\} \in \overline{\mathbf{02}} \oplus i\overline{\mathbf{02}},$$
$$[U,U^{-}] \in i\overline{\mathbf{0123}}, \qquad \{U,U^{\sim\curlywedge}\} \in \overline{\mathbf{0123}},$$
$$UU^{\ddagger},\ U^{\ddagger}U,\ [U,U^{\ddagger}],\ \{U,U^{\ddagger}\} \in \overline{\mathbf{01}} \oplus i\overline{\mathbf{23}},$$
$$UU^{\sim\curlywedge},\ U^{\sim\curlywedge}U,\ [U,U^{\sim\curlywedge}],\ \{U,U^{\sim\curlywedge}\} \in \overline{\mathbf{03}} \oplus i\overline{\mathbf{03}},$$
$$[U,U^{\curlywedge -}] \in \overline{\mathbf{13}} \oplus i\overline{\mathbf{02}}, \qquad \{U,U^{\curlywedge -}\} \in \overline{\mathbf{02}} \oplus i\overline{\mathbf{13}},$$
$$UU^{\ddagger\curlywedge},\ U^{\ddagger\curlywedge}U,\ [U,U^{\ddagger\curlywedge}],\ \{U,U^{\ddagger\curlywedge}\} \in \overline{\mathbf{03}} \oplus i\overline{\mathbf{12}}.$$

$$\begin{array}{lll}
\text{Если} & U\in\overline{\mathbf{01}}\oplus i\overline{\mathbf{01}},\ \overline{\mathbf{23}}\oplus i\overline{\mathbf{23}}, & \text{то}\quad [U,U^{\sim}]=0.\\
\text{Если} & U\in\overline{\mathbf{02}}\oplus i\overline{\mathbf{02}},\ \overline{\mathbf{13}}\oplus i\overline{\mathbf{13}}, & \text{то}\quad [U,U^{\curlywedge}]=0.\\
\text{Если} & U\in\overline{\mathbf{0123}},\ i\overline{\mathbf{0123}}, & \text{то}\quad [U,U^{-}]=0.\\
\text{Если} & U\in\overline{\mathbf{01}}\oplus i\overline{\mathbf{23}},\ \overline{\mathbf{23}}\oplus i\overline{\mathbf{01}}, & \text{то}\quad [U,U^{\ddagger}]=0.\\
\text{Если} & U\in\overline{\mathbf{03}}\oplus i\overline{\mathbf{03}},\ \overline{\mathbf{12}}\oplus i\overline{\mathbf{12}}, & \text{то}\quad [U,U^{\curlywedge\sim}]=0.\\
\text{Если} & U\in\overline{\mathbf{02}}\oplus i\overline{\mathbf{13}},\ \overline{\mathbf{13}}\oplus i\overline{\mathbf{02}}, & \text{то}\quad [U,U^{\curlywedge-}]=0.\\
\text{Если} & U\in\overline{\mathbf{03}}\oplus i\overline{\mathbf{12}},\ \overline{\mathbf{12}}\oplus i\overline{\mathbf{03}}, & \text{то}\quad [U,U^{\ddagger\curlywedge}]=0.
\end{array}$$

10*. Введем понятие *k-мерного коммутатора* и *k-мерного антикоммутатора*, действующих на элементы $U_1,U_2,\ldots,U_k$ алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$, по следующим формулам:

$$[U_1,U_2,\ldots,U_k]=U_1U_2\cdots U_k-U_k\cdots U_2U_1,$$
$$\{U_1,U_2,\ldots,U_k\}=U_1U_2\cdots U_k+U_k\cdots U_2U_1.$$

Доказать следующее утверждение.
Рассмотрим элементы $U_1,U_2,\ldots,U_k$ алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ заданных главных кватернионных типов $\overline{a}_1,\overline{a}_2,\ldots,\overline{a}_k$. Тогда выражение $[U_1,U_2,\ldots,U_k]$ имеет кватернионный тип

$$\big(a_1+a_2+\cdots+a_k+1+(-1)^{\sum_{i<j}^k a_ia_j}\big)\bmod 4,$$

а выражение $\{U_1,U_2,\ldots,U_k\}$ имеет кватернионный тип

$$\big(a_1+a_2+\cdots+a_k+1-(-1)^{\sum_{i<j}^k a_ia_j}\big)\bmod 4.$$

4.2. Алгебры Грассмана

Алгебра Грассмана (или внешняя алгебра) была впервые введена немецким математиком Германом Грассманом (Hermann Gunther Grassmann, 1809–1877) в 1844 г.

Пусть E – есть векторное (линейное) пространство над полем $\mathbb{F}$ вещественных чисел $\mathbb{R}$ или над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Пусть n – натуральное число и размерность пространства E равна $\dim E=2^n$. Пусть в E введен базис

$$e,\ e^a,\ e^{a_1a_2},\ \ldots,e^{1\ldots n},\quad \text{где}\quad a_1<a_2<\cdots,\qquad (\text{их } 2^n \text{ штук}) \tag{4.3}$$

занумерованный упорядоченными мультииндексами длины от 0 до n. Индексы $a, a_1, a_2, \ldots$ пробегают значения от 1 до n.

Введем на E операцию *внешнего умножения* $U, V \to U \wedge V$ по следующим правилам:

1) (дистрибутивность и согласованность с линейной структурой) для любых $U, V, W \in E$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$

$$U \wedge (\alpha V + \beta W) = \alpha U \wedge V + \beta U \wedge W,$$
$$(\alpha U + \beta V) \wedge W = \alpha U \wedge W + \beta V \wedge W;$$

2) (ассоциативность) для любых $U, V, W \in E$

$$(U \wedge V) \wedge W = U \wedge (V \wedge W);$$

3) (унитальность) для любого $U \in E$

$$U \wedge e = e \wedge U = U;$$

4) для всех $a, b = 1, \ldots, n$

$$e^a \wedge e^b = -e^b \wedge e^a; \tag{4.4}$$

5) для всех $1 \leqslant a_1 < \cdots < a_k \leqslant n$

$$e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_k} = e^{a_1 \ldots a_k}.$$

Тогда введенная таким образом алгебра называется *алгеброй Грассмана* и обозначается $\Lambda^{\mathbb{R}}(n)$ в случае поля вещественных чисел и $\Lambda^{\mathbb{C}}(n) = \Lambda(n)$ в случае поля комплексных чисел. В тех случаях, когда рассуждения справедливы для обоих случаев, будем писать $\Lambda^{\mathbb{F}}(n)$.

Элементы e^a называются *генераторами* алгебры Грассмана, элемент e называется *единицей* алгебры Грассмана. Итак, ввиду условий 1)–4) мы имеем ассоциативную некоммутативную унитальную алгебру с определяющими соотношениями (4.4).

Любой элемент U алгебры Грассмана $\Lambda^{\mathbb{F}}(n)$ представляется в виде разложения по базису (4.3)

$$U = ue + u_a e^a + \sum_{a_1 < a_2} u_{a_1 a_2} e^{a_1 a_2} + \cdots + u_{1 \ldots n} e^{1 \ldots n}, \tag{4.5}$$

где $u, u_a, u_{a_1 a_2}, \ldots, u_{1 \ldots n}$ – вещественные (в случае $\Lambda^{\mathbb{R}}(n)$) или комплексные числа (в случае $\Lambda^{\mathbb{C}}(n)$).

Отметим, что алгебра Грассмана $\Lambda^{\mathbb{F}}(n)$ является частным (вырожденным) случаем алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$. А именно, ей соответствует полностью нулевая матрица η (см. (1.2)).

Для алгебры Грассмана аналогичным образом, что и для алгебры Клиффорда (см. параграф 1.3), вводится понятие рангов, четности и кватернионных типов. Подпространство ранга k будем обозначать через $\Lambda^{\mathbb{F}}_k(n)$, $k=0,1,\ldots,n$, четное подпространство через $\Lambda^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Even}}(n)$, нечетное – через $\Lambda^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Odd}}(n)$, подпространства кватернионных типов – через $\Lambda^{\mathbb{F}}_{\overline{k}}(n)$, $k=0,1,2,3$.

Введем обозначения для коммутатора и антикоммутатора элементов алгебры Грассмана $U,V\in\Lambda^{\mathbb{F}}(n)$

$$[U,V]^\wedge = U\wedge V - V\wedge U, \qquad \{U,V\}^\wedge = U\wedge V + V\wedge U \tag{4.6}$$

и отметим, что

$$U\wedge V = \frac{1}{2}[U,V]^\wedge + \frac{1}{2}\{U,V\}^\wedge. \tag{4.7}$$

Для алгебры Грассмана верен аналог теоремы 4.1 для алгебры Клиффорда. В упражнениях предлагается найти подалгебры и подалгебры Ли алгебры Грассмана в виде подпространств кватернионных типов.

Теорема 4.2. *Для элементов алгебры Грассмана $\overset{k}{U},\overset{l}{V}$ заданных рангов k,l верны следующие формулы:*

$$\overset{k}{U}\wedge\overset{l}{V} = (-1)^{kl}\,\overset{l}{V}\wedge\overset{k}{U}, \tag{4.8}$$

$$\overset{k}{U}\wedge\overset{l}{V} = \begin{cases}\overset{k+l}{W}, & \text{если } k+l\leqslant n,\\ 0, & \text{если } k+l>n;\end{cases} \tag{4.9}$$

$$[\overset{k}{U},\overset{l}{V}]^\wedge = \begin{cases}\overset{k+l}{W}, & \text{если } k,l \text{ – нечетные}, k+l\leqslant n,\\ 0 & \text{в остальных случаях};\end{cases} \tag{4.10}$$

$$\{\overset{k}{U},\overset{l}{V}\}^\wedge = \begin{cases}\overset{k+l}{W}, & \text{если } kl \text{ – четно}, k+l\leqslant n,\\ 0 & \text{в остальных случаях}.\end{cases} \tag{4.11}$$

Внешнее умножение в алгебре Клиффорда. В алгебре Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ можно ввести операцию внешнего умножения элементов с помощью формулы

$$e^{a_1}\wedge e^{a_2}\wedge\cdots\wedge e^{a_k} = e^{[a_1}e^{a_2}\cdots e^{a_k]}, \tag{4.12}$$

где квадратные скобки означают операцию альтернирования индексов.

В частности, получаем

$$
\begin{aligned}
e^{a_1} \wedge e^{a_2} &= \frac{1}{2}(e^{a_1}e^{a_2} - e^{a_2}e^{a_1}) = e^{a_1}e^{a_2} - \eta^{a_1a_2}e, \\
e^{a_1} \wedge e^{a_2} \wedge e^{a_3} &= \frac{1}{6}\big(e^{a_1}e^{a_2}e^{a_3} + e^{a_3}e^{a_1}e^{a_2} + e^{a_2}e^{a_3}e^{a_1} \\
&\qquad - e^{a_2}e^{a_1}e^{a_3} - e^{a_1}e^{a_3}e^{a_2} - e^{a_3}e^{a_2}e^{a_1}\big) \\
&= e^{a_1}e^{a_2}e^{a_3} - \eta^{a_2a_3}e^{a_1} + \eta^{a_1a_3}e^{a_2} - \eta^{a_1a_2}e^{a_3},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&e^{a_1} \wedge e^{a_2} \wedge e^{a_3} \wedge e^{a_4} \\
&\quad = \frac{1}{24}(e^{a_1}e^{a_2}e^{a_3}e^{a_4} - e^{a_1}e^{a_2}e^{a_4}e^{a_3} + \cdots) \\
&\quad = e^{a_1}e^{a_2}e^{a_3}e^{a_4} - \eta^{a_3a_4}e^{a_1}e^{a_2} + \eta^{a_2a_4}e^{a_1}e^{a_3} \\
&\qquad - \eta^{a_2a_3}e^{a_1}e^{a_4} - \eta^{a_1a_4}e^{a_2}e^{a_3} + \eta^{a_1a_3}e^{a_2}e^{a_4} - \eta^{a_1a_2}e^{a_3}e^{a_4} \\
&\qquad + (\eta^{a_1a_4}\eta^{a_2a_3} - \eta^{a_1a_3}\eta^{a_2a_4} + \eta^{a_1a_2}\eta^{a_3a_4})e.
\end{aligned}
$$

Из этих формул получаем

$$
e^{a_1} \wedge e^{a_2} = -e^{a_2} \wedge e^{a_1} \qquad \text{для} \quad a_1, a_2 = 1, 2, \ldots, n, \tag{4.13}
$$

$$
e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_k} = e^{a_1} \cdots e^{a_k} = e^{a_1 \ldots a_k} \qquad \text{для} \quad a_1 < \cdots < a_k. \tag{4.14}
$$

Итак, мы получили, что базис Грассмана и базис Клиффорда совпали (4.14). Фактически мы ввели на алгебре Клиффорда структуру алгебры Грассмана.

Клиффордово умножение в алгебре Грассмана. В алгебре Грассмана $\Lambda^{\mathbb{F}}(n)$ можно ввести операцию Клиффордова умножения элементов. Действительно, введем диагональную матрицу η (см. (1.2)) и обратим формулу (4.12).

В частности, получаем

$$
\begin{aligned}
e^{a_1}e^{a_2} &= e^{a_1} \wedge e^{a_2} + \eta^{a_1a_2}e, \\
e^{a_1}e^{a_2}e^{a_3} &= e^{a_1} \wedge e^{a_2} \wedge e^{a_3} + \eta^{a_2a_3}e^{a_1} - \eta^{a_1a_3}e^{a_2} + \eta^{a_1a_2}e^{a_3},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&e^{a_1}e^{a_2}e^{a_3}e^{a_4} \\
&\quad = e^{a_1} \wedge e^{a_2} \wedge e^{a_3} \wedge e^{a_4} + \eta^{a_3a_4}e^{a_1} \wedge e^{a_2} - \eta^{a_2a_4}e^{a_1} \wedge e^{a_3} \\
&\qquad + \eta^{a_2a_3}e^{a_1} \wedge e^{a_4} + \eta^{a_1a_4}e^{a_2} \wedge e^{a_3} - \eta^{a_1a_3}e^{a_2} \wedge e^{a_4} \\
&\qquad + \eta^{a_1a_2}e^{a_3} \wedge e^{a_4} + (\eta^{a_1a_4}\eta^{a_2a_3} + \eta^{a_1a_3}\eta^{a_2a_4} + \eta^{a_1a_2}\eta^{a_3a_4})e.
\end{aligned}
$$

Из этих формул получаем

$$e^{a_1}e^{a_2} + e^{a_2}e^{a_1} = 2\eta^{a_1a_2}e \qquad \text{для} \quad a_1, a_2 = 1, 2, \dots, n, \tag{4.15}$$

$$e^{a_1} \wedge \dots \wedge e^{a_k} = e^{a_1} \cdots e^{a_k} = e^{a_1 \dots a_k} \qquad \text{для} \quad a_1 < \dots a_k \tag{4.16}$$

Итак, мы получили алгебру Клиффорда, причем базис Грассмана и базис Клиффорда совпали (4.16).

Упражнения

1. Докажите теорему 4.2.
2. Показать, что коммутатор двух произвольных элементов алгебры Грассмана будет четным элементом, т.е.

$$[\Lambda^{\mathbb{F}}(n), \Lambda^{\mathbb{F}}(n)]^{\wedge} \subset \Lambda^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Even}}(n).$$

3. Показать, что следующие подпространства являются подалгебрами вещественной алгебры Грассмана:

$$\Lambda^{\mathbb{R}}_{\overline{0}}(n), \qquad \Lambda^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Even}}(n),$$

а следующие подпространства являются подалгебрами комплексной алгебры Грассмана:

$$\Lambda^{\mathbb{R}}_{\overline{0}}(n), \quad \Lambda^{\mathbb{C}}_{\overline{0}}(n), \quad \Lambda^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Even}}(n), \quad \Lambda^{\mathbb{C}}_{\mathrm{Even}}(n),$$
$$\Lambda^{\mathbb{R}}(n), \quad \Lambda^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Even}}(n) \oplus i\Lambda^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Odd}}(n).$$

4. Показать, что следующие подпространства являются подалгебрами Ли вещественной алгебры Грассмана (т.е. замкнуты относительно взятия операции коммутатора):

$$\Lambda^{\mathbb{R}}_{\overline{0}}(n), \quad \Lambda^{\mathbb{R}}_{\overline{2}}(n), \quad \Lambda^{\mathbb{R}}_{\overline{0}}(n) \oplus \Lambda^{\mathbb{R}}_{\overline{2}}(n),$$
$$\Lambda^{\mathbb{R}}_{\overline{1}}(n) \oplus \Lambda^{\mathbb{R}}_{\overline{2}}(n), \quad \Lambda^{\mathbb{R}}_{\overline{2}}(n) \oplus \Lambda^{\mathbb{R}}_{\overline{3}}(n), \quad \Lambda^{\mathbb{R}}_{\overline{0}}(n) \oplus \Lambda^{\mathbb{R}}_{\overline{1}}(n) \oplus \Lambda^{\mathbb{R}}_{\overline{2}}(n),$$
$$\Lambda^{\mathbb{R}}_{\overline{0}}(n) \oplus \Lambda^{\mathbb{R}}_{\overline{2}}(n) \oplus \Lambda^{\mathbb{R}}_{\overline{3}}(n).$$

Лекция 5

5.1. Второй базис в АК

Рассмотрим алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ с фиксированным набором генераторов

$$\{e^a,\, a = 1,\dots,n\}.$$

Базис алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ запишется как

$$\{e^A\} = \{e, e^a, e^{ab}, e^{abc}\dots, e^{1\dots n}\}, \qquad a<b<c<\cdots.$$

Пусть имеется другой набор элементов алгебры Клиффорда

$$\{\beta^a,\, a = 1,\dots,n\} \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q), \tag{5.1}$$

удовлетворяющий определяющим соотношениям

$$\beta^a\beta^b + \beta^b\beta^a = 2\eta^{ab}e. \tag{5.2}$$

Следующее утверждение говорит о том, когда набор

$$\{\beta^A\} = \{e, \beta^a, \beta^{ab}, \beta^{abc}\dots, \beta^{1\dots n}\}, \qquad a<b<c<\cdots. \tag{5.3}$$

будет являться базисом алгебры Клиффорда.

Теорема 5.1 (частично см. в [30], [7]). *Рассмотрим вещественную алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$ и набор* (5.1), *удовлетворяющий соотношениям* (5.2). *Тогда*

1) *если $n = p+q$ – четно, то* (5.3) *является базисом $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$;*
2) *если $n = p+q$ – нечетно, то либо*
   - $\beta^{1\dots n} = \pm e^{1\dots n}$ *и* (5.3) *является базисом,*

   либо
   - $\beta^{1\dots n} = \pm e$ *и* (5.3) *не является базисом (этот случай возможен только в случае $p-q \equiv 1 \bmod 4$).*

Доказательство. Пусть (5.3) не является базисом, т.е. является линейно зависимым набором элементов. Тогда существуют константы $c, c_1, \dots, c_{1\dots n}$, по крайней мере одна из которых отлична от нуля, такие, что

$$ce + c_1\beta^1 + c_2\beta^2 + \cdots + c_{1\dots n}\beta^{1\dots n} = 0.$$

Пусть B – мультииндекс такой, что $c_B \neq 0$. Тогда умножим рассматриваемое выражение на β_B/c_B и получим выражение

$$e + u_1\beta^1 + u_2\beta^2 + \cdots + u_{1\ldots n}\beta^{1\ldots n} = 0, \tag{5.4}$$

где $u_1, \ldots, u_{1\ldots n}$ – некоторые другие константы, причем хотя бы одна из них отлична от нуля (иначе $e = 0$ и приходим к противоречию).

Очевидно, что для любого элемента β^A, кроме $\beta^{1\ldots n}$ в случае нечетного n и кроме e в случае любого n, найдется такой β^a, что β^A антикоммутирует с β^a. Действительно, если $|A|$ – четно, то в качестве a можно взять любой $a \in A$. Если $|A|$ – нечетно, то в качестве a можно взять любой $a \notin A$.

Выберем среди (5.3) любой β^D и любой β^d, антикоммутирующий с β^D. Теперь домножим выражение (5.4) слева на β^d, а справа на $(\beta^d)^{-1}$. Используя коммутируемость или антикоммутируемость элемента β^d с элементами β^A, получим выражение того же вида, но где перед элементом $u_D\beta^D$ стоит знак минус, а перед некоторыми другими выражениями, возможно тоже поменялся знак. Сложим получившееся выражение с (5.4) и получим выражение вида (5.4), но без слагаемого $u_D\beta^D$ (и возможно без некоторых других слагаемых) и с другими константами. Далее продолжим тот же процесс – выбираем среди оставшихся в (5.4) элементов β^A один, выбираем антикоммутирующий с ним элемент β^a и продолжаем описанную процедуру.

В случае четного n процесс закончится тем, что при сложении на каком-то этапе двух уравнений, получим $e = 0$, т.е. противоречие. А значит, (5.3) является базисом.

В случае нечетного n получим

$$e + u_{1\ldots n}\beta^{1\ldots n} = 0,$$

т.е. $\beta^{1\ldots n} = \lambda e$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ – константа.

Так как

$$(\beta^{1\ldots n})^2 = \beta^{1\ldots n}\beta^{1\ldots n} = (-1)^{n(n-1)/2}(-1)^q e, \tag{5.5}$$

то $\lambda = \pm 1$, а значит, $\beta^{1\ldots n} = \pm e$ и $(\beta^{1\ldots n})^2 = e$. Таким образом, необходимым условием является

$$(-1)^{n(n-1)/2+q} = 1,$$

т.е. $n(n-1)/2+q=2k$ для некоторого целого k. Пусть

$$n=p+q=2m+1.$$

Тогда $(2m+1)2m+2q=4k$ и, в итоге

$$p-q-1=4(k-m^2-q).$$

Итак, получили, что (5.3) может не являться базисом только в алгебре Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$, для которой $p-q\equiv 1 \bmod 4$.

Теперь пусть n – нечетно и (5.3) является базисом. Из соотношений (5.2) следует, что $\beta^{1\ldots n}$ лежит в центре алгебры Клиффорда (доказательство как в теореме 2.4), а значит, $\beta^{1\ldots n}=ue+u_{1\ldots n}e^{1\ldots n}$. Тогда

$$(\beta^{1\ldots n})^2=(u^2+u^2_{1\ldots n}(-1)^{n(n-1)/2+q})e+2uu_{1\ldots n}e^{1\ldots n}.$$

Так как $u_{1\ldots n}\neq 0$ (иначе $\beta^{1\ldots n}=ue$ и (5.3) не является базисом), то $u=0$. Кроме того, принимая во внимание (5.5), получаем $u^2_{1\ldots n}=1$ т.е. $u_{1\ldots n}=\pm 1$. Итак, если n – нечетно и (5.3) является базисом, то $\beta^{1\ldots n}=\pm e^{1\ldots n}$. ▷

Теорема 5.2. *Рассмотрим комплексную алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{C}}(p,q)$ и набор (5.1), удовлетворяющий соотношениям (5.2). Тогда*

1) *если $n=p+q$ – четно, то (5.3) является базисом $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{C}}(p,q)$;*
2) *если $n=p+q$ – нечетно, то либо*
   - *$\beta^{1\ldots n}=\pm e^{1\ldots n}$ и (5.3) является базисом,*

   либо
   - *$\beta^{1\ldots n}=\pm e$ и (5.3) не является базисом (этот случай возможен в случае $p-q\equiv 1 \bmod 4$),*

   либо
   - *$\beta^{1\ldots n}=\pm ie$ и (5.3) не является базисом (этот случай возможен в случае $p-q\equiv 3 \bmod 4$).*

Доказательство. Доказательство проводится аналогично доказательству предыдущей теоремы. Отличие в том, что в рассуждениях приходим к выводу, что если набор (5.3) не является базисом, то

$$\beta^{1\ldots n}=\lambda e,\qquad \lambda\in\mathbb{C}.$$

Если выражение $n(n-1)/2+q$ – четно, т.е. $p-q\equiv 1 \bmod 4$, то $\beta^{1\ldots n}=\pm e$. Если выражение $n(n-1)/2+q$ – нечетно, т.е.

$p - q \equiv 3 \bmod 4$, то $\beta^{1\dots n} = \pm ie$. В остальных случаях набор (5.3) является базисом алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{C}}(p,q)$. Проводя те же рассуждения, что и в доказательстве предыдущей теоремы, можно показать, что в этом случае $\beta^{1\dots n} = \pm e^{1\dots n}$. ▷

Теорема 5.3. *Рассмотрим вещественную или комплексную алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ и набор (5.1), удовлетворяющий соотношениям (5.2). Тогда*

1) *если $n = p + q$ – четно, то*

$$\mathrm{Tr}(e) = 1, \qquad \mathrm{Tr}(\beta^{a_1\dots a_k}) = 0, \quad k = 1,\dots,n;$$

2) *если $n = p + q$ – нечетно, то*

$$\mathrm{Tr}(e) = 1, \qquad \mathrm{Tr}(\beta^{a_1\dots a_k}) = 0, \quad k = 1,\dots,n-1,$$

$$\mathrm{Tr}(\beta^{1\dots n}) = \begin{cases} 0, & \text{если (5.3) является базисом,} \\ \pm 1, \pm i & \text{если (5.3) не является базисом.} \end{cases}$$

(Значения $\pm i$ возможны в случае комплексной алгебры Клиффорда.)

Доказательство. Воспользуемся тем же рассуждением, что и при доказательстве теоремы 5.1 (с. 53). Для любого элемента β^A кроме $\beta^{1\dots n}$ в случае нечетного n и кроме e в случае любого n найдется такой β^a, что β^A антикоммутирует с β^a. Действительно, если $|A|$ – четно, то в качестве a можно взять любой $a \in A$. Если $|A|$ – нечетно, то в качестве a можно взять любой $a \notin A$. Тогда в силу свойства операции следа для рассматриваемых A имеем

$$\mathrm{Tr}(\beta^A) = \mathrm{Tr}(-\beta^a \beta^A (\beta^a)^{-1}) = -\mathrm{Tr}(\beta^A) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{Tr}(\beta^A) = 0.$$

▷

Упражнения

1. Рассмотрите алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(2,1)$ и набор элементов

$$\beta^1 = e^1, \qquad \beta^2 = e^2, \qquad \beta^3 = e^{12}.$$

Покажите, что указанный набор удовлетворяет определяющим соотношениям (5.2), но не генерируют базис алгебры Клиффорда. Приведите другие примеры таких наборов (возможно для алгебр Клиффорда других сигнатур).

2. Доказать, что для двух произвольных элементов U, V алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ нечетной размерности n верно
$$\pi(UV) = \pi(VU),$$
где $\pi(U) = \langle U\rangle_n|_{e^{1\ldots n}\to 1} = u_{1\ldots n}$.
3. Используя утверждение из предыдущего упражнения доказать (по аналогии с теоремой 5.3), что для набора (5.1), удовлетворяющего соотношениям (5.2), в случае алгебры Клиффорда нечетной размерности верно следующее:
$$\pi(\beta^{a_1\ldots a_k}) = 0, \qquad k = 1, \ldots, n-1,$$
$$\pi(\beta^{1\ldots n}) = \begin{cases} \pm 1, & \text{если (5.3) является базисом;} \\ 0, & \text{если (5.3) не является базисом.} \end{cases}$$
4. Рассмотрим вещественную или комплексную алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ нечетной размерности n такую, что $p - q \equiv 1 \bmod 4$. Пусть набор (5.1) удовлетворяет соотношениям (5.2). Доказать, что
   (a) если (5.1) генерирует базис алгебры Клиффорда, то набор
   $$\sigma^a = e^{1\ldots n}\beta^a, \qquad a = 1, \ldots, n, \tag{5.6}$$
   будет удовлетворять определяющим соотношениям
   $$\sigma^a\sigma^b + \sigma^b\sigma^a = 2\eta^{ab}e, \tag{5.7}$$
   но не будет генерировать базис алгебры Клиффорда;
   (b) если (5.1) не генерирует базис алгебры Клиффорда, то набор (5.6) будет удовлетворять определяющим соотношениям (5.7) и будет генерировать базис алгебры Клиффорда.
5. Рассмотрим комплексную алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{C}}(p,q)$ нечетной размерности n такую, что $p - q \equiv 3 \bmod 4$, и набор (5.1), удовлетворяющий соотношениям (5.2). Доказать, что
   (a) если (5.1) генерирует базис алгебры Клиффорда, то набор
   $$\sigma^a = ie^{1\ldots n}\beta^a, \qquad a = 1, \ldots, n, \tag{5.8}$$
   будет удовлетворять определяющим соотношениям
   $$\sigma^a\sigma^b + \sigma^b\sigma^a = 2\eta^{ab}e, \tag{5.9}$$
   но не будет генерировать базис алгебры Клиффорда;

(b) если (5.1) не генерирует базис алгебры Клиффорда, то набор (5.8) будет удовлетворять определяющим соотношениям (5.9) и будет генерировать базис алгебры Клиффорда.

6. Рассмотрим вещественную или комплексную алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ нечетной размерности n (оба случая $p-q\equiv 1 \bmod 4$ и $p-q\equiv 3 \bmod 4$), и набор (5.1), удовлетворяющий соотношениям (5.2). Доказать, что

$$\sigma^a = e^{1\ldots n}\beta^{1\ldots n}\beta^a, \qquad a=1,\ldots,n \tag{5.10}$$

будет всегда удовлетворять определяющим соотношениям

$$\sigma^a\sigma^b+\sigma^b\sigma^a = 2\eta^{ab}e \tag{5.11}$$

и генерировать базис алгебры Клиффорда.

5.2. Теоремы о коммутировании элементов базиса

Теорема 5.4. *Пусть $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ – алгебра Клиффорда сигнатуры (p,q) размерности $n=p+q$. Обозначим через $\{e^{b_1\ldots b_m}\}$ набор из 2^n базисных элементов алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$, занумерованных упорядоченными мультииндексами длины от 0 до n. Пусть $e^{a_1\ldots a_k}$ – произвольный элемент базиса. Тогда*

1) *если n – четно, то элемент $e^{a_1\ldots a_k}$ (в случае, когда он отличен от e) коммутирует с 2^{n-1} элементами базиса и антикоммутирует с остальными 2^{n-1} элементами базиса (элемент e коммутирует со всеми 2^n элементами базиса $e^{b_1\ldots b_m}$);*
2) *если n – нечетно, то элемент $e^{a_1\ldots a_k}$ (в случае когда он отличен от e и $e^{1\ldots n}$) коммутирует с 2^{n-1} элементами базиса и антикоммутирует с остальными 2^{n-1} элементами базиса (элементы e и $e^{1\ldots n}$ коммутируют со всеми 2^n элементами базиса $e^{b_1\ldots b_m}$);*

Доказательство. Пусть i – число совпадающих индексов в мультииндексах $a_1\ldots a_k$ и $b_1\ldots b_m$. Тогда для каждого i число наборов $b_1\ldots b_m$ для фиксированного набора $a_1\ldots a_k$ равно $C_k^i C_{n-k}^{m-i}$. При коммутировании элемента $e^{a_1\ldots a_k}$ с элементом $e^{b_1\ldots b_m}$ появляется множитель $(-1)^{km-i}$. Посчитаем сколько элементов $e^{b_1\ldots b_m}$ коммутирует с $e^{a_1\ldots a_k}$ (для них $km-i$ – четно).

Пусть k – четно и отлично от 0 и n. Тогда i должно быть четно. Значит, число коммутирующих элементов равно

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{n}\sum_{i\text{ – Even}} C_k^i C_{n-k}^{m-i} &= \sum_{m=0}^{n}(C_k^0 C_{n-k}^m + C_k^2 C_{n-k}^{m-2} + \dots)\\
&= C_k^0 C_{n-k}^0\\
&\quad + C_k^0 C_{n-k}^1\\
&\quad + C_k^0 C_{n-k}^2 + C_k^2 C_{n-k}^0\\
&\quad + C_k^0 C_{n-k}^3 + C_k^2 C_{n-k}^1\\
&\quad + \cdots\\
&= (C_k^0 + C_k^2 + C_k^4 + \cdots)(C_{n-k}^0 + C_{n-k}^1 + C_{n-k}^2 + \cdots)\\
&= \left(\sum_{j\text{ – Even}}^{k} C_k^j\right)\left(\sum_{j=0}^{n-k} C_{n-k}^j\right) = 2^{k-1}2^{n-k} = 2^{n-1}.\end{aligned}$$

Пусть k – нечетно и отлично от n. Тогда $m-i$ должно быть четно. Значит число коммутирующих элементов равно

$$\begin{aligned}\sum_{m\text{ – Even}}\sum_{i\text{ – Even}} C_k^i C_{n-k}^{m-i} + \sum_{m\text{ – Odd}}\sum_{i\text{ – Odd}} C_k^i C_{n-k}^{m-i}\\
= 2^{n-2} + 2^{n-2} = 2^{n-1},\end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned}\sum_{m\text{ – Even}}\sum_{i\text{ – Even}} C_k^i C_{n-k}^{m-i} &= \sum_{m\text{ – Even}}^{n}(C_k^0 C_{n-k}^m + C_k^2 C_{n-k}^{m-2} + \cdots)\\
&= C_k^0 C_{n-k}^0\\
&\quad + C_k^0 C_{n-k}^2 + C_k^2 C_{n-k}^0\\
&\quad + C_k^0 C_{n-k}^4 + C_k^2 C_{n-k}^2 + C_k^4 C_{n-k}^0\\
&\quad + \cdots\\
&= (C_k^0 + C_k^2 + C_k^4 + \cdots)(C_{n-k}^0 + C_{n-k}^2 + C_{n-k}^4 + \cdots)\\
&= \left(\sum_{j\text{ – Even}}^{k} C_k^j\right)\left(\sum_{j\text{ – Even}}^{n-k} C_{n-k}^j\right) = 2^{k-1}2^{n-k-1} = 2^{n-2}\end{aligned}$$

и

$$\sum_{m\text{ – Odd}}\sum_{i\text{ – Odd}} C_k^i C_{n-k}^{m-i} = \sum_{m\text{ – Odd}}^{n}(C_k^1 C_{n-k}^{m-1} + C_k^3 C_{n-k}^{m-3} + \dots)$$

$$
\begin{aligned}
&= C_k^1 C_{n-k}^0 \\
&\qquad + C_k^1 C_{n-k}^2 + C_k^3 C_{n-k}^0 \\
&\qquad + C_k^1 C_{n-k}^4 + C_k^3 C_{n-k}^2 + C_k^5 C_{n-k}^0 \\
&\qquad + \cdots \\
&= (C_k^1 + C_k^3 + C_k^5 + \cdots)(C_{n-k}^0 + C_{n-k}^2 + C_{n-k}^4 + \cdots) \\
&= \Bigg(\sum_{j\text{ -- Odd}}^{k} C_k^j\Bigg)\Bigg(\sum_{j\text{ -- Even}}^{n-k} C_{n-k}^j\Bigg) = 2^{k-1}2^{n-k-1} = 2^{n-2}.
\end{aligned}
$$

Случаи $k=0$ и $k=n$ тривиальны и следуют из теорем 2.4 (с. 26) и 2.5 (с. 27) о центре алгебры Клиффорда, однако их можно вывести таким же способом: для $k=0$ имеем

$$\sum_{m=0}^{n} \sum_{i\text{ -- Even}} C_0^i C_n^{m-i} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n.$$

Для $k=n$ в случае четного n имеем

$$\sum_{m=0}^{n} \sum_{i\text{ -- Even}} C_n^i C_0^{m-i} = \sum_{i\text{ -- Even}}^{n} C_n^i = 2^{n-1},$$

в случае нечетного n

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m\text{ -- Even}} \sum_{i\text{ -- Even}} C_n^i C_0^{m-i} + \sum_{m\text{ -- Odd}} \sum_{i\text{ -- Odd}} C_n^i C_0^{m-i} \\
&\qquad = \sum_{i\text{ -- Even}}^{n} C_n^i + \sum_{i\text{ -- Odd}}^{n} C_n^i = 2^n.
\end{aligned}
$$

$\triangleright$

Следующая теорема уточняет утверждение из теоремы 5.4 (с. 58). А именно, далее говорится о том, что число четных и нечетных элементов базиса среди коммутирующих и антикоммутирующих с выделенным элементом одинаково.

Теорема 5.5. *Пусть $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ – алгебра Клиффорда сигнатуры (p,q) размерности $n=p+q$. Обозначим через $\{e^{b_1\ldots b_m}\}$ набор из 2^n базисных элементов алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$, занумерованных упорядоченными мультииндексами длины от 0 до n. Пусть $e^{a_1\ldots a_k}$ – произвольный элемент базиса.*

Тогда элемент $e^{a_1\ldots a_k}$ (в случае, когда он отличен от e и $e^{1\ldots n}$) коммутирует с 2^{n-2} четными элементами базиса, коммутирует с 2^{n-2} нечетными элементами базиса, антикоммутирует с 2^{n-2} четными элементами базиса и антикоммутирует с 2^{n-2} нечетными элементами базиса $e^{b_1\ldots b_m}$. В оставшихся выделенных случаях имеем:

1) *если n – четно, то e коммутирует со всеми 2^n элементами базиса $e^{b_1\ldots b_m}$, а $e^{1\ldots n}$ коммутирует со всеми 2^{n-1} четными элементами базиса и антикоммутирует со всеми 2^{n-1} нечетными элементами базиса;*
2) *если n – нечетно, то e и $e^{1\ldots n}$ коммутируют со всеми 2^n элементами базиса $e^{b_1\ldots b_m}$.*

Доказательство. Нетрудно проверить, что отдельные суммы по четным и нечетным m, рассмотренные в доказательстве предыдущей теоремы, равняются по 2^{n-2}. ▷

Заметим, что в утверждениях теорем 5.4 (с. 58), 5.5 (с. 60) можно рассматривать произвольные наборы элементов

$$\beta^a, \qquad a = 1, \ldots, n$$

алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$, удовлетворяющие соотношениям

$$\beta^a\beta^b + \beta^b\beta^a = 2\eta^{ab}e$$

с диагональной матрицей η (так как при доказательстве утверждений мы не пользовались, что эти элементы генерируют базис).

Упражнения

1. Провести полное доказательство теоремы 5.5.
2. Проводя рассуждения, похожие на рассуждения при доказательстве теоремы 5.4, доказать, что для произвольного элемента $\overset{k}{U} \in \mathcal{C}\ell^{\mathbb{F}}_k(p,q)$ ранга k имеет место следующая формула:

$$e_{b_1\ldots b_m}\overset{k}{U}e^{b_1\ldots b_m} = (-1)^{km}\left(\sum_{i=0}^{m}(-1)^i C_k^i C_{n-k}^{m-i}\right)\overset{k}{U}, \qquad (5.12)$$

где в левой части ведется суммирование по упорядоченным мультииндексам $b_1 \ldots b_m$.

3. Просуммировать формулу из предыдущего упражнения по всем мультииндексам длины m от 0 до n и получить другое доказательство теоремы 5.6 (см. далее).

5.3. Свертки и обобщенные свертки в АК

Будем рассматривать свертки вида $\gamma_A U \gamma^A$, где подразумевается суммирование по упорядоченному мультииндексу A длины от 0 до n и

$$\gamma_A = \gamma_{a_1 \dots a_k} = \gamma_{a_k} \cdots \gamma_{a_1}, \qquad \gamma_a = \eta_{ab}\gamma^b = (\gamma^a)^{-1}.$$

Через $\mathcal{I}$ будем обозначать множество мультииндексов длины от 0 до n

$$\mathcal{I} = \{\varnothing, 1, \dots, n, 12, 13, \dots, 1\dots n\},$$

где $\varnothing$ – пустой мультииндекс.

Длину мультииндекса будем обозначать через $|A|$.

Введем следующие обозначения для множеств мультииндексов с четной длиной:

$$\mathcal{I}_{\mathrm{Even}} = \{A \in \mathcal{I}, \quad |A| - \text{четно}\} = \{\varnothing, 12, 13, \dots, 1234, \dots\},$$

и нечетной длиной:

$$\mathcal{I}_{\mathrm{Odd}} = \{A \in \mathcal{I}, \quad |A| - \text{нечетно}\} = \{1, 2, \dots, 123, \dots\}.$$

Будем обозначать проекцию элемента U алгебры Клиффорда на подпространство элементов ранга n через

$$\pi(U) = \langle U \rangle_n|_{e^{1\dots n} \to 1} = u_{1\dots n}.$$

Теорема 5.6. *Пусть U – произвольный элемент алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ и $\{\gamma^A\}$ – базис. Тогда*

$$\gamma_A U \gamma^A = \begin{cases} 2^n(\mathrm{Tr}(U)e), & n \text{ – четное}, \\ 2^n(\mathrm{Tr}(U)e + \pi(U)e^{1\dots n}), & n \text{ – нечетное}. \end{cases} \tag{5.13}$$

Доказательство. Нам нужно доказать, что для элемента алгебры Клиффорда $\overset{k}{U}$ ранга k

$$\gamma_A \overset{k}{U} \gamma^A = \begin{cases} 2^n \overset{0}{U}, & k = 0, \\ 0, & k = 1, \dots, n-1, \\ 2^n \overset{n}{U}, & k = n - \text{нечетное}, \\ 0, & k = n - \text{четное}. \end{cases} \tag{5.14}$$

Обозначим $T = \gamma_A \overset{k}{U} \gamma^A$. Имеем

$$(\gamma^a)^{-1} T \gamma^a = \sum_A (\gamma^A \gamma^a)^{-1} \overset{k}{U} (\gamma^A \gamma^a) = \sum_A (\gamma^A)^{-1} \overset{k}{U} \gamma^A = T,$$

где нет суммирования по индексу $a = 1, 2, \ldots n$. Таким образом T лежит в центре алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p, q)$.

Таким образом, находим $\gamma_A \overset{k}{U} \gamma^A = 0$ для $1 \leqslant k \leqslant n-1$ и четном $k = n$.

При $k = 0$ получаем

$$\gamma_A (ue) \gamma^A = \sum_{m=0}^{n} C_n^m (ue) = 2^n ue,$$

и при нечетном $k = n$ получаем

$$\gamma_A (u_{1\ldots n} e^{1\ldots n}) \gamma^A = \sum_{m=0}^{n} C_n^m (u_{1\ldots n} e^{1\ldots n}) = 2^n u_{1\ldots n} e^{1\ldots n},$$

так как рассматриваемые элементы лежат в центре алгебры Клиффорда. $\triangleright$

Теперь рассмотрим два различных набора элементов

$$\gamma^a, \quad \beta^a, \qquad a = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.15}$$

удовлетворяющих определяющим соотношениям:

$$\gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a = 2\eta^{ab} e, \tag{5.16}$$

$$\beta^a \beta^b + \beta^b \beta^a = 2\eta^{ab} e. \tag{5.17}$$

Будем часто дополнительно предполагать, что рассматриваемые наборы генерируют базисы алгебры Клиффорда. Рассмотрим произвольный элемент $U \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p, q)$ и свертку вида

$$\beta^A U \gamma_A. \tag{5.18}$$

Выражения (5.18) будем называть *обобщенными свертками.*

Лемма 5.1. *Пусть $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p, q)$ – алгебра Клиффорда произвольной конечной размерности $n = p + q$, $\{\gamma^A\}$ и $\{\beta^A\}$ – базисы алгебры Клиффорда и $F \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p, q)$. Рассмотрим элемент*

$$T = \beta^A F \gamma_A. \tag{5.19}$$

Тогда имеем

$$\beta^B T = T\gamma^B \qquad \forall B, \tag{5.20}$$

в частности,

$$\beta^b T = T\gamma^b \qquad \forall b = 1, \ldots, n. \tag{5.21}$$

Доказательство. Домножим выражение (5.19) слева на β^B, а справа на γ_B, где B - произвольный мультииндекс. Тогда имеем (суммирования по B нет)

$$\beta^B T(\gamma^B)^{-1} = \sum_A (\beta^B\beta^A)F(\gamma^B\gamma^A)^{-1} = \sum_A (\beta^A)F(\gamma^A)^{-1} = T,$$

так как при домножении всех элементов β^A на любой β^B с точностью до знака получим тот же набор элементов, но в другом порядке. ▷

Рассмотрим наряду со сверткой (5.19) свертку

$$Q = \gamma^A G\beta_A, \tag{5.22}$$

для которой в силу леммы 5.1 (с. 63) будем аналогично иметь

$$\gamma^B Q = Q\beta^B \qquad \forall B. \tag{5.23}$$

Лемма 5.2. 1. *В случае алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ четной размерности $n = p + q$ с базисами $\{\gamma^A\}$ и $\{\beta^A\}$ для элементов (5.19) и (5.22) имеем*

$$QT = TQ = 2^n \mathrm{Tr}(GT)e = 2^n \mathrm{Tr}(TG)e = 2^n \mathrm{Tr}(FQ)e = 2^n \mathrm{Tr}(QF)e. \tag{5.24}$$

2. *В случае алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ нечетной размерности $n = p + q$ с базисами $\{\gamma^A\}$ и $\{\beta^A\}$ для элементов (5.19) и (5.22) имеем*

$$QT = TQ = 2^n(\mathrm{Tr}(GT)e + \pi(GT)e^{1\ldots n}), \tag{5.25}$$

где также имеем

$$\mathrm{Tr}(GT) = \mathrm{Tr}(TG) = \mathrm{Tr}(QF) = \mathrm{Tr}(FQ),$$
$$\pi(GT) = \pi(TG) = \pi(QF) = \pi(FQ).$$

Доказательство. Рассмотрим выражение (5.22) и домножим его справа на T. Затем воспользуемся (5.20) и (5.13) и получим

$$QT = \gamma^A G \beta_A T = \gamma^A G T \gamma_A = 2^n \mathrm{Tr}(GT) e.$$

В случае алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ нечетной размерности n действуем аналогично и получаем

$$QT = \gamma^A G \beta_A T = \gamma^A G T \gamma_A = 2^n (\mathrm{Tr}(GT) e + \pi(GT) e^{1\ldots n}).$$

Остальные равенства предоставляется доказать по аналогии читателю. ▷

Лемма 5.3. *Рассмотрим алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ произвольной конечной размерности $n = p+q$ и наборы (5.15), удовлетворяющие соотношениям (5.16) и (5.17). Тогда*

$$\beta^A \gamma^B \gamma_A \gamma_B = \begin{cases} 2^n e, & n \text{ – четное,} \\ 2^n (e + \beta^{1\ldots n} \gamma_{1\ldots n}), & n \text{ – нечетное.} \end{cases} \tag{5.26}$$

Доказательство. Пусть n – четно. Рассмотрим следующие выражения, где прокоммутировали элемент γ^B с каждым из γ_A и вынесли его за скобку справа:

$$\begin{aligned} \beta^A e \gamma_A &= e + \beta^1 \gamma_1 + \cdots + \beta^{1\ldots n} \gamma_{1\ldots n}, \\ \beta^A \gamma^1 \gamma_A &= (e + \beta^1 \gamma_1 - \cdots - \beta^{1\ldots n} \gamma_{1\ldots n}) \gamma^1, \\ \beta^A \gamma^2 \gamma_A &= (e - \beta^1 \gamma_1 + \cdots - \beta^{1\ldots n} \gamma_{1\ldots n}) \gamma^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta^A \gamma^{1\ldots n} \gamma_A &= (e - \beta^1 \gamma_1 - \cdots + \beta^{1\ldots n} \gamma_{1\ldots n}) \gamma^{1\ldots n}. \end{aligned}$$

Теперь домножим каждую строчку справа на элемент γ_B и сложим все уравнения. В силу теоремы 5.4 (с. 58) при сложении уравнений в каждом столбце кроме первого будет 2^{n-1} элементов вида $\beta^{b_1\ldots b_m} \gamma_{b_1\ldots b_m}$ и 2^{n-1} элементов с противоположным знаком $-\beta^{b_1\ldots b_m} \gamma_{b_1\ldots b_m}$. Тогда первый столбец даст вклад $2^n e$, а все остальные столбцы дадут нулевой вклад, что завершает доказательство случая четного n.

В случае нечетного n действуем аналогично и после складывания правых и левых частей уравнений в силу теоремы 5.4 (с. 58) получим

$$2^n (e + \beta^{1\ldots n} \gamma_{1\ldots n}),$$

так как вклад дадут только первый и последний столбцы, где все слагаемые будут с положительным знаком. ▷

Следующая лемма является уточнением предыдущего утверждения. А именно, рассмотрим подобные свертки, в которых суммирование ведется только по части индексов.

Лемма 5.4. *Рассмотрим алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ произвольной конечной размерности $n=p+q$ и наборы (5.15), удовлетворяющие соотношениям (5.16) и (5.17). Тогда*

$$\sum_A \sum_{B\in\mathcal{I}_{\mathrm{Even}}} \beta^A\gamma^B\gamma_A\gamma_B = \begin{cases} 2^{n-1}(e+\beta^{1\ldots n}\gamma_{1\ldots n}), & n \text{ – четное},\\ 2^{n-1}(e+\beta^{1\ldots n}\gamma_{1\ldots n}), & n \text{ – нечетное}, \end{cases} \tag{5.27}$$

и

$$\sum_A \sum_{B\in\mathcal{I}_{\mathrm{Odd}}} \beta^A\gamma^B\gamma_A\gamma_B = \begin{cases} 2^{n-1}(e-\beta^{1\ldots n}\gamma_{1\ldots n}), & n \text{ – четное},\\ 2^{n-1}(e+\beta^{1\ldots n}\gamma_{1\ldots n}), & n \text{ – нечетное}. \end{cases} \tag{5.28}$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству предыдущей леммы. При этом пользуемся утверждением из теоремы 5.5 (с. 60) (что ровно половина из четных элементов базиса коммутирует с выделенным элементом базиса и ровно половина антикоммутирует). То же самое верно для нечетных элементов базиса. ▷

Следующее утверждение вытекает из лемм 5.3 (с. 65) и 5.4 (с. 66).

Лемма 5.5. *Рассмотрим алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ произвольной конечной размерности $n=p+q$ и выражение*

$$T=\beta^A F\gamma_A,$$

где F – произвольный элемент алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ и наборы (5.15) удовлетворяют соотношениям (5.16) и (5.17).

1. *Если n – четно, то среди элементов γ^A всегда найдется такой элемент F, что T отличен от нулевого элемента. Причем, F найдется среди $\{\gamma^A,\ |A|$ – четный $\}$, если $\beta^{1\ldots n}\neq-\gamma^{1\ldots n}$, и найдется среди $\{\gamma^A,\ |A|$ – нечетный$\}$, если $\beta^{1\ldots n}\neq\gamma^{1\ldots n}$.*

2. *Если n – нечетно и $\beta^{1\ldots n}\neq-\gamma^{1\ldots n}$, то среди элементов γ^A всегда найдется такой элемент F, что T отличен от нулевого*

элемента. Причем, F найдется среди $\{\gamma^A,\ |A|$ – четный$\}$ и среди $\{\gamma^A,\ |A|$ – нечетный$\}$.

Доказательство. Пусть n – четно. Проведем доказательство от противного. Пусть для всех элементов F элемент $T = \beta^A F \gamma_A$ равен нулевому элементу. Но тогда по лемме 5.3 (с. 65)

$$2^n e = (\beta^A \gamma^B \gamma_A)\gamma_B = 0 \sum_B \gamma_B = 0$$

и приходим к противоречию.

Аналогично, с использованием формул (5.26), (5.27), (5.28), доказываются все остальные утверждения теоремы. ▷

Упражнения

1. Рассмотрим алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ произвольной конечной размерности $n = p + q$. Докажите, что для элемента (5.19) имеем
$$\beta^A T \gamma_A = 2^n T.$$
Другими словами, оператор $\tau(F) = \beta^A F \gamma_A / 2^n$ является проектором $\tau^2 = \tau$.
2. Рассмотрите свертку вида
$$W = \sum_{A\in\mathcal{I}_{\mathrm{Even}}} \beta^A F \gamma_A - \sum_{A\in\mathcal{I}_{\mathrm{Odd}}} \beta^A F \gamma_A = (-1)^{|A|}\beta^A F \gamma_A, \tag{5.29}$$
где ведется суммирование по A и через $|A|$ обозначена длина мультииндекса A.
Докажите (аналог леммы 5.1), что для любого F и построенного по нему W (5.29) имеем
$$\beta^B W = \begin{cases} W\gamma^B, & |B| \text{ – четно},\\ \beta^B W = -W\gamma^B, & |B| \text{ – нечетно}, \end{cases}$$
в частности,
$$\beta^b W = -W\gamma^b, \qquad \forall b = 1,\ldots,n.$$
3. Рассмотрим алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ произвольной конечной размерности $n = p + q$. Показать, что для элемента (5.29) имеем
$$\beta^A W \gamma_A = 0.$$

Кроме того

$$(-1)^{|A|}\beta^A W\gamma_A = W.$$

Другими словами, оператор $\tau'(F) = (-1)^{|A|}\beta^A F\gamma_A$ является проектором $\tau'^2 = \tau'$.

4. Рассмотрим наряду со сверткой (5.29) свертку вида

$$Z = \sum_{A\in\mathcal{I}_{\mathrm{Even}}} \gamma^A G\beta_A - \sum_{A\in\mathcal{I}_{\mathrm{Odd}}} \gamma^A G\beta_A = (-1)^{|A|}\gamma^A G\beta_A. \quad (5.30)$$

Доказать, что

(a) в случае алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ четной размерности $n = p+q$ для элементов (5.29) и (5.30) имеем

$$\begin{aligned} WZ = ZW &= 2^n\mathrm{Tr}(GW)e = 2^n\mathrm{Tr}(WG)e \\ &= 2^n\mathrm{Tr}(FZ)e = 2^n\mathrm{Tr}(ZF)e; \end{aligned} \quad (5.31)$$

(b) в случае алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ нечетной размерности $n = p+q$ для элементов (5.29) и (5.30) имеем

$$WZ = 2^n(\mathrm{Tr}(GW)e + \pi(GW)e^{1\ldots n}), \quad (5.32)$$

где также имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(GW) = \mathrm{Tr}(WG) = \mathrm{Tr}(ZF) = \mathrm{Tr}(FZ), \\ \pi(GW) = \pi(WG) = \pi(ZF) = \pi(FZ). \end{aligned}$$

5. Рассмотрим алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ произвольной конечной размерности $n = p+q$ и наборы (5.15). Доказать, что

$$(-1)^{|A|}\beta^A\gamma^B\gamma_A\gamma_B = \begin{cases} 2^n e, & n - \text{четное}, \\ 2^n(e - \beta^{1\ldots n}\gamma_{1\ldots n}), & n - \text{нечетное}, \end{cases} \quad (5.33)$$

или в частном случае

$$(-1)^{|A|}e^A e^B e_A e_B = \begin{cases} 2^n e, & n - \text{четное}, \\ 0, & n - \text{нечетное}. \end{cases} \quad (5.34)$$

6. Рассмотрим алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ произвольной конечной размерности $n = p+q$ и наборы (5.15). Доказать,

что

$$\sum_{A}\sum_{B\in\mathcal{I}_{\mathrm{Even}}}(-1)^{|A|}\beta^A\gamma^B\gamma_A\gamma_B$$
$$=\begin{cases}2^{n-1}(e+\beta^{1\ldots n}\gamma_{1\ldots n}), & n - \text{четное},\\ 2^{n-1}(e-\beta^{1\ldots n}\gamma_{1\ldots n}), & n - \text{нечетное},\end{cases} \quad (5.35)$$

и

$$\sum_{A}\sum_{B\in\mathcal{I}_{\mathrm{Odd}}}(-1)^{|A|}\beta^A\gamma^B\gamma_A\gamma_B$$
$$=\begin{cases}2^{n-1}(e-\beta^{1\ldots n}\gamma_{1\ldots n}), & n - \text{четное},\\ 2^{n-1}(e-\beta^{1\ldots n}\gamma_{1\ldots n}), & n - \text{нечетное}.\end{cases} \quad (5.36)$$

7. Рассмотрим алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ произвольной конечной размерности $n=p+q$, выражение (5.29) и наборы (5.15). Доказать, что
   (a) если n – четно, то среди элементов γ^A всегда найдется такой элемент F, что W отличен от нулевого элемента; причем, F найдется среди $\{\gamma^A,\ |A| - \text{четный}\}$, если $\beta^{1\ldots n}\neq-\gamma^{1\ldots n}$, и найдется среди $\{\gamma^A,\ |A| - \text{нечетный}\}$, если $\beta^{1\ldots n}\neq\gamma^{1\ldots n}$;
   (b) если n – нечетно и $\beta^{1\ldots n}\neq\gamma^{1\ldots n}$, то среди элементов γ^A всегда найдется такой элемент F, что W отличен от нулевого элемента. Причем, F найдется среди $\{\gamma^A,\ |A| - \text{четный}\}$ и среди $\{\gamma^A,\ |A| - \text{нечетный}\}$.

   Заметим, что это утверждение отличается от утверждения леммы 5.5 (с. 66) в случае нечетного n условием $\beta^{1\ldots n}\neq+\gamma^{1\ldots n}$.

Лекция 6

6.1. Теорема Паули в случае размерности 4

Паули в 1936 г. опубликовал [31] свою так называемую фундаментальную теорему для гамма-матриц Дирака γ^a, $a = 0, 1, 2, 3$ (о матрицах Дирака см. в параграфе 1.2). Эта теорема играет ключевую роль при изучении различных вопросов, возникающих в теории поля (см., например, [32]). С помощью теоремы Паули доказывается лоренц-инвариантность уравнения Дирака, описывается связь спинорных и ортогональных групп, воодится понятие спинора Майорана.

Теорема 6.1 (Паули). *Пусть два набора квадратных комплексных матриц*

$$\gamma^a, \quad \beta^a, \qquad a = 0, 1, 2, 3, \tag{6.1}$$

размера 4 удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a &= 2\eta^{ab}\mathbf{1}, \\ \beta^a\beta^b + \beta^b\beta^a &= 2\eta^{ab}\mathbf{1}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Тогда существует единственная, с точностью до умножения на комплексное число, матрица T такая, что

$$\gamma^a = T^{-1}\beta^a T \tag{6.3}$$

для всех $a = 0, 1, 2, 3$.

В [35] можно найти обобщение этой теоремы для произвольного четного $n = 2k$ числа гамма-матриц

$$\gamma^a, \qquad a = 1, 2, \ldots, 2k. \tag{6.4}$$

Под гамма-матрицами понимаются квадратные комплексные матрицы порядка 2^k, удовлетворяющие соотношениям

$$\gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a = 2\delta^{ab}\mathbf{1}, \tag{6.5}$$

где δ^{ab} – символы Кронекера.

Имеются общеизвестные утверждения, которые в некотором смысле обобщают теорему Паули на случай произвольной размерности. А именно, методами теории представлений несложно показать, что алгебра Клиффорда имеет единственное (с точностью до эквивалентности) неприводимое представление в случае четной размерности и два неприводимых представления в случае нечетной размерности. Данные утверждения применяются в различных вопросах математической физики, в частности, в теории суперсимметрии (см., например, [33], [34]).

Ниже мы рассматриваем более общий вопрос (который не всегда сводится к рассмотрению представлений) о связи двух наборов элементов алгебры Клиффорда, удовлетворяющих определяющим антикоммутационным соотношениям. Сформулированы и доказаны обобщения теоремы Паули на случай алгебр Клиффорда произвольных четных и нечетных размерностей над полем вещественных и комплексных чисел. Кроме того указаны явные алгоритмы для вычисления элемента, осуществляющего связь двух наборов.

Упражнения

1. Ознакомиться с доказательством теоремы 6.1 (матричным аналогом, см. [31], [35]). В следующих параграфах мы применим формализм алгебры Клиффорда для доказательства подобных утверждений.

6.2. Обобщенная теорема Паули (ОТП) в АК четной размерности

Вначале рассмотрим случай алгебры Клиффорда четной размерности n.

Заметим, что верно следующее утверждение. Пусть набор β^a удовлетворяет определяющим соотношениям (6.2) алгебры Клиффорда. Тогда и набор (6.8), построенный с помощью произвольного обратимого элемента алгебры Клиффорда $T \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$, удовлетворяет определяющим соотношениям (6.2), так как

$$\begin{aligned}\gamma^a\gamma^b+\gamma^b\gamma^a &= T^{-1}\beta^a T T^{-1}\beta^b T + T^{-1}\beta^b T T^{-1}\beta^a T\\ &= T^{-1}2\eta^{ab}eT = 2\eta^{ab}e.\end{aligned}$$

Оказывается верным и обратное утверждение.

Теорема 6.2. *Пусть $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ – вещественная (или комплексная) алгебра Клиффорда четной размерности $n = p + q$. Пусть два набора элементов алгебры Клиффорда*

$$\gamma^a, \quad \beta^a, \qquad a = 1, 2, \ldots, n, \tag{6.6}$$

удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a &= 2\eta^{ab}e, \\ \beta^a\beta^b + \beta^b\beta^a &= 2\eta^{ab}e. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Тогда оба набора генерируют базисы алгебры Клиффорда и существует единственный, с точностью до умножения на вещественное (соответственно комплексное) число, элемент алгебры Клиффорда $T \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ такой, что

$$\gamma^a = T^{-1}\beta^a T \qquad \forall a = 1, \ldots, n. \tag{6.8}$$

При этом, такой элемент T всегда найдется среди элементов вида

$$T = \beta^A F \gamma_A,$$

где в качестве элемента F подойдет любой такой элемент из $\{\gamma^A,\ A \in \mathcal{I}_{\mathrm{Even}}\}$, если $\beta^{1\ldots n} \neq -\gamma^{1\ldots n}$, или из $\{\gamma^A,\ A \in \mathcal{I}_{\mathrm{Odd}}\}$, если $\beta^{1\ldots n} \neq \gamma^{1\ldots n}$, что построенный по нему T отличен от нуля: $T \neq 0$.

Доказательство. Первое утверждение теоремы следует из теорем 5.1 (с. 53) и 5.2 (с. 55).

Возьмем произвольные элементы алгебры Клиффорда $F, G \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ и рассмотрим суммы (5.19) и (5.22). Тогда для рассматриваемых элементов верны соотношения (5.21) и (5.24). Подбираем элемент F так, чтобы T был отличен от нулевого элемента (это возможно в силу леммы 5.5 (с. 66)). Далее выбираем элемент G так, чтобы $\mathrm{Tr}(GT) \neq 0$. Так как $T \neq 0$, то в качестве G подойдет по крайней мере один из элементов базиса алгебры Клиффорда $\{e^A\}$. Итак, мы подобрали элементы F и G так, что

$$\mathrm{Tr}(GT) \neq 0.$$

Тогда из (5.24) получаем, что T обратим и из (5.21) получаем нужные соотношения (6.8).

Теперь покажем, что элемент T определяется с точностью до умножения на произвольную константу. Действительно, пусть два элемента T_1 и T_2 удовлетворяют соотношениям (6.8). Тогда для любых $a = 1, \ldots, n$ имеем

$$T_1^{-1}\beta^a T_1 = T_2^{-1}\beta^a T_2.$$

Домножая это равенство слева на T_1, а справа на $(T_2)^{-1}$, получим

$$[T_1 T_2^{-1}, \beta^a] = 0, \qquad a = 1, \ldots, n,$$

а значит, $T_1 T_2^{-1} = \mu e$, т.е. $T_1 = \mu T_2$, где константа $\mu \neq 0$.

В процессе доказательства стало ясно, что элемент T всегда найдется в виде

$$T = \beta^A F \gamma_A,$$

где в качестве элемента F достаточно перебрать все элементы базиса алгебры Клиффорда $\{\gamma^A\}$ до того момента, когда не получим элемент T, отличный от нулевого элемента. При разных F будут получаться пропорциональные элементы T (и, в частности, нулевой элемент, который нам не подходит). Причем, F найдется среди $\{\gamma^A, A \in \mathcal{I}_{\mathrm{Even}}\}$, если $\beta^{1\ldots n} \neq -\gamma^{1\ldots n}$, и найдется среди $\{\gamma^A, A \in \mathcal{I}_{\mathrm{Odd}}\}$, если $\beta^{1\ldots n} \neq \gamma^{1\ldots n}$ по лемме 5.5 (с. 66). ▷

Сформулируем также одно следствие из теоремы 6.2 (с. 72). Чтобы его получить, достаточно рассмотреть два набора элементов $\{\gamma^a\}$ и $\{-\beta^a\}$ и применить к ним теорему 6.2 (с. 72).

Следствие 6.1. *Пусть $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ – алгебра Клиффорда четной размерности $n = p + q$. Пусть два набора элементов алгебры Клиффорда (6.6) удовлетворяют соотношениям (6.7). Тогда оба набора генерируют базисы алгебры Клиффорда и существует единственный, с точностью до умножения на константу, элемент алгебры Клиффорда $T \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ такой, что*

$$\gamma^a = -T^{-1}\beta^a T, \qquad a = 1, \ldots, n. \tag{6.9}$$

При этом, такой элемент T всегда найдется среди элементов вида

$$T = (-1)^{|A|}\beta^A F \gamma_A,$$

где в качестве элемента F подойдет любой такой элемент из $\{\gamma^A, A \in \mathcal{I}_{\mathrm{Even}}\}$, если $\beta^{1\ldots n} \neq -\gamma^{1\ldots n}$, или из $\{\gamma^A, A \in \mathcal{I}_{\mathrm{Odd}}\}$, если $\beta^{1\ldots n} \neq \gamma^{1\ldots n}$, что построенный по нему T отличен от нуля: $T \neq 0$.

Отметим, что для нечетной размерности (см. следующие параграфы) для заданных двух наборов элементов каждый раз будет выполнено только одно из тождеств (6.8), (6.9).

Упражнения

1. Рассмотрим проектор $\tau(F) = \beta^A F \gamma_A / 2^n$. Показать с помощью ОТП, что
$$\tau(F_1) = \lambda \tau(F_2) \tag{6.10}$$
для любых $F_1, F_2 \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$, $\tau(F_2) \neq 0$.
2. Показать, что $T = \beta^A F \gamma_A$ имеет следующий вид
$$T = C(f_A) h(\beta^A, \gamma^A), \tag{6.11}$$
где $C(f_A)$ – константа, зависящая от коэффициентов f_A разложения по базису элемента $F = f_A e^A$, а $h(\beta^A, \gamma^A)$ – элемент алгебры Клиффорда, не зависящий от элемента F, а зависящий только от наборов β^A, γ^A.
3. Рассмотрим вещественную или комплексную алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ четной размерности $n = p + q$ и элемент $T = \beta^A F \gamma_A$, где F – произвольный элемент алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$. Показать, что
$$\mathrm{Tr}(T^{-1} F) = \frac{1}{2^n}\,. \tag{6.12}$$

6.3. ОТП в АК четной размерности для нечетных элементов

Рассмотрим вещественную или комплексную алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ и набор (5.1), удовлетворяющий определяющим соотношениям (5.2).

Тогда в случае нечетной алгебры Клиффорда элемент $\beta^{1\ldots n}$ принимает значения $\pm e^{1\ldots n}$, если набор генерирует базис, и определенные значения, если не генерирует (см. теоремы 5.1 (с. 53) и 5.2 (с. 55)).

В случае четной алгебры Клиффорда набор (5.1), удовлетворяющий (5.2), генерирует базис всегда. Однако элемент $\beta^{1\ldots n}$ может принимать значения, отличные от $\pm e^{1\ldots n}$.

Например, в алгебре Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(0,2)$ набор $\{\beta^a\} = \{e^1, e^{12}\}$ удовлетворяет определяющим соотношениям и генерирует базис. При этом значение $\beta^{12} = -e^2 \neq e^{12}$.

Однако при дополнительном предположении на набор β^a, мы получим, что $\beta^{1\ldots n} = \pm e^{1\ldots n}$ является необходимым условием. А именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 6.3. *Рассмотрим вещественную или комплексную алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ четной размерности n и набор (5.1), удовлетворяющий соотношениям (5.2), причем*

$$\beta^a \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Odd}}(p,q) \qquad \forall a = 1,2,\ldots,n.$$

Тогда

$$\beta^{1\ldots n} = \pm e^{1\ldots n}.$$

Доказательство. Из определяющих соотношений следует, что элемент $\beta^{1\ldots n}$ антикоммутирует со всеми элементами β^A, $A \in \mathcal{I}_{\mathrm{Odd}}$ и коммутирует со всеми элементами β^A, $A \in \mathcal{I}_{\mathrm{Even}}$ (см. теорему 5.5 (с. 60)). Так как $\beta^a \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Odd}}(p,q)$ и β^A, $A \in \mathcal{I}$ образуют базис в алгебре Клиффорда, то можно утверждать, что $\beta^{1\ldots n}$ коммутирует со всеми четными элементами алгебры Клиффорда и антикоммутирует со всеми нечетными элементами. Но тогда, опять же, по теореме 5.5 (с. 60) имеем $\beta^{1\ldots n} = \lambda e^{1\ldots n}$.

Так как $(\beta^{1\ldots n})^2 = (e^{1\ldots n})^2 = -(1)^{n(n-1)/2+q} e$, то получаем, что $\lambda = \pm 1$. ▷

Теперь переформулируем теорему 6.2 (с. 72) при дополнительных предположениях, что $\gamma^a, \beta^a \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Odd}}(p,q)$.

Теорема 6.4. *Пусть $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ – вещественная (или комплексная) алгебра Клиффорда четной размерности $n = p+q$. Пусть два набора нечетных элементов алгебры Клиффорда*

$$\gamma^a,\ \beta^a \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Odd}}(p,q), \qquad a = 1,2,\ldots,n, \tag{6.13}$$

удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a &= 2\eta^{ab} e, \\ \beta^a\beta^b + \beta^b\beta^a &= 2\eta^{ab} e. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Тогда оба набора генерируют базисы алгебры Клиффорда и выражения $\gamma^{1\ldots n}$, $\beta^{1\ldots n}$ принимают значения $\pm e^{1\ldots n}$.

Кроме того, существует единственный, с точностью до умножения на вещественное (соответственно комплексное) число, элемент алгебры Клиффорда T такой, что

$$\gamma^a = T^{-1}\beta^a T \qquad \forall a = 1,\ldots,n. \tag{6.15}$$

При этом

- $T \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Even}}(p,q)$, *если* $\beta^{1\ldots n} = \gamma^{1\ldots n}$;
- $T \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Odd}}(p,q)$, *если* $\beta^{1\ldots n} = -\gamma^{1\ldots n}$.

Кроме того, такой элемент T всегда найдется среди элементов вида

$$T = \beta^A F \gamma_A,$$

где в качестве элемента F подойдет любой такой элемент из

- $\{\gamma^A, A \in \mathcal{I}_{\mathrm{Even}}\}$, *если* $\beta^{1\ldots n} = \gamma^{1\ldots n}$;
- $\{\gamma^A, A \in \mathcal{I}_{\mathrm{Odd}}\}$, *если* $\beta^{1\ldots n} = -\gamma^{1\ldots n}$,

что построенный по нему T отличен от нуля $T \neq 0$.

Доказательство. Теорема следует из теоремы 6.2 (с. 72), если учесть теорему 6.3 (с. 75). ▷

Теперь сформулируем теорему, вытекающую из предложенных рассуждений, которая нам понадобится в дальнейшем при рассмотрении двулистных накрытий ортогональных групп спинорными.

Теорема 6.5. *Пусть $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ – вещественная (или комплексная) алгебра Клиффорда четной размерности $n = p+q$. Пусть два набора нечетных элементов алгебры Клиффорда*

$$\gamma^a,\ \beta^a \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Odd}}(p,q), \qquad a = 1,2,\ldots,n, \tag{6.16}$$

удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a &= 2\eta^{ab}e, \\ \beta^a\beta^b + \beta^b\beta^a &= 2\eta^{ab}e. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Тогда оба набора генерируют базисы алгебры Клиффорда и выражения $\gamma^{1\ldots n}$, $\beta^{1\ldots n}$ принимают значения $\pm e^{1\ldots n}$.

Утверждается, что существует единственный, с точностью до умножения на вещественное (соответственно комплексное) число, элемент алгебры Клиффорда T такой, что

$$\gamma^a = T^{\curlywedge -1}\beta^a T \qquad \forall a = 1,\ldots,n. \tag{6.18}$$

При этом

- $T \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Even}}(p,q)$, *если* $\beta^{1\ldots n} = \gamma^{1\ldots n}$;
- $T \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Odd}}(p,q)$, *если* $\beta^{1\ldots n} = -\gamma^{1\ldots n}$.

Кроме того, такой элемент T всегда найдется среди элементов

- $T = \beta^A F \gamma_A, \quad$ *если* $\beta^{1\dots n} = \gamma^{1\dots n}$;
- $T = (-1)^{|A|}\beta^A F \gamma_A, \quad$ *если* $\beta^{1\dots n} = -\gamma^{1\dots n}$,

где в качестве элемента F подойдет любой такой элемент из

- $\{\gamma^A, A \in \mathcal{I}_{\mathrm{Even}}\}, \quad$ *если* $\beta^{1\dots n} = \gamma^{1\dots n}$;
- $\{\gamma^A, A \in \mathcal{I}_{\mathrm{Odd}}\}, \quad$ *если* $\beta^{1\dots n} = -\gamma^{1\dots n}$,

что построенный по нему T отличен от нуля $T \neq 0$.

Доказательство. Пусть $\beta^{1\dots n} = \gamma^{1\dots n}$. Тогда по теореме 6.4 (с. 75) будет существовать необходимый нам элемент $T \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Even}}(p,q)$, так как тогда $T^{\curlywedge} = T$. Если же $\beta^{1\dots n} = -\gamma^{1\dots n}$, то по следствию 6.1 (с. 73) (которое надо переформулировать в соответствии с дополнительными требованиями $\beta^a, \gamma^a \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Odd}}(p,q)$) будет существовать $T \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Odd}}(p,q)$ такой, что $\gamma^a = -T^{-1}\beta^a T$. Но в этом случае имеем $T^{\curlywedge} = -T$. $\triangleright$

6.4. ОТП в АК нечетной размерности для нечетных элементов

Сначала докажем аналог теоремы Паули для случая алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ нечетной размерности $n = p + q$ в частном случае, а именно, когда наборы элементов γ^a и β^a принадлежат нечетному подпространству $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Odd}}(p,q)$ алгебры Клиффорда. В этом случае доказательство оказывается сравнительно более простым, чем в общем случае.

Заметим, что часто в литературе допускают только замены базиса алгебры Клиффорда, сохраняющие подпространство элементов ранга один $V = \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_1(p,q)$. Этот случай укладывается в нижеследующую теорему, так как

$$\gamma^a,\ \beta^a \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_1(p,q) \subset \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Odd}}(p,q).$$

Случай, разобранный в предложенной теореме, также выделен среди остальных случаев тем, что мы имеем из него нетривиальное следствие (см. теорему 6.7 (с. 80)), позволяющее записать утверждение теоремы единой формулой $\gamma^a = (T^{\curlywedge})^{-1}\beta^a T$, в которой элемент T оказывается единственным с точностью до умножения на произвольную константу.

Общие формулировки теорем для всевозможных наборов γ^a, β^a приведены ниже (см. теоремы 6.8 (с. 83) и 6.9 (с. 85)).

В силу теорем 5.1 (с. 53) и 5.2 (с. 55) в случае нечетной алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ набор (5.1), удовлетворяющий определяющим соотношениям (5.2), будет генерировать базис алгебры Клиффорда (в случае $\beta^{1\ldots n} = \pm e^{1\ldots n}$) или не будет генерировать базис (в случаях $\beta^{1\ldots n} = \pm e$ и $\beta^{1\ldots n} = \pm ie$, последний случай реализуется в комплексной алгебре Клиффорда). В следующем утверждении наборы (6.19) являются нечетными элементами, а значит, возможными значениями являются только $\beta^{1\ldots n} = \pm e^{1\ldots n}$, $\gamma^{1\ldots n} = \pm e^{1\ldots n}$ и наборы генерируют два разных базиса алгебры Клиффорда. При этом возможны два случая $\beta^{1\ldots n} = \gamma^{1\ldots n}$ и $\beta^{1\ldots n} = -\gamma^{1\ldots n}$, о которых и идет речь в утверждении.

Теорема 6.6. *Пусть $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ – вещественная (или комплексная) алгебра Клиффорда нечетной размерности $n = p+q$. Пусть два набора нечетных элементов алгебры Клиффорда*

$$\gamma^a,\ \beta^a \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Odd}}(p,q), \qquad a = 1,2,\ldots,n, \tag{6.19}$$

удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a &= 2\eta^{ab}e, \\ \beta^a\beta^b + \beta^b\beta^a &= 2\eta^{ab}e. \end{aligned} \tag{6.20}$$

Тогда наборы (6.19) генерируют базисы алгебры Клиффорда, а выражения $\gamma^{1\ldots n}$ и $\beta^{1\ldots n}$ принимают значения $\pm e^{1\ldots n}$.

Утверждается, что существует единственный, с точностью до умножения на обратимый элемент центра, элемент алгебры Клиффорда $T \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Even}}(p,q)$ (а значит, и другой $T \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Odd}}(p,q)$, полученный из первого умножением на $e^{1\ldots n}$) такой, что

- *имеем*
$$\gamma^a = T^{-1}\beta^a T \qquad \forall a = 1,\ldots,n, \tag{6.21}$$
тогда и только тогда, когда $\beta^{1\ldots n} = \gamma^{1\ldots n}$;
- *имеем*
$$\gamma^a = -T^{-1}\beta^a T \qquad \forall a = 1,\ldots,n, \tag{6.22}$$
тогда и только тогда, когда $\beta^{1\ldots n} = -\gamma^{1\ldots n}$.

При этом в обоих случаях элемент T найдется среди элементов вида

$$\sum_{A\in\mathcal{I}_{\mathrm{Even}}} \beta^A F\gamma_A,$$

где в качестве F всегда подойдет любой такой из элементов $\{\gamma^A, A\in\mathcal{I}_{\mathrm{Even}}\}$ (и любой такой из элементов $\{\gamma^A, A\in\mathcal{I}_{\mathrm{Odd}}\}$), что построенный по нему элемент T отличен от нуля $T\neq 0$.

Доказательство. Так как $\gamma^a,\beta^a\in\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Odd}}(p,q)$, то эти наборы генерируют базисы алгебры Клиффорда (см. теоремы 5.1 (с. 53) и 5.2 (с. 55)) и выражения $\beta^{1\ldots n}$ и $\gamma^{1\ldots n}$ равняются $\pm e^{1\ldots n}$.

Возьмем произвольные элементы алгебры Клиффорда $F,G\in\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ и рассмотрим суммы (5.19) и (5.22). Тогда для рассматриваемых элементов верны соотношения (5.21) и (5.25).

Пусть $\beta^{1\ldots n}\neq-\gamma^{1\ldots n}$, т.е. $\beta^{1\ldots n}=\gamma^{1\ldots n}$. Тогда по лемме 5.5 (с. 66) существует элемент F такой, что T отличен от нуля. Причем в качестве F всегда подойдет один из элементов базиса γ^A. Тогда из вида элемента T (5.19) заключаем, что $T\in\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Even}}(p,q)\cup\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Odd}}(p,q)$.

Теперь выбираем элемент G так, чтобы одно из выражений $\mathrm{Tr}(GT)$, $\pi(GT)$ равнялось нулю, а другое было отлично от нуля. Так как $T\neq 0$ – либо четный, либо нечетный элемент, то в качестве G подойдет по крайней мере один из элементов базиса алгебры Клиффорда $\{e^A\}$. Теперь пользуемся леммой 5.2 (с. 64) и получаем, что T обратим и из (5.21) получаем соотношения

$$\gamma^a=T^{-1}\beta^a T.$$

Теперь пусть $\beta^{1\ldots n}=-\gamma^{1\ldots n}$. Тогда рассмотрим набор

$$\sigma^a=-\beta^a,\qquad a=1,\ldots,n,$$

который, очевидно, тоже удовлетворяет определяющим соотношениям и генерирует базис алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$. Для этого набора имеем

$$\sigma^{1\ldots n}=(-1)^n\beta^{1\ldots n}=-\beta^{1\ldots n}\neq\gamma^{1\ldots n}.$$

Тогда уже по доказанному получаем

$$\gamma^a=T^{-1}\sigma^a T=-T^{-1}\beta^a T.$$

Теперь покажем, что элемент T определяется с точностью до умножения на необратимый элемент центра алгебры Клиффорда. Действительно, пусть два элемента T_1 и T_2 удовлетворяют соотношениям (6.21). Тогда для любых $a = 1, \ldots, n$ имеем

$$T_1^{-1}\beta^a T_1 = T_2^{-1}\beta^a T_2.$$

Домножая это равенство слева на T_1, а справа на $(T_2)^{-1}$, получим

$$[T_1 T_2^{-1}, \beta^a] = 0, \qquad a = 1, \ldots, n,$$

а значит, $T_1 T_2^{-1}$ лежит в центре алгебры Клиффорда.

Элемент T надо искать в случае $\beta^{1\ldots n} = \gamma^{1\ldots n}$ в виде

$$T = \beta^A F \gamma_A,$$

а в случае $\beta^{1\ldots n} = -\gamma^{1\ldots n}$ в виде

$$T = (-1)^{|A|}\beta^A F \gamma_A.$$

Но можно показать, что

$$\beta^A F\gamma_A = 2\sum_{A\in\mathcal{I}_{\mathrm{Even}}} \beta^A F\gamma_A \qquad \text{в случае} \quad \beta^{1\ldots n} = \gamma^{1\ldots n},$$

$$\sum_{A\in\mathcal{I}_{\mathrm{Even}}} \beta^A F\gamma_A = -\sum_{A\in\mathcal{I}_{\mathrm{Odd}}} \beta^A F\gamma_A \qquad \text{в случае} \quad \beta^{1\ldots n} = -\gamma^{1\ldots n}$$

(см. упражнения).

По лемме 5.5 (с. 66) в качестве элемента F подойдет один из элементов

$$\gamma^A, \qquad A \in \mathcal{I}_{\mathrm{Even}}.$$

$\triangleright$

Теперь сформулируем теорему, которая нам понадобится далее при доказательстве теоремы о двулистном накрытии ортогональных групп спинорными.

Теорема 6.7. *Пусть $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ – вещественная (или комплексная) алгебра Клиффорда нечетной размерности $n = p+q$. Пусть два набора нечетных элементов алгебры Клиффорда*

$$\gamma^a,\ \beta^a \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Odd}}(p,q), \qquad a = 1, 2, \ldots, n, \tag{6.23}$$

удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a &= 2\eta^{ab}e, \\ \beta^a\beta^b + \beta^b\beta^a &= 2\eta^{ab}e. \end{aligned} \tag{6.24}$$

Тогда оба набора генерируют базисы алгебры Клиффорда, а выражения $\gamma^{1\dots n}$ и $\beta^{1\dots n}$ принимают значения $\pm e^{1\dots n}$.

Утверждается, что существует единственный, с точностью до умножения на вещественное (соответственно комплексное) число, элемент алгебры Клиффорда T такой, что

$$\gamma^a = (T^\curlywedge)^{-1}\beta^a T \qquad \forall a = 1,\dots,n. \tag{6.25}$$

При этом

- $T \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Even}}(p,q)$, *если* $\beta^{1\dots n} = \gamma^{1\dots n}$;
- $T \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Odd}}(p,q)$, *если* $\beta^{1\dots n} = -\gamma^{1\dots n}$.

Кроме того, такой элемент T всегда найдется среди элементов

$$\sum_{A\in\mathcal{I}_{\mathrm{Even}}} \beta^A F e_A,$$

где в качестве F подойдет любой такой из

- $\{\gamma^A, A\in\mathcal{I}_{\mathrm{Even}}\}$, *если* $\beta^{1\dots n} = \gamma^{1\dots n}$;
- $\{\gamma^A, A\in\mathcal{I}_{\mathrm{Odd}}\}$, *если* $\beta^{1\dots n} = -\gamma^{1\dots n}$,

что построенный по нему T отличен от нуля $T \neq 0$.

Доказательство. Действительно, вернемся к доказательству теоремы 6.6 (с. 78). Если $\beta^{1\dots n} = \gamma^{1\dots n}$, то необходимо в качестве F брать обязательно один из $\{\gamma^A, A\in\mathcal{I}_{\mathrm{Even}}\}$ (это возможно – см. лемму 5.5 (с. 66)). Так как $\gamma^a \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Odd}}(p,q)$, то

$$\{\gamma^A, A\in\mathcal{I}_{\mathrm{Even}}\} \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Even}}(p,q),$$

а значит, T будет четным и $T^\curlywedge = T$.

В случае $\beta^{1\dots n} = -\gamma^{1\dots n}$ в качестве T нужно брать наоборот один из $\{\gamma^A, A\in\mathcal{I}_{\mathrm{Odd}}\}$, и тогда T – нечетный и $-T = T^\curlywedge$. Таким образом, получили (6.25).

Теперь покажем, что элемент T определяется с точностью до умножения на константу. Действительно, пусть два элемента T_1 и T_2 удовлетворяют соотношениям (6.25). Тогда для любых $a = 1,\dots,n$ имеем

$$(T_1^\curlywedge)^{-1}\beta^a T_1 = (T_2^\curlywedge)^{-1}\beta^a T_2.$$

Домножая это равенство слева на $T_1^{\curlywedge}$, а справа на $(T_2)^{-1}$, получим

$$\beta^a T_1 T_2^{-1} = (T_1 T_2^{-1})^{\curlywedge} \beta^a, \qquad a = 1, \ldots, n.$$

Можно показать, что в этом случае элемент $T_1 T_2^{-1}$ равняется константе (см. упражнения). $\triangleright$

Упражнения

1. Доказать, что

$$\beta^A F \gamma_A = 2 \sum_{A \in \mathcal{I}_{\mathrm{Even}}} \beta^A F \gamma_A \quad \text{в случае} \quad \beta^{1\ldots n} = \gamma^{1\ldots n},$$

$$\sum_{A \in \mathcal{I}_{\mathrm{Even}}} \beta^A F \gamma_A = - \sum_{A \in \mathcal{I}_{\mathrm{Odd}}} \beta^A F \gamma_A \quad \text{в случае} \quad \beta^{1\ldots n} = -\gamma^{1\ldots n}.$$

2. Показать, что если элемент $T \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ удовлетворяет тождествам

$$e^a T = T^{\curlywedge} e^a, \qquad a = 1, 2, \ldots, n,$$

то T равняется константе. Доказательство проводится наподобие доказательству теоремы 2.4 (с. 26).

3. Рассмотрим вещественную (комплексную) алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ нечетной размерности $n = p + q$. Пусть наборы нечетных элементов (6.19) удовлетворяют соотношениям (6.20). Доказать, что
   (a) при $\beta^{1\ldots n} = \gamma^{1\ldots n}$

$$\tau(F_1) = Z \tau(F_2) \tag{6.26}$$

   для любых $F_1, F_2 \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$, $\tau(F_2) \neq 0$, где Z – обратимый элемент центра алгебры Клиффорда или $Z = 0$;
   (b) при $\beta^{1\ldots n} = -\gamma^{1\ldots n}$

$$\tau'(F_1) = Z \tau'(F_2) \tag{6.27}$$

   для любых $F_1, F_2 \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$, $\tau'(F_2) \neq 0$, где Z – обратимый элемент центра алгебры Клиффорда или $Z = 0$.

4. Рассмотрим вещественную (комплексную) алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ нечетной размерности $n = p + q$. Пусть наборы нечетных элементов (6.19) удовлетворяют соотношениям (6.20). Доказать, что

(a) в случае $\beta^{1\ldots n}=\gamma^{1\ldots n}$

$$T=\beta^A F\gamma_A = Z(f_A)h(\beta^A,\gamma^A), \tag{6.28}$$

(b) в случае $\beta^{1\ldots n}=-\gamma^{1\ldots n}$

$$T=(-1)^{|A|}\beta^A F\gamma_A = Z(f_A)h(\beta^A,\gamma^A), \tag{6.29}$$

где $Z(f_A)$ равен нулю или является обратимым элементом центра алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$, зависящим от коэффициентов f_A разложения по базису элемента $F=f_Ae^A$, а $h(\beta^A,\gamma^A)$ – элемент алгебры Клиффорда, не зависящий от элемента F, а зависящий только от наборов β^A,γ^A.

6.5. ОТП в АК нечетной размерности в общей постановке

Дадим общую формулировку обобщения теоремы Паули на случай алгебр Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ нечетной размерности (уже без предположения, что рассматриваемые наборы γ^a, β^a являются нечетными элементами).

Заметим, что в силу теоремы 5.1 (с. 53) в случае вещественной алгебры Клиффорда нечетной размерности кроме случаев $\beta^{1\ldots n}=\pm\gamma^{1\ldots n}$ возможными случаями являются также $\beta^{1\ldots n}=\pm e^{1\ldots n}\gamma^{1\ldots n}$ (только в случае $p-q\equiv 1 \bmod 4$), когда один из наборов (6.30) не генерирует базис алгебры Клиффорда, а другой генерирует.

Теорема 6.8. *Пусть $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$ – вещественная алгебра Клиффорда нечетной размерности $n=p+q$. Пусть два набора элементов алгебры Клиффорда*

$$\gamma^a,\ \beta^a,\qquad a=1,2,\ldots,n, \tag{6.30}$$

удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}\gamma^a\gamma^b+\gamma^b\gamma^a&=2\eta^{ab}e,\\ \beta^a\beta^b+\beta^b\beta^a&=2\eta^{ab}e.\end{aligned} \tag{6.31}$$

Тогда в случае алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$ сигнатуры $p-q\equiv 1 \bmod 4$ элементы $\gamma^{1\ldots n}$ и $\beta^{1\ldots n}$ либо принимают значения $\pm e^{1\ldots n}$ и тогда соответствующие наборы генерируют базисы алгебры

Клиффорда, либо принимают значения $\pm e$ и тогда наборы не генерируют базисы. В этом случае реализуются случаи 1, 2, 3, 4.

В случае алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$ сигнатуры $p-q\equiv 3 \bmod 4$ элементы $\gamma^{1\ldots n}$ и $\beta^{1\ldots n}$ всегда принимают значения $\pm e^{1\ldots n}$ и соответствующие наборы всегда генерируют базисы алгебры Клиффорда. В этом случае реализуются только случаи 1 *и* 2.

Утверждается, что существует единственный, с точностью до умножения на обратимый элемент центра алгебры Клиффорда, элемент алгебры Клиффорда T такой, что

1) *выполнено*

$$\gamma^a = T^{-1}\beta^a T \qquad \forall a=1,\ldots,n \tag{6.32}$$

тогда и только тогда, когда $\beta^{1\ldots n}=\gamma^{1\ldots n}$ (в этом случае оба набора генерируют базисы, либо оба не генерируют);

2) *выполнено*

$$\gamma^a = -T^{-1}\beta^a T \qquad \forall a=1,\ldots,n \tag{6.33}$$

тогда и только тогда, когда $\beta^{1\ldots n}=-\gamma^{1\ldots n}$ (в этом случае оба набора генерируют базисы, либо оба не генерируют);

3) *выполнено*

$$\gamma^a = e^{1\ldots n}T^{-1}\beta^a T \qquad \forall a=1,\ldots,n \tag{6.34}$$

тогда и только тогда, когда $\beta^{1\ldots n}=e^{1\ldots n}\gamma^{1\ldots n}$ (в этом случае один из наборов генерирует базис, а другой – нет);

4) *выполнено*

$$\gamma^a = -e^{1\ldots n}T^{-1}\beta^a T \qquad \forall a=1,\ldots,n \tag{6.35}$$

тогда и только тогда, когда $\beta^{1\ldots n}=-e^{1\ldots n}\gamma^{1\ldots n}$ (в этом случае один из наборов генерирует базис, а другой – нет).

Заметим, что все четыре случая имеют единую запись в виде

$$\gamma^a = (\beta^{1\ldots n}\gamma_{1\ldots n})T^{-1}\beta^a T.$$

В случае вещественной алгебры Клиффорда $p-q\equiv 1 \bmod 4$ элемент T, о существовании которого говорится во всех четырех случаях теоремы, всегда найдется среди элементов вида

$$\sum_{A\in\mathcal{I}_{\mathrm{Even}}} \beta^A F \gamma_A,$$

где в качестве F всегда подойдет один из элементов

$$\gamma^A+\gamma^B, \qquad A,B\in\mathcal{I}_{\mathrm{Even}}.$$

В случае вещественной алгебры Клиффорда сигнатуры $p-q\equiv 3\bmod 4$ *элемент* T, *о существовании которого говорится в* 1, 2 *случаях теоремы, всегда найдется среди элементов вида*

$$\sum_{A\in\mathcal{I}_{\mathrm{Even}}}\beta^A F\gamma_A.$$

Причем в качестве F подойдет любой такой из элементов

$$\gamma^A, \qquad A\in\mathcal{I}_{\mathrm{Even}},$$

что построенный по нему элемент T отличен от нуля $T\neq 0$.

Заметим, что верно и следующее, более простое, утверждение. Если набор β^a удовлетворяет определяющим соотношениям, то и все наборы γ^a (6.32), (6.33), (6.34), (6.35), построенные по произвольному обратимому элементу алгебры Клиффорда $T\in\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$, удовлетворяют определяющим соотношениям (6.31).

Теперь сформулируем соответствующее утверждение для комплексной алгебры Клиффорда.

Теорема 6.9. *Пусть* $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{C}}(p,q)$ – *комплексная алгебра Клиффорда нечетной размерности* $n=p+q$. *Пусть два набора элементов алгебры Клиффорда*

$$\gamma^a,\ \beta^a, \qquad a=1,2,\ldots,n, \tag{6.36}$$

удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}\gamma^a\gamma^b+\gamma^b\gamma^a&=2\eta^{ab}e,\\ \beta^a\beta^b+\beta^b\beta^a&=2\eta^{ab}e.\end{aligned} \tag{6.37}$$

Тогда в случае алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{C}}(p,q)$ *сигнатуры* $p-q\equiv 1\bmod 4$ *имеем для элементов* $\gamma^{1\ldots n}$ *и* $\beta^{1\ldots n}$ *возможные значения* $\pm e^{1\ldots n}$, *когда соответствующие наборы генерируют базисы алгебры Клиффорда, а также значения* $\pm e$, *когда наборы не генерируют базис. В этом случае реализуются* 1, 2, 3 *и* 4 *случаи теоремы.*

В алгебре Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{C}}(p,q)$ *сигнатуры* $p-q \equiv 3 \bmod 4$ *имеем для элементов* $\gamma^{1\ldots n}$ *и* $\beta^{1\ldots n}$ *возможные значения* $\pm e^{1\ldots n}$, *когда соответствующие наборы генерируют базисы алгебры Клиффорда, а также значения* $\pm ie$, *когда наборы не будут генерировать базис. В этом случае реализуются* 1, 2, 5 *и* 6 *случаи теоремы.*

Утверждается, что существует единственный, с точностью до умножения на обратимый элемент центра алгебры Клиффорда, элемент алгебры Клиффорда T *такой, что*

1) *выполнено*

$$\gamma^a = T^{-1}\beta^a T \qquad \forall a = 1,\ldots,n \tag{6.38}$$

тогда и только тогда, когда $\beta^{1\ldots n} = \gamma^{1\ldots n}$ (*в этом случае оба набора генерируют базисы, либо оба не генерируют*);

2) *выполнено*

$$\gamma^a = -T^{-1}\beta^a T \qquad \forall a = 1,\ldots,n \tag{6.39}$$

тогда и только тогда, когда $\beta^{1\ldots n} = -\gamma^{1\ldots n}$ (*в этом случае оба набора генерируют базисы, либо оба не генерируют*);

3) *выполнено*

$$\gamma^a = e^{1\ldots n}T^{-1}\beta^a T \qquad \forall a = 1,\ldots,n \tag{6.40}$$

тогда и только тогда, когда $\beta^{1\ldots n} = e^{1\ldots n}\gamma^{1\ldots n}$ (*в этом случае один из наборов генерирует базис, а другой – нет*);

4) *выполнено*

$$\gamma^a = -e^{1\ldots n}T^{-1}\beta^a T \qquad \forall a = 1,\ldots,n \tag{6.41}$$

тогда и только тогда, когда $\beta^{1\ldots n} = -e^{1\ldots n}\gamma^{1\ldots n}$ (*в этом случае один из наборов генерирует базис, а другой – нет*);

5) *выполнено*

$$\gamma^a = ie^{1\ldots n}T^{-1}\beta^a T \qquad \forall a = 1,\ldots,n \tag{6.42}$$

тогда и только тогда, когда $\beta^{1\ldots n} = ie^{1\ldots n}\gamma^{1\ldots n}$ (*в этом случае один из наборов генерирует базис, а другой – нет*);

6) *выполнено*

$$\gamma^a = -ie^{1\ldots n}T^{-1}\beta^a T \qquad \forall a = 1,\ldots,n \tag{6.43}$$

тогда и только тогда, когда $\beta^{1\ldots n} = -ie^{1\ldots n}\gamma^{1\ldots n}$ (*в этом случае один из наборов генерирует базис, а другой – нет*).

Заметим, что все шесть случаев имеют единую запись в виде

$$\gamma^a = (\beta^{1\dots n}\gamma_{1\dots n})T^{-1}\beta^a T.$$

Кроме того, элемент T, о существовании которого говорится во всех шести случаях теоремы, всегда найдется среди элементов вида

$$\sum_{A\in\mathcal{I}_{\mathrm{Even}}} \beta^A F \gamma_A,$$

где в качестве F всегда подойдет один из элементов вида

$$\gamma^A + \gamma^B, \qquad A, B \in \mathcal{I}_{\mathrm{Even}}.$$

Заметим, что верно следующее утверждение, которое проверяется напрямую. Если набор β^a удовлетворяет определяющим соотношениям, то и все наборы γ^a (6.38), (6.39), (6.40), (6.41), (6.42), (6.43), построенные по произвольному обратимому элементу алгебры Клиффорда $T \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{C}}(p,q)$, удовлетворяют определяющим соотношениям (6.37).

Мы опускаем доказательство предложенных теорем в силу их громоздкости.

Упражнения

1. Переформулировать обобщенные теоремы Паули (см. предыдущие параграфы) в матричном формализме. Для этого используйте изоморфизмы алгебр Клиффорда матричным алгебрам (см. параграфы 3.1, 3.2).

Лекция 7

7.1. Псевдоортогональная группа и ее подгруппы

Ортогональной группой называется следующая группа матриц

$$O(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid A^T A = \mathbf{1}\}.$$

Также под множеством $O(n)$ можно понимать группу линейных преобразований n – мерного еклидова пространства $V = \mathbb{R}^n$, сохраняющих фиксированное на V скалярное произведение (евклидову метрику).

Подгруппа ортогональной группы $O(n)$, состоящая из ортогональных матриц с единичным определителем

$$SO(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid A^T A = \mathbf{1},\, \det A = 1\},$$

называется *специальной ортогональной группой.*

Будем рассматривать *псевдоортогональную группу*, состоящую из вещественных матриц следующего вида

$$O(p, q) = \{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid A^T \eta A = \eta\}. \tag{7.1}$$

Здесь p и q – неотрицательные целые числа такие, что $p + q = n$, $n \geqslant 1$, а η – диагональная матрица размера $n \times n$

$$\eta = \|\eta^{ab}\| = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1),$$

у которой на диагонали стоят p штук $+1$ и q штук -1.

Также под множеством $O(p, q)$ можно понимать группу всех линейных преобразований псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{p,q}$, сохраняющих фиксированную на $\mathbb{R}^{p,q}$ псевдоевклидову метрику.

Подгруппа группы $O(p, q)$

$$SO(p, q) = \{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid A^T \eta A = \eta,\, \det A = 1\} \tag{7.2}$$

называется *специальной псевдоортогональной группой.*

Отметим, что группы $O(n)$ и $SO(n)$ являются частными случаями групп $O(p, q)$ и $SO(p, q)$, а именно,

$$O(n, 0) = O(0, n) = O(n), \qquad SO(n, 0) = SO(0, n) = SO(n).$$

Минором матрицы A называется определитель квадратной матрицы, элементы которой стоят в матрице A на пересечении строк с номерами $k_1, \dots k_i$ и столбцов с номерами $l_1, \dots l_i$. Будем его обозначать через $A^{k_1\dots k_i}_{l_1\dots l_i}$. Подразумевается, что $k_1 < \dots < k_i$ и $l_1 < \dots < l_i$. Будем называть минор $A^{i_{k+1}\dots i_n}_{j_{k+1}\dots j_n}$ *дополнительным* к минору $A^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_k}$.

Пусть матрица $A \in \mathrm{O}(p,q)$. Будем пользоваться следующими обозначениями для блоков этой матрицы

$$A = \begin{pmatrix} P & R \\ L & Q \end{pmatrix},$$

где P, Q, R, L – блоки размеров $p \times p$, $q \times q$, $p \times q$, $q \times p$ соответственно. В новых обозначениях имеем

$$\det P = A^{1\dots p}_{1\dots p}, \qquad \det Q = A^{p+1\dots n}_{p+1\dots n}.$$

Лемма 7.1. *Пусть матрица A принадлежит псевдоортогональной группе* $\mathrm{O}(p,q)$. *Тогда*

$$|A^{1\dots p}_{1\dots p}| \geqslant 1, \qquad |A^{p+1\dots n}_{p+1\dots n}| \geqslant 1. \tag{7.3}$$

Доказательство. Для любой матрицы A из $\mathrm{O}(p,q)$ верно $A^T \eta A = \eta$, а значит, для ее блоков верно $R^T R - Q^T Q = -\mathbf{1}_q$, откуда следует, что $|\det Q| = |A^{p+1\dots n}_{p+1\dots n}| \geqslant 1$. Аналогично получаем из $A \eta A^T = \eta$ выражение $PP^T - RR^T = \mathbf{1}_p$ и $|\det P| = |A^{1\dots p}_{1\dots p}| \geqslant 1$. $\triangleright$

Лемма 7.2. *Пусть матрица A принадлежит псевдоортогональной группе $O(p,q)$. Тогда*

$$A^{j_1\dots j_k}_{i_1\dots i_k} = (-1)^{(\sum_{s=1}^k i_s + \sum_{s=1}^k j_s)} \eta^{i_1 i_1} \dots \eta^{i_k i_k} \eta^{j_1 j_1} \dots \eta^{j_k j_k} \frac{A^{j_{k+1}\dots j_n}_{i_{k+1}\dots i_n}}{\det A},$$
$$\det A = \pm 1.$$

В частности, получаем

$$|A^{i_1\dots i_k}_{i_1\dots i_k}| = |A^{i_{k+1}\dots i_n}_{i_{k+1}\dots i_n}|, \qquad \mathrm{sgn}(A^{i_1\dots i_k}_{i_1\dots i_k})\mathrm{sgn}(A^{i_{k+1}\dots i_n}_{i_{k+1}\dots i_n}) = \mathrm{sgn}(A).$$

Доказательство. Для матриц псевдоортогональной группы $O(p,q)$ имеем $A^T \eta A = \eta$. Домножив это равенство справа на A^{-1}, а слева на η, получим

$$\eta A^T \eta = A^{-1}.$$

Матрица $\eta A^T \eta$ представляет из себя матрицу, полученную из A транспонированием, и в которой поменяли знак все элементы, стоящие в двух диагональных блоках размеров $p \times q$ и $q \times p$. Тогда, используя формулу для минора обратной матрицы [36]

$$B^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_k} = (-1)^{\left(\sum_{s=1}^k i_s + \sum_{s=1}^k j_s\right)} \frac{A^{j_{k+1} \dots j_n}_{i_{k+1} \dots i_n}}{\det A}, \qquad B = A^{-1}$$

получаем, что

$$(-1)^{\left(\sum_{i_s > p} 1 + \sum_{j_s > p} 1\right)} A^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_k} = (-1)^{\left(\sum_{s=1}^k i_s + \sum_{s=1}^k j_s\right)} \frac{A^{j_{k+1} \dots j_n}_{i_{k+1} \dots i_n}}{\det A}.$$

Столбцы и строки у минора $A^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_k}$ поменялись местами из-за транспонирования матрицы. Множитель $(-1)^{\left(\sum_{i_s > p} 1 + \sum_{j_s > p} 1\right)}$ появился из-за минусов в диагональных блоках. Например, $\sum_{i_s > p} 1$ – это количество элементов i_s, больших, чем p. Окончательно получаем

$$A^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_k} = (-1)^{\left(\sum_{s=1}^k i_s + \sum_{s=1}^k j_s + \sum_{i_s > p} 1 + \sum_{j_s > p} 1\right)} \frac{A^{j_{k+1} \dots j_n}_{i_{k+1} \dots i_n}}{\det A}.$$

В частности получаем для всех главных миноров

$$A^{i_1 \dots i_k}_{i_1 \dots i_k} = \frac{A^{i_{k+1} \dots i_n}_{i_{k+1} \dots i_n}}{\det A}.$$

Например, $A^{1 \dots p}_{1 \dots p} = A^{p+1 \dots n}_{p+1 \dots n} / \det A$.

Теперь вспоминаем, что для матриц из псевдоортогональной группы $\mathrm{O}(p, q)$ определитель равен $\det A = \pm 1$. Значит, из полученных равенств следует

$$|A^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_k}| = |A^{j_{k+1} \dots j_n}_{i_{k+1} \dots i_n}|.$$

Для главных миноров получаем кроме того

$$\mathrm{sgn}(A^{i_1 \dots i_k}_{i_1 \dots i_k}) \mathrm{sgn}(A^{i_{k+1} \dots i_n}_{i_{k+1} \dots i_n}) = \mathrm{sgn}(A),$$

в частности,

$$\mathrm{sgn}(A^{1 \dots p}_{1 \dots p}) \mathrm{sgn}(A^{p+1 \dots n}_{p+1 \dots n}) = \mathrm{sgn}(A). \tag{7.4}$$

$\triangleright$

Из леммы 7.2 (с. 89) и леммы 7.1 (с. 89) нетрудно получить, что

$$A^{1\ldots p}_{1\ldots p} = \pm 1 \quad\Longleftrightarrow\quad A^{p+1\ldots n}_{p+1\ldots n} = \pm 1 \quad\Longleftrightarrow\quad R = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad L = 0.$$

Принимаем следующее соглашение: будем рассматривать сигнатуры (p, q) псевдоевклидова пространства V, где первые p координат являются временными, а последние q – пространственными.

Теорема 7.1. *Множества матриц*

$$\mathrm{O}_{\uparrow}(p,q) = \{A \in \mathrm{O}(p,q) \mid A^{1\ldots p}_{1\ldots p} \geqslant 1\}, \tag{7.5}$$

$$\mathrm{O}_{\downarrow}(p,q) = \{A \in \mathrm{O}(p,q) \mid A^{p+1\ldots n}_{p+1\ldots n} \geqslant 1\}, \tag{7.6}$$

$$\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q) = \{A \in \mathrm{O}(p,q) \mid A^{1\ldots p}_{1\ldots p} \geqslant 1, \det A = 1\} \tag{7.7}$$

являются подгруппами группы $\mathrm{O}(p,q)$ *и называются соответственно ортохронной группой, ортохорной (сохраняющей четность) группой (“parity preserving” или “orthochorous” в разных источниках) и специальной ортохронной группой.*

Доказательство. Докажем утверждение теоремы для множества $\mathrm{O}_{\downarrow}(p,q)$ [37].

Очевидно, что единичная матрица $\mathbf{1}$ принадлежит группе $\mathrm{O}_{\downarrow}(p,q)$. Тот факт, что обратная матрица A^{-1} к $A \in \mathrm{O}_{\downarrow}(p,q)$ будет принадлежать $\mathrm{O}_{\downarrow}(p,q)$ непосредственно следует из леммы 7.2 (с. 89).

Теперь докажем, что для любых двух матриц $A_1, A_2 \in \mathrm{O}_{\downarrow}(p,q)$ их произведение $A_1 A_2 \in \mathrm{O}_{\downarrow}(p,q)$.

Пусть

$$A_i = \begin{pmatrix} P_i & R_i \\ L_i & Q_i \end{pmatrix}, \qquad i = 1, 2,$$

где P_i, R_i, Q_i, D_i – блоки размеров $p\times p$, $p\times q$, $q\times p$, $q\times q$ соответственно и определители $\det Q_1, \det Q_2 > 0$.

Тогда

$$A_1 A_2 = \begin{pmatrix} P_1P_2 + R_1L_2 & P_1R_2 + R_1Q_2 \\ L_1P_2 + R_1Q_2 & L_1R_2 + Q_1Q_2 \end{pmatrix}.$$

Докажем, что

$$\det(L_1R_2 + Q_1Q_2) = \det(Q_1(Q_1^{-1}L_1R_2Q_2^{-1} + \mathbf{1}_q)Q_2) > 0.$$

Для начала заметим, что для любой матрицы A из $\mathrm{O}(p,q)$ верно $A^T\eta A=\eta$, а значит, для ее блоков верно $R^TR-Q^TQ=-\mathbf{1}_q$ и

$$\begin{aligned}(RQ^{-1})^T(RQ^{-1}) &= (Q^{-1})^TR^TRQ^{-1} = (Q^{-1})^T(Q^TQ-\mathbf{1}_q)Q^{-1}\\ &= \mathbf{1}_q-(Q^{-1})^T(Q^{-1}).\end{aligned}$$

Аналогично получим из $A\eta A^T=\eta$ выражения $LP^T=QR^T$ и $PP^T-RR^T=\mathbf{1}_p$. Тогда $Q^{-1}L=(P^{-1}R)^T$ и

$$\begin{aligned}(Q^{-1}L)^T(Q^{-1}L) &= P^{-1}RR^T(P^{-1})^T = P^{-1}(PP^T-\mathbf{1}_p)(P^{-1})^T\\ &= \mathbf{1}_p-(P^{-1})(P^{-1})^T.\end{aligned}$$

Обозначим $K=Q_1^{-1}L_1R_2Q_2^{-1}$ и рассмотрим

$$\begin{aligned}K^TK &= (R_2Q_2^{-1})^T(Q_1^{-1}L_1)^TQ_1^{-1}L_1R_2Q_2^{-1}\\ &= (R_2Q_2^{-1})^T(\mathbf{1}_p-P_1^{-1}(P_1^{-1})^T)R_2Q_2^{-1}\\ &= (R_2Q_2^{-1})^TR_2Q_2^{-1}-(R_2Q_2^{-1})^TP_1^{-1}(P_1^{-1})^TR_2Q_2^{-1}\\ &= \mathbf{1}_q-(Q_1^{-1})^TQ_1^{-1}-((P_1^{-1})^TR_2Q_2^{-1})^T(P_1^{-1})^TR_2Q_2^{-1}.\end{aligned}$$

Итак,

$$K^TK-\mathbf{1}_q=-(Q_1^{-1})^TQ_1^{-1}-((P_1^{-1})^TR_2Q_2^{-1})^T(P_1^{-1})^TR_2Q_2^{-1},$$

откуда следует, что матрица $K^TK-\mathbf{1}_q$ отрицательно полуопределена. Так что для любого $v\in\mathbb{R}^q$ имеем $v^T(K^TK-\mathbf{1}_q)v\leqslant 0$, т.е. $(Kv)^T(Kv)\leqslant v^Tv$.

Пусть λ – произвольное вещественное собственное значение матрицы $K+\mathbf{1}_q$ с собственным вектором v. Тогда $Kv=(\lambda-1)v$, а значит, $(\lambda-1)^2v^Tv\leqslant v^Tv$, откуда следует, что $\lambda\geqslant 0$. Так как комплексные собственные значения встречаются парами, то имеем $\det(K+\mathbf{1}_q)\geqslant 0$. Заметим, что $\det(K+\mathbf{1}_q)\neq 0$ в силу (7.3), а значит $\det(K+\mathbf{1}_q)>0$. Тогда

$$\det(L_1R_2+Q_1Q_2)=\det(Q_1)\det(K+\mathbf{1}_q)\det(Q_2)>0.$$

$\triangleright$

Эти группы можно интерпретировать как группу ортогональных преобразований, сохраняющих ориентацию во времени (временных координатах), в пространстве (пространственных координатах) или во времени и пространстве соответсвенно. Группу $\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$ можно определить также как связную компоненту группы $\mathrm{SO}(p,q)$, содержащую единицу группы.

Отметим, что группу $\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$ также можно определить не только как пересечение специальной ортогональной группы и ортохронной группы, но и (см. (7.4)) как пересечение ортохронной и ортохорной групп

$$\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q) = \{A \in \mathrm{O}(p,q) \mid A^{1\ldots p}_{1\ldots p} > 0,\ A^{p+1\ldots n}_{p+1\ldots n} > 0\},$$

или как пересечение специальной ортогональной группы и ортохорной группы

$$\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q) = \{A \in \mathrm{O}(p,q) \mid A^{p+1\ldots n}_{p+1\ldots n} > 0,\ \det A = 1\}.$$

Частным случаем рассматриваемых групп являются *группы Лоренца* (группы ортогональных преобразований пространства Минковского)

$$\begin{aligned}\mathrm{O}(1,3) &= \{A \in \mathrm{Mat}(4,\mathbb{R}) \mid A^T\eta A = \eta\},\\ \mathrm{SO}(1,3) &= \{A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) \mid A^T\eta A = \eta,\ \det A = 1\},\end{aligned}$$

где $\eta = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$,

$$\begin{aligned}\mathrm{O}_{\uparrow}(1,3) &= \{A \in \mathrm{O}(1,3) \mid a^1_1 \geqslant 1\},\\ \mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(1,3) &= \{A \in \mathrm{O}(1,3) \mid a^1_1 \geqslant 1,\ \det A = 1\}.\end{aligned}$$

При $p,q \neq 0$ группа $\mathrm{O}(p,q)$ состоит из четырех связных[1] компонент

$$\mathrm{O}(p,q) = \mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q) \sqcup \mathrm{O}'_{\uparrow}(p,q) \sqcup \mathrm{O}'_{\downarrow}(p,q) \sqcup \mathrm{SO}'(p,q),$$

где

$$\begin{aligned}\mathrm{O}_{\uparrow}(p,q) &= \mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q) \sqcup \mathrm{O}'_{\uparrow}(p,q), &\quad \mathrm{O}'_{\uparrow}(p,q) &= \mathrm{O}_{\uparrow}(p,q) \setminus \mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q),\\ \mathrm{O}_{\downarrow}(p,q) &= \mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q) \sqcup \mathrm{O}'_{\downarrow}(p,q), &\quad \mathrm{O}'_{\downarrow}(p,q) &= \mathrm{O}_{\downarrow}(p,q) \setminus \mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q),\\ \mathrm{SO}(p,q) &= \mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q) \sqcup \mathrm{SO}'(p,q), &\quad \mathrm{SO}'(p,q) &= \mathrm{SO}(p,q) \setminus \mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q).\end{aligned}$$

В случае сигнатур $(n,0)$ и $(0,n)$ 5 ортогональных групп сводятся к двум группам (см. упражнения).

Много полезной информации об ортогональных группах можно найти в [12] и в других источниках.

[1] Подробное рассмотрение топологических свойств ортогональных групп мы опускаем, соответствующие утверждения можно найти в литературе.

Упражнения

1. Показать, что условие $A^T\eta A = \eta$ для матриц $A \in \mathrm{O}(p,q)$ эквивалентно следующим соотношениям на элементы матрицы A:

$$\sum_{k=1}^{n} \eta^{kk}(a^i_k)^2 = \eta^{ii}, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{7.8}$$
$$\sum_{k=1}^{n} \eta^{kk} a^i_k a^j_k = 0, \qquad i \neq j, \quad i,j = 1, \ldots, n.$$

Представленные соотношения будут верны и в том случае, если в них поменять местами индексы строк и столбцов.

2. Используя формулы из предыдущего упражнения показать, что условие $a^1_1 > 0$ эквивалентно $a^1_1 \geqslant 1$ для $A \in \mathrm{O}(1, n-1)$.

3. С помощью неравенства Коши–Буняковского

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

убедиться, что

$$\mathrm{O}_\uparrow(1, n-1) = \{A \in \mathrm{O}(1, n-1) \mid a^1_1 \geqslant 1\}$$

является группой.

4. Используя определения ортогональных групп показать, что в случае сигнатур $(n, 0)$ и $(0, n)$ 5 ортогональных групп сводятся к двум:

$$\mathrm{O}(n,0) = \mathrm{O}_\downarrow(n,0), \qquad \mathrm{SO}(n,0) = \mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(n,0) = \mathrm{O}_\uparrow(n,0),$$
$$\mathrm{O}(0,n) = \mathrm{O}_\uparrow(0,n), \qquad \mathrm{SO}(0,n) = \mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(0,n) = \mathrm{O}_\downarrow(0,n).$$

Более того,

$$\mathrm{O}(n,0) = \mathrm{O}(0,n) = \mathrm{O}(n), \qquad \mathrm{SO}(n,0) = \mathrm{SO}(0,n) = \mathrm{SO}(n).$$

5*. Доказать, что для матрицы $A \in \mathrm{O}(p,q)$ верны следующие формулы (обощающие формулы из упражнения 1)

$$\sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant n} \eta^{j_1 j_1} \cdots \eta^{j_k j_k} (A^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_k})^2 = \eta^{i_1 i_1} \cdots \eta^{i_k i_k},$$

где $i_1, \dots i_k$ – номера фиксированных строк матрицы A, и

$$\sum_{1\leqslant j_1<\dots<j_k\leqslant n} \eta^{j_1j_1}\cdots\eta^{j_kj_k}A^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_k}A^{l_1\dots l_k}_{j_1\dots j_k}=0,$$

где $(i_1,\dots,i_k)\neq(l_1,\dots l_k)$ – два разных набора фиксированных строк матрицы A. Также верны соотношения, полученные из выписанных заменой местами индексов строк и столбцов.

6. Рассмотреть группу Лоренца $\mathrm{O}(1,3)$ и убедиться, что матрица обращения пространственной четности

$$\eta=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)\in\mathrm{O}'_{\uparrow}(1,3),$$

матрица обращения времени $-\eta\in\mathrm{O}'_{\downarrow}(1,3)$, их композиция $-\mathbf{1}\in\mathrm{SO}'(1,3)$.

7*. Показать, что $\mathrm{O}_{\uparrow}(p,q)$, $\mathrm{O}_{\downarrow}(p,q)$, $\mathrm{SO}(p,q)$ и $\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$ являются нормальными подгруппами группы $\mathrm{O}(p,q)$ и определены следующие факторгруппы

$$\frac{\mathrm{O}(p,q)}{\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q)}=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,\qquad \frac{\mathrm{O}(p,q)}{\mathrm{SO}(p,q)}=\mathbb{Z}_2,$$
$$\frac{\mathrm{O}(p,q)}{\mathrm{O}_{\downarrow}(p,q)}=\mathbb{Z}_2,\qquad \frac{\mathrm{O}(p,q)}{\mathrm{O}_{\uparrow}(p,q)}=\mathbb{Z}_2,$$
$$\frac{\mathrm{SO}(p,q)}{\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q)}=\mathbb{Z}_2,\qquad \frac{\mathrm{O}_{\downarrow}(p,q)}{\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q)}=\mathbb{Z}_2,\qquad \frac{\mathrm{O}_{\uparrow}(p,q)}{\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q)}=\mathbb{Z}_2.$$

Таким образом, группа $\mathrm{O}(p,q)$ является объединением четырех (попарно непересекающихся) смежных классов. Группа $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ называется четверной группой Клейна (см. более подробно о ней на с. 46).

Таблица умножения для группы $\mathrm{O}(p,q)$ выглядит следующим образом:

	$\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$	$\mathrm{O}'_{\downarrow}(p,q)$	$\mathrm{O}'_{\uparrow}(p,q)$	$\mathrm{SO}'(p,q)$
$\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$	$\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$	$\mathrm{O}'_{\downarrow}(p,q)$	$\mathrm{O}'_{\uparrow}(p,q)$	$\mathrm{SO}'(p,q)$
$\mathrm{O}'_{\downarrow}(p,q)$	$\mathrm{O}'_{\downarrow}(p,q)$	$\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$	$\mathrm{SO}'(p,q)$	$\mathrm{O}'_{\uparrow}(p,q)$
$\mathrm{O}'_{\uparrow}(p,q)$	$\mathrm{O}'_{\uparrow}(p,q)$	$\mathrm{SO}'(p,q)$	$\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$	$\mathrm{O}'_{\downarrow}(p,q)$
$\mathrm{SO}'(p,q)$	$\mathrm{SO}'(p,q)$	$\mathrm{O}'_{\uparrow}(p,q)$	$\mathrm{O}'_{\downarrow}(p,q)$	$\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$

5. Рассмотреть в качестве примера группу $\mathrm{O}(1,1)$ и показать, что ее компоненты $\mathrm{O}'_{\uparrow}(1,1)$, $\mathrm{O}'_{\downarrow}(1,1)$, $\mathrm{SO}'(1,1)$ и $\mathrm{SO}'_{\uparrow\downarrow}(1,1)$ будут состоять соответственно из матриц вида

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi & \operatorname{sh}\psi \\ -\operatorname{sh}\psi & -\operatorname{ch}\psi \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\psi & -\operatorname{sh}\psi \\ \operatorname{sh}\psi & \operatorname{ch}\psi \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\psi & -\operatorname{sh}\psi \\ -\operatorname{sh}\psi & -\operatorname{ch}\psi \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi & \operatorname{sh}\psi \\ \operatorname{sh}\psi & \operatorname{ch}\psi \end{pmatrix},$$

где ψ – произвольный угол.

7.2. Группа Клиффорда и группа Липшица

В этом и последующих параграфах будем рассматривать только вещественную алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$.

Алгебра Клиффорда содержит выделенное векторное подпространство $V = \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_1(p,q)$ элементов ранга 1. Далее будем обозначать элементы алгебры Клиффорда ранга 1 строчными буквами $x, y, \ldots$ При этом не стоит их путать с числовыми коэффициентами $u, v, \ldots$

Обозначим *группу обратимых элементов алгебры Клиффорда* $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$ через

$$\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}\times}(p,q) = \{U \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q) \mid \exists V \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)\colon UV = VU = e\}.$$

Далее будем снабжать верхним индексом $\times$ и другие множества, если нас будут интересовать только обратимые элементы этих множеств. Например, под $\mathbb{R}^{\times}$ будем понимать множество действительных чисел без нуля $\mathbb{R}^{\times} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Рассмотрим *присоединенное действие* ad, определенное на группе обратимых элементов алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}\times}(p,q)$

$$\mathrm{ad}\colon \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}\times}(p,q) \to \operatorname{End}\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q),$$

которое задается как $T \mapsto \mathrm{ad}_T$, где $\mathrm{ad}_T U = TUT^{-1}$ для любого $U \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$. Присоединенное действие ad часто также называют *внутренним автоморфизмом.*

Также рассмотрим *измененное* (*twisted*) *присоединенное действие*

$$\overset{\curlywedge}{\mathrm{ad}}\colon \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}\times}(p,q) \to \operatorname{End}\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q),$$

которое задается как $T \mapsto \overset{\curlywedge}{\mathrm{ad}}_T$, где $\overset{\curlywedge}{\mathrm{ad}}_T U = T^{\curlywedge} U T^{-1}$, $U \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$.

Рассмотрим следующие множества, которые, очевидно, являются подгруппами группы обратимых элементов алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}\times}(p,q)$.

Множество элементов

$$\Gamma^{\pm}(p,q) = \{T \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}\times}_{\mathrm{Even}}(p,q) \cup \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}\times}_{\mathrm{Odd}}(p,q) \\ \mid \forall x \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_1(p,q)\ TxT^{-1} \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_1(p,q)\}$$

называется *группой Липшица.*

Группа Липшица является подгруппой *группы Клиффорда*

$$\Gamma(p,q) = \{T \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}\times}(p,q) \mid \forall x \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_1(p,q)\ TxT^{-1} \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_1(p,q)\}.$$

Отметим, что в литературе иногда группу Клиффорда не рассматривают, а группу Липшица называют группой Клиффорда (см. [29], [13], [38]).

Рассмотрим *группу обратимых элементов центра алгебры Клиффорда*

$$\begin{aligned} Z^{\times} &= \mathrm{cen}^{\times}\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q) \\ &= \{U \in \mathrm{cen}\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q) \mid \exists V \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)\colon UV = VU = e\}. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Тогда под $Z^{\times}\Gamma^{\pm}(p,q)$ будем понимать следующее множество элементов

$$Z^{\times}\Gamma^{\pm} = \{UV \mid U \in Z^{\times},\ V \in \Gamma^{\pm}(p,q)\}.$$

Теорема 7.2. *В алгебре Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$ четной размерности $n = p+q$ группы Липшица и Клиффорда совпадают*:

$$\Gamma(p,q) = \Gamma^{\pm}(p,q).$$

В алгебре Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$ нечетной размерности $n = p+q$ группы Липшица и Клиффорда отличаются умножением на обратимый элемент центра:

$$\Gamma(p,q) = Z^{\times}\Gamma^{\pm}(p,q).$$

Доказательство. Из определений соответствующих групп включения в одну сторону очевидны. Теперь докажем, что в случае четного n верно

$$\Gamma(p,q) \subseteq \Gamma^{\pm}(p,q).$$

Итак, пусть

$$Te^aT^{-1} = \beta^a \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_1(p,q) \qquad \forall a = 1, \ldots, n.$$

Тогда величины β^a удовлетворяют определяющим соотношениям алгебры Клиффорда. Применяем теорему 6.4 (с. 75) и получаем, что

$$T \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}\times}_{\mathrm{Even}}(p,q) \cup \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}\times}_{\mathrm{Odd}}(p,q).$$

Аналогично, в случае нечетного n, применяя теорему 6.6 (с. 78), получим, что

$$\Gamma(p,q) \subseteq Z^\times \Gamma^\pm(p,q).$$

$\triangleright$

В случае алгебры Клиффорда четной размерности n гомоморфизмы $\check{\mathrm{ad}}$ и ad сюръективно отображают группу Липшица $\Gamma^\pm$ (совпадающую в этом случае с группой Клиффорда) на ортогональную группу $\mathrm{O}(p,q)$. Этот факт в литературе доказывается с применением теоремы Картана–Дьедонне [39]. В случае алгебры Клиффорда нечетной размерности n утверждение будет верно только для гомоморфизма $\check{\mathrm{ad}}$. Докажем эти факты другим путем, с использованием обобщенной теоремы Паули.

Теорема 7.3. *Рассмотрим алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$ четной размерности $n = p+q$. Тогда*

$$\mathrm{ad}(\Gamma^\pm = \Gamma) = \mathrm{O}(p,q), \tag{7.10}$$

т.е. для любой матрицы $P = \|p^a_b\| \in \mathrm{O}(p,q)$ существует элемент $T \in \Gamma^\pm$ такой, что

$$Te^aT^{-1} = p^a_b e^b, \qquad a = 1, \ldots, n.$$

При этом, такой T единственен с точностью до умножения на вещественную константу.

Кроме того,

- *если* $\det P = 1$ *(т.е. $P \in \mathrm{SO}(p,q)$), то $T \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Even}}(p,q)$,*
- *если* $\det P = -1$ *(т.е. $P \notin \mathrm{SO}(p,q)$), то $T \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Odd}}(p,q)$.*

Доказательство. Возьмем произвольную псевдоортогональную матрицу $P = \|p^a_b\| \in \mathrm{O}(p,q)$ и построим набор элементов

$$\beta^a = p^a_b e^b.$$

Легко проверить, что набор $\{\beta^a\}$ удовлетворяет определяющим соотношениям алгебры Клиффорда

$$\beta^a\beta^b + \beta^b\beta^a = p^a_c p^b_d e^c e^d + p^b_d p^a_c e^d e^c = p^a_c p^b_d 2\eta^{cd} e = 2\eta^{ab} e,$$

так как

$$P^T \eta P = \eta.$$

Тогда для наборов $\{e^a\}$ и $\{\beta^a\}$ применима теорема 6.4 (с. 75), а именно, существует элемент $T \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Even}}(p,q) \cup \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Odd}}(p,q)$ такой, что

$$Te^aT^{-1} = \beta^a = p^a_b e^b. \tag{7.11}$$

То свойство, что

$$\forall x \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_1(p,q) \qquad TxT^{-1} \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_1(p,q)$$

следует из формулы (7.11). Итак, $T \in \Gamma^{\pm}$ и мы получили соответствие, при котором для каждой матрицы $P \in \mathrm{O}(p,q)$ найдется элемент из группы $\Gamma^{\pm}$.

Имеем

$$\beta^{1\ldots n} = p^1_{a_1} e^{a_1} p^2_{a_2} e^{a_2} \cdots p^n_{a_n} e^{a_n} = (\det P) e^{1\ldots n}.$$

В последнем выражении коэффициенты при всех элементах базиса, отличных от $e^{1\ldots n}$, равны нулю. Чтобы показать это, надо воспользоваться тем, что $\beta^{1\ldots n} = \pm e^{1\ldots n}$ (см. теорему 6.4 (с. 75)).

Пользуясь утверждением теоремы 6.4 (с. 75) заключаем, что если $\beta^{1\ldots n} = e^{1\ldots n}$ (т.е. $\det P = 1$), то $T \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Even}}(p,q)$. В противном случае имеем $T \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Odd}}(p,q)$. ▷

В случае алгебры Клиффорда нечетной размерности $n = p+q$ подобное утверждение будет неверно (сравните утверждения теорем 6.4 (с. 75) и 6.6 (с. 78)). Однако можно утверждать следующее.

Теорема 7.4. *Рассмотрим алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$ нечетной размерности $n = p+q$. Тогда*

$$\mathrm{ad}(\Gamma) = \mathrm{SO}(p,q), \tag{7.12}$$

т.е. для любой матрицы $P = \|p^a_b\| \in \mathrm{SO}(p,q)$ существует элемент $T \in \Gamma$ такой, что

$$Te^aT^{-1} = p^a_b e^b, \qquad a = 1,\ldots,n.$$

Такой T единственен с точностью до умножения на обратимый элемент центра алгебры Клиффорда.

Доказательство. Доказательство аналогично. Нужно воспользоваться теоремой 6.6 (с. 78). ▷

Однако, если рассматривать гомоморфизм $\overset{\curlywedge}{\mathrm{ad}}$, то утверждения для случаев четного и нечетного n будут выглядеть одинаково. Сформулируем соответствующую теорему.

Теорема 7.5. *Рассмотрим алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$ размерности $n=p+q$. Тогда*

$$\overset{\curlywedge}{\mathrm{ad}}(\Gamma^{\pm}) = \mathrm{O}(p,q), \tag{7.13}$$

т.е. для любой матрицы $P = \|p^a_b\| \in \mathrm{O}(p,q)$ существует элемент $T \in \Gamma^{\pm}$ такой, что

$$T^{\curlywedge} e^a T^{-1} = p^a_b e^b, \qquad a = 1,\dots,n.$$

Такой T единственен с точностью до умножения на вещественную константу. При этом,

- *если* $\det P = 1$ *(т.е.* $P \in \mathrm{SO}(p,q)$*), то* $T \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Even}}(p,q)$,
- *если* $\det P = -1$ *(т.е.* $P \notin \mathrm{SO}(p,q)$*), то* $T \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Odd}}(p,q)$.

Доказательство. Доказательство аналогично. Используются теоремы 6.5 (с. 76) и 6.7 (с. 80). ▷

Теперь рассмотрим специальную подгруппу группы Липшица, состоящую только из четных элементов

$$\Gamma^{+} = \{T \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Even}}(p,q) \mid \forall x \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_1(p,q)\ TxT^{-1} \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_1(p,q)\}.$$

Теорема 7.6. *Рассмотрим алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$ размерности $n=p+q$. Тогда*

$$\overset{\curlywedge}{\mathrm{ad}}(\Gamma^{+}) = \mathrm{ad}(\Gamma^{+}) = \mathrm{SO}(p,q), \tag{7.14}$$

т.е. для любой матрицы $P = \|p^a_b\| \in \mathrm{SO}(p,q)$ существует элемент $T \in \Gamma^{+}$ такой, что

$$T^{\curlywedge} e^a T^{-1} = T e^a T^{-1} = p^a_b e^b, \qquad a = 1,\dots,n.$$

Такой T единственен с точностью до умножения на вещественную константу.

Доказательство. Теорема следует из теорем 7.3 (с. 98), 7.4 (с. 99) и 7.5 (с. 100). ▷

В завершение параграфа немного переформулируем утверждение теоремы 7.4 (с. 99).

Следствие 7.1. *Рассмотрим алгебру Клиффорда* $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$ *нечетной размерности* $n=p+q$. *Тогда*

$$\mathrm{ad}(\Gamma^{\pm}) = \mathrm{SO}(p,q), \tag{7.15}$$

т.е. для любой матрицы $P=\|p^a_b\|\in\mathrm{SO}(p,q)$ *существует элемент* $T\in\Gamma^{\pm}$ *такой, что*

$$Te^aT^{-1} = p^a_b e^b, \qquad a=1,\ldots,n.$$

Такой T *единственен с точностью до умножения на вещественную константу и на элемент* $e^{1\ldots n}$.

Доказательство. Утверждение следствия следует из теоремы 7.4 (с. 99) и того факта, что $\Gamma(p,q)=Z^{\times}\Gamma^{\pm}(p,q)$. ▷

Упражнения

1. Показать (см. следствие 2.1), что ядром присоединенного действия

$$\ker(\mathrm{ad}) = \{T\in\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}\times}(p,q) \mid \mathrm{ad}_T(U)=U \ \forall U\in\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(p,q)\}$$

является множество $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}\times}_0(p,q)$ в случае четного n и подпространство $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}\times}_0(p,q)\oplus\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}\times}_n(p,q)$ в случае нечетного n, где $\mathbb{R}^{\times}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

2. Показать, что ядром измененного присоединенного действия

$$\ker(\check{\mathrm{ad}}) = \{T\in\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}\times}(p,q) \mid \check{\mathrm{ad}}_T(U)=U \ \forall U\in\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(p,q)\}$$

является множетсво $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}\times}_0(p,q)$ в случае произвольного n.

3. Подробно провести доказательства теорем 7.4, 7.5, 7.6 и следствия 7.1.

Лекция 8

8.1. Спинорные группы как подгруппы группы Липшица

Рассмотрим на алгебре Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$ гомоморфизм $N\colon \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q) \to \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$, задаваемый следующим образом:

$$U \mapsto N(U) = U^{\sim}U.$$

Говорят, что этот гомоморфизм задает "*норму*" *элементов алгебры Клиффорда* $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$.

Можно также ввести другую "норму" $\overset{\curlywedge}{N}\colon \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q) \to \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$, которая задается как

$$U \mapsto \overset{\curlywedge}{N}(U) = U^{\sim\curlywedge}U.$$

Исследуем действие двух норм $N, \overset{\curlywedge}{N}$ на элементах из группы Липшица.

Предложение 8.1. *Норма $N(T) = T^{\sim}T$ отображает группу Липшица $\Gamma^{\pm}$ в множество $\mathcal{C}\!\ell_0^{\mathbb{R}\times}(p,q)$, т.е.*

$$N\colon \Gamma^{\pm} \to \mathcal{C}\!\ell_0^{\mathbb{R}\times}(p,q),$$

другими словами,

$$T^{\sim}T = \lambda e \qquad \forall T \in \Gamma^{\pm}$$

где λ – произвольная вещественная константа, отличная от нуля.

Доказательство. Для любого $x \in \mathcal{C}\!\ell_1^{\mathbb{R}}(p,q)$ имеем

$$(TxT^{-1})^{\sim} = TxT^{-1}, \qquad (TxT^{-1})^{\sim} = (T^{-1})^{\sim}xT^{\sim},$$
$$(T^{\sim})^{-1} = (T^{-1})^{\sim}.$$

Тогда

$$T^{\sim}Tx = xT^{\sim}T,$$

т.е. $T^\sim T$ лежит в центре алгебры Клиффорда. Так как $T \in \Gamma^\pm$ либо четный, либо нечетный, то $T^\sim T$ – четный элемент и, следовательно, является элементом вида λe. Так как $T \neq 0$, то $\lambda \neq 0$. $\triangleright$

Предложение 8.2. *Норма* $\overset{\curlywedge}{N}(T) = T^{\sim\curlywedge}T$ *отображает группу Липшица* $\Gamma^\pm$ *в множество* $\mathcal{C}\!\ell_0^{\mathbb{R}\times}(p,q)$, *т.е.*

$$\overset{\curlywedge}{N}\colon \Gamma^\pm \to \mathcal{C}\!\ell_0^{\mathbb{R}\times}(p,q).$$

Доказательство. Заметим, что $\overset{\curlywedge}{N}(T) = \pm N(T)$ для $T \in \Gamma^\pm$ и знак зависит от четности элемента T. $\triangleright$

Рассмотрим следующие 5 подгрупп группы $\Gamma^\pm$ (полученные с помощью “нормализации” по $N(T)$ и $\overset{\curlywedge}{N}(T)$)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pin}(p,q) &= \{T \in \Gamma^\pm \mid T^\sim T = \pm e\} = \{T \in \Gamma^\pm \mid T^{\sim\curlywedge}T = \pm e\},\\
\mathrm{Pin}_\downarrow(p,q) &= \{T \in \Gamma^\pm \mid T^\sim T = +e\},\\
\mathrm{Pin}_\uparrow(p,q) &= \{T \in \Gamma^\pm \mid T^{\sim\curlywedge}T = +e\},\\
\mathrm{Spin}(p,q) &= \{T \in \Gamma^+ \mid T^\sim T = \pm e\} = \{T \in \Gamma^+ \mid T^{\sim\curlywedge}T = \pm e\},\\
\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q) &= \{T \in \Gamma^+ \mid T^\sim T = +e\} = \{T \in \Gamma^+ \mid T^{\sim\curlywedge}T = +e\}.
\end{aligned} \tag{8.1}$$

Заметим, что группы $\mathrm{Spin}(p,q)$ и $\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$ являются подгруппами группы $\Gamma^+(p,q)$.

Следующие 5 групп

$$\mathrm{Pin}(p,q),\quad \mathrm{Spin}(p,q),\quad \mathrm{Pin}_\uparrow(p,q),\quad \mathrm{Pin}_\downarrow(p,q),\quad \mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$$

будем называть *спинорными группами* алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$ заданной сигнатуры (p,q).

Заметим, что равенства различных множеств, записанные в определении спинорных групп (8.1), являются утверждениями, которые легко проверяются.

В последующем изложении будет подразумеваться, что $p,q \neq 0$. Случаи сигнатур $(n,0)$ и $(0,n)$ рассмотрены ниже (см. упражнения после параграфа 9.1).

Из определения спинорных групп следует, что группа $\mathrm{Pin}(p,q)$ при $p \neq 0$ и $q \neq 0$ состоит из четырех компонент

$$\mathrm{Pin}(p,q) = \mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q) \sqcup \mathrm{Spin}'(p,q) \sqcup \mathrm{Pin}'_\uparrow(p,q) \sqcup \mathrm{Pin}'_\downarrow(p,q),$$

где
$$\mathrm{Pin}'_{\uparrow}(p,q)=\mathrm{Pin}_{\uparrow}(p,q)\setminus\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q),$$
$$\mathrm{Pin}'_{\downarrow}(p,q)=\mathrm{Pin}_{\downarrow}(p,q)\setminus\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q),$$
$$\mathrm{Spin}'(p,q)=\mathrm{Spin}(p,q)\setminus\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q).$$

Теорема 8.1. *Гомоморфизмы*

$$\begin{aligned}
&\overset{\curlywedge}{\mathrm{ad}}\colon\ \mathrm{Pin}(p,q)\to\mathrm{O}(p,q),\\
&\overset{\curlywedge}{\mathrm{ad}}\colon \mathrm{Spin}(p,q)\to\mathrm{SO}(p,q),\\
&\mathrm{ad}\colon\ \mathrm{Pin}(p,q)\to\mathrm{O}(p,q)\qquad \textit{при четном } n,\\
&\mathrm{ad}\colon \mathrm{Spin}(p,q)\to\mathrm{SO}(p,q)
\end{aligned}$$

сюръективны с ядром $\{\pm1\}$.

То есть для любой матрицы P из соответствующей ортогональной группы существуют ровно два элемента $\pm T$ из соответствующей спинорной группы таких, что при действии соответствующего гомоморфизма они переходят в P.

Доказательство. Первое утверждение следует из теоремы 7.5 (с. 100). Второе и четвертое утверждения вытекают из теоремы 7.6 (с. 100). Третье утверждение следует из теоремы 7.3 (с. 98). Также используются утверждения Предложений 8.1 (с. 102), 8.2 (с. 103). ▷

Заметим, что третье утверждение теоремы верно только в случае алгебр Клиффорда четной размерности n. Сформулируем аналог этого утверждения для случая нечетного n.

Теорема 8.2. *Гомоморфизм*

$$\mathrm{ad}\colon \mathrm{Pin}(p,q)\to\mathrm{SO}(p,q)\qquad \textit{при нечетном } n$$

сюръективен с ядром $\{\pm1,\pm e^{1\dots n}\}$.

Доказательство. Утверждение следует из следствия 7.1 (с. 101). ▷

Далее будут сформулированы похожие утверждения для других ортогональных и спинорных групп (см. теоремы 8.5 (с. 111), 8.6 (с. 113), 8.7 (с. 113)).

Упражнения

1. Показать, что группы $\mathrm{Spin}(p,q)$ и $\mathrm{Spin}(q,p)$ изоморфны.

2. Показать, что группы $\mathrm{Pin}(p,q)$ и $\mathrm{Pin}(q,p)$, вообще говоря, неизоморфны.
3. Показать, что $\mathrm{Spin}(p,q)$, $\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$, $\mathrm{Pin}_{\downarrow}(p,q)$, $\mathrm{Pin}_{\uparrow}(p,q)$ являются нормальными подгруппами группы $\mathrm{Pin}(p,q)$. Кроме того, группа $\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$ является нормальной подгруппой групп $\mathrm{Spin}(p,q), \mathrm{Pin}_{\downarrow}(p,q)$ и $\mathrm{Pin}_{\uparrow}(p,q)$.
4. Рассмотрим вещественную алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$ произвольной размерности $n=p+q$, где $p,q\neq 0$. Пусть T_1, T_2, T – произвольные фиксированные элементы множеств
$$T_1\in \mathrm{Pin}'_{\downarrow}(p,q),\qquad T_2\in \mathrm{Pin}'_{\uparrow}(p,q),\qquad T\in \mathrm{Spin}'(p,q).$$
Показать, что
$$\mathrm{Pin}'_{\downarrow}(p,q)=T_1\ \mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q),\qquad \mathrm{Pin}'_{\uparrow}(p,q)=T_2\ \mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q),$$
$$\mathrm{Spin}'(p,q)=T\ \mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q),$$
а значит, и
$$\begin{aligned}\mathrm{Pin}_{\downarrow}(p,q)&=\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)\sqcup T_1\,\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q),\\ \mathrm{Pin}_{\uparrow}(p,q)&=\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)\sqcup T_2\,\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q),\\ \mathrm{Spin}(p,q)&=\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)\sqcup T\,\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q),\\ \mathrm{Pin}(p,q)&=\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)\sqcup T_1\,\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)\\ &\qquad\sqcup T_2\,\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)\sqcup T\,\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q).\end{aligned}$$
5. Удостовериться, что в качестве T_1, T_2 и T из предыдущего упражнения можно всегда выбирать такие элементы, что $T=T_1T_2$. Например, в качестве T_1, T_2, T можно взять соответственно e^a, e^b и $e^ae^b=e^{ab}$, где $a<b$, $(e^a)^2=e$, $(e^b)^2=-e$. В частности, всегда подойдут (так как $p,q\neq 0$) элементы e^1, e^n, $e^1e^n=e^{1n}$.
Проверить, что для нечетных p и q (и, следовательно, четном n) в качестве T_1, T_2, T можно взять $e^{1\ldots p}$, $e^{p+1\ldots n}$ и $e^{1\ldots n}$ соответственно.
6. Пользуясь результатами предыдущих упражнений показать, что определены следующие факторгруппы:
$$\frac{\mathrm{Pin}(p,q)}{\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)}=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,\quad \frac{\mathrm{Pin}(p,q)}{\mathrm{Spin}(p,q)}=\mathbb{Z}_2,$$
$$\frac{\mathrm{Pin}(p,q)}{\mathrm{Pin}_{\downarrow}(p,q)}=\mathbb{Z}_2,\quad \frac{\mathrm{Pin}(p,q)}{\mathrm{Pin}_{\uparrow}(p,q)}=\mathbb{Z}_2,$$

$$\frac{\mathrm{Spin}(p,q)}{\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)}=\mathbb{Z}_2,\quad \frac{\mathrm{Pin}_{\downarrow}(p,q)}{\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)}=\mathbb{Z}_2,\quad \frac{\mathrm{Pin}_{\uparrow}(p,q)}{\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)}=\mathbb{Z}_2.$$

Таким образом, группа $\mathrm{Pin}(p,q)$ является объединением четырех (попарно непересекающихся) смежных классов. Группа $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ называется четверной группой Клейна (см. более подробно о ней на с. 46).

Таблица умножения для группы $\mathrm{Pin}(p,q)$ выглядит следующим образом:

	$\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$	$\mathrm{Pin}'_{\downarrow}(p,q)$	$\mathrm{Pin}'_{\uparrow}(p,q)$	$\mathrm{Spin}'(p,q)$
$\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$	$\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$	$\mathrm{Pin}'_{\downarrow}(p,q)$	$\mathrm{Pin}'_{\uparrow}(p,q)$	$\mathrm{Spin}'(p,q)$
$\mathrm{Pin}'_{\downarrow}(p,q)$	$\mathrm{Pin}'_{\downarrow}(p,q)$	$\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$	$\mathrm{Spin}'(p,q)$	$\mathrm{Pin}'_{\uparrow}(p,q)$
$\mathrm{Pin}'_{\uparrow}(p,q)$	$\mathrm{Pin}'_{\uparrow}(p,q)$	$\mathrm{Spin}'(p,q)$	$\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$	$\mathrm{Pin}'_{\downarrow}(p,q)$
$\mathrm{Spin}'(p,q)$	$\mathrm{Spin}'(p,q)$	$\mathrm{Pin}'_{\uparrow}(p,q)$	$\mathrm{Pin}'_{\downarrow}(p,q)$	$\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$

8.2. Теоремы о норме элементов спинорных групп

В настоящем параграфе сформулируем теорему о норме элемента T группы $\mathrm{Pin}(p,q)$. Как известно (см. параграф 2.1), на алгебре Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$ можно задать структуру евклидова пространства, т.е. задать операцию скалярного произведения $(U,V)=\mathrm{Tr}(U^\dagger V)$. Скалярное произведение естественным образом порождает норму

$$\|U\|=\sqrt{\mathrm{Tr}(U^\dagger U)}.$$

Теорема 8.3. *Пусть элемент алгебры Клиффорда T принадлежит группе $\mathrm{Pin}(p,q)$ и пусть при гомоморфизме $\check{\mathrm{ad}}$ элемент T переходит в ортогональную матрицу $A\in\mathrm{O}(p,q)$. Тогда норма элемента T связана с главными минорами этой матрицы $A^{1\ldots p}_{1\ldots p}$, $A^{p+1\ldots n}_{p+1\ldots n}$ следующим образом:*

$$\|T\|^2=\mathrm{Tr}(T^\dagger T)=\begin{cases} A^{1\ldots p}_{1\ldots p}=A^{p+1\ldots n}_{p+1\ldots n} & \Longleftrightarrow \quad T\in\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q),\\ A^{1\ldots p}_{1\ldots p}=-A^{p+1\ldots n}_{p+1\ldots n} & \Longleftrightarrow \quad T\in\mathrm{Pin}'_{\uparrow}(p,q),\\ -A^{1\ldots p}_{1\ldots p}=A^{p+1\ldots n}_{p+1\ldots n} & \Longleftrightarrow \quad T\in\mathrm{Pin}'_{\downarrow}(p,q),\\ -A^{1\ldots p}_{1\ldots p}=-A^{p+1\ldots n}_{p+1\ldots n} & \Longleftrightarrow \quad T\in\mathrm{Spin}'(p,q).\end{cases}\tag{8.2}$$

Доказательство. Имеем

$$\|T\|^2 = \mathrm{Tr}(T^\dagger T) = \mathrm{Tr}(e_{1\dots p}T^{\sim\flat}e^1\cdots e^pT),$$

где $\flat$ – $\curlywedge$, если p – четное.

1) Рассмотрим случай, когда $T\in\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$. Тогда из определения (8.1) группы $\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$ имеем

$$T^{\curlywedge\sim} = (T^\curlywedge)^{-1},\qquad T^\sim = (T^\curlywedge)^{-1}.$$

Тогда, независимо от четности p, получаем

$$\begin{aligned}\|T\|^2 &= \mathrm{Tr}(e_{1\dots p}(T^\curlywedge)^{-1}e^1\cdots e^pT)\\ &= \mathrm{Tr}(e_{1\dots p}(T^\curlywedge)^{-1}e^1T(T^\curlywedge)^{-1}e^2\cdots e^pT),\end{aligned}$$

где между генераторами вставили выражения $T(T^\curlywedge)^{-1} = e$ для $T\in\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$. Далее имеем

$$(T^\curlywedge)^{-1}e^iT = a^i_je^j$$

и

$$\begin{aligned}\|T\|^2 &= \mathrm{Tr}(e_{1\dots p}a^1_{i_1}\cdots a^p_{i_p}e^{i_1}\cdots e^{i_p})\\ &= e_{1\dots p}a^1_{j_1}\cdots a^p_{j_p}e^{j_1}\cdots e^{j_p} = A^{1\dots p}_{1\dots p}.\end{aligned}$$

В последних формулах индексы $i_1,\dots,i_p$, по которым ведется суммирование, пробегают значения от 1 до n, а индексы $j_1,\dots,j_p$ пробегают значения от 1 до p.

2) Рассмотрим случай, когда $T\in\mathrm{Pin}'_\uparrow(p,q)$. В этом случае из (8.1) имеем

$$T^{\curlywedge\sim} = -(T^\curlywedge)^{-1},\qquad T^\sim = (T^\curlywedge)^{-1}.$$

Рассмотрим случай, когда p – нечетное. Тогда

$$\begin{aligned}\|T\|^2 &= \mathrm{Tr}(e_{1\dots p}(T^\curlywedge)^{-1}e^1\cdots e^pT)\\ &= (-1)^{p-1}\mathrm{Tr}(e_{1\dots p}(T^\curlywedge)^{-1}e^1T(T^\curlywedge)^{-1}e^2\cdots e^pT),\end{aligned}$$

где между генераторами вставили выражения $T(T^\curlywedge)^{-1} = -e$ для $T\in\mathrm{Pin}'_\uparrow(p,q)$. Но $(-1)^{p-1} = 1$, так как p – нечетное. В итоге получаем

$$\|T\|^2 = A^{1\dots p}_{1\dots p}.$$

В случае четного p имеем

$$\begin{aligned}\|T\|^2 &= -\mathrm{Tr}(e_{1\ldots p}(T^{\curlywedge})^{-1}e^1\cdots e^pT)\\ &= (-1)^{p-1+1}\mathrm{Tr}(e_{1\ldots p}T^{\curlywedge -1}e^1TT^{\curlywedge -1}e^2\cdots e^pT).\end{aligned}$$

В силу $(-1)^p = 1$ получаем

$$\|T\|^2 = A^{1\ldots p}_{1\ldots p}.$$

Аналогично рассматриваются случаи 3) $T\in\mathrm{Pin}'_{\downarrow}(p,q)$ и 4) $T\in\mathrm{Spin}'(p,q)$.

Теперь воспользуемся во всех четырех случаях другой формулой для операции эрмитова сопряжения. Имеем

$$\|T\|^2 = \mathrm{Tr}(T^{\dagger}T) = \mathrm{Tr}(e_{p+1\ldots n}T^{\sim\sharp}e^{p+1}\cdots e^nT),$$

где $\sharp$ – $\curlywedge$, если q – нечетное. Рассмотрим аналогично 4 разных случая.

Для примера рассмотрим случай 1) $T\in\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$. Тогда из определения (8.1) группы $\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$ имеем

$$T^{\curlywedge\sim} = (T^{\curlywedge})^{-1},\qquad T^{\sim} = (T^{\curlywedge})^{-1}.$$

Тогда независимо от четности q получаем

$$\begin{aligned}\|T\|^2 &= \mathrm{Tr}(e_{p+1\ldots n}(T^{\curlywedge})^{-1}e^{p+1}\cdots e^nT)\\ &= \mathrm{Tr}(e_{p+1\ldots n}(T^{\curlywedge})^{-1}e^{p+1}T(T^{\curlywedge})^{-1}e^{p+2}\cdots e^nT),\end{aligned}$$

где между генераторами вставили выражения $T(T^{\curlywedge})^{-1} = e$ для $T\in\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$. Далее имеем

$$(T^{\curlywedge})^{-1}e^iT = a^i_je^j$$

и получаем

$$\begin{aligned}\|T\|^2 &= \mathrm{Tr}(e_{p+1\ldots n}a^{p+1}_{i_{p+1}}\cdots a^n_{i_n}e^{i_{p+1}}\cdots e^{i_n})\\ &= e_{p+1\ldots n}a^{p+1}_{j_{p+1}}\cdots a^n_{j_n}e^{j_{p+1}}\cdots e^{j_n} = A^{p+1\ldots n}_{p+1\ldots n}.\end{aligned}$$

В последних формулах индексы $i_{p+1},\ldots,i_n$, по которым ведется суммирование, пробегают значения от 1 до n, а индексы $j_{p+1},\ldots,j_n$ пробегают значения от $p+1$ до n.

Аналогично рассматриваются случаи 2) $T\in\mathrm{Pin}'_{\uparrow}(p,q)$, 3) $T\in\mathrm{Pin}'_{\downarrow}(p,q)$ и 4) $T\in\mathrm{Spin}'(p,q)$.

Теорема верна и в обратную сторону, так как включает в себя взаимоисключающие случаи. $\triangleright$

Отметим, что норма ненулевого элемента $U \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$ всегда положительна

$$\|U\| = \sqrt{\mathrm{Tr}(U^\dagger U)} > 0.$$

Пусть $T \in \mathrm{Pin}(p,q)$. Тогда теорема 8.3 (с. 106) дает ограничения на знаки миноров ортогональной матрицы $A \in \mathrm{O}(p,q)$. Данные ограничения полностью соответствуют определениям ортохронной, ортохорной и специальной ортохронной подгрупп группы $\mathrm{O}(p,q)$.

Таким образом, для гомоморфизма $\check{\mathrm{ad}}$, отображающего элемент $T \in \mathrm{Pin}(p,q)$ в матрицу $A \in \mathrm{O}(p,q)$, имеем

$$\begin{aligned}
A^{1\ldots p}_{1\ldots p} = A^{p+1\ldots n}_{p+1\ldots n} > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad T \in \mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q),\\
A^{1\ldots p}_{1\ldots p} = -A^{p+1\ldots n}_{p+1\ldots n} > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad T \in \mathrm{Pin}'_{\uparrow}(p,q),\\
-A^{1\ldots p}_{1\ldots p} = A^{p+1\ldots n}_{p+1\ldots n} > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad T \in \mathrm{Pin}'_{\downarrow}(p,q),\\
-A^{1\ldots p}_{1\ldots p} = -A^{p+1\ldots n}_{p+1\ldots n} > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad T \in \mathrm{Spin}'(p,q).
\end{aligned}$$

Теперь сформулируем аналогичное утверждение для гомоморфизма ad.

Теорема 8.4. *Пусть элемент алгебры Клиффорда T принадлежит группе $\mathrm{Pin}(p,q)$ и пусть при гомоморфизме* ad *элемент T переходит в ортогональную матрицу $A \in \mathrm{O}(p,q)$. Тогда норма элемента T связана с главными минорами этой матрицы $A^{1\ldots p}_{1\ldots p}$, $A^{p+1\ldots n}_{p+1\ldots n}$ следующим образом:*

- *в случае p – четное, q – четное*

$$\|T\|^2 = \mathrm{Tr}(T^\dagger T)$$
$$= \begin{cases}
A^{1\ldots p}_{1\ldots p} = A^{p+1\ldots n}_{p+1\ldots n} & \Longleftrightarrow \quad T \in \mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q),\\
A^{1\ldots p}_{1\ldots p} = -A^{p+1\ldots n}_{p+1\ldots n} & \Longleftrightarrow \quad T \in \mathrm{Pin}'_{\uparrow}(p,q),\\
-A^{1\ldots p}_{1\ldots p} = A^{p+1\ldots n}_{p+1\ldots n} & \Longleftrightarrow \quad T \in \mathrm{Pin}'_{\downarrow}(p,q),\\
-A^{1\ldots p}_{1\ldots p} = -A^{p+1\ldots n}_{p+1\ldots n} & \Longleftrightarrow \quad T \in \mathrm{Spin}'(p,q);
\end{cases} \tag{8.3}$$

- *в случае p – нечетное, q – нечетное*

$$\|T\|^2 = \mathrm{Tr}(T^\dagger T)$$
$$= \begin{cases} A^{1\dots p}_{1\dots p} = A^{p+1\dots n}_{p+1\dots n} & \Longleftrightarrow \quad T \in \mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q), \\ -A^{1\dots p}_{1\dots p} = A^{p+1\dots n}_{p+1\dots n} & \Longleftrightarrow \quad T \in \mathrm{Pin}'_{\uparrow}(p,q), \\ A^{1\dots p}_{1\dots p} = -A^{p+1\dots n}_{p+1\dots n} & \Longleftrightarrow \quad T \in \mathrm{Pin}'_{\downarrow}(p,q), \\ -A^{1\dots p}_{1\dots p} = -A^{p+1\dots n}_{p+1\dots n} & \Longleftrightarrow \quad T \in \mathrm{Spin}'(p,q); \end{cases} \tag{8.4}$$

- *в случае p – четное, q – нечетное*

$$\|T\|^2 = \mathrm{Tr}(T^\dagger T)$$
$$= \begin{cases} A^{1\dots p}_{1\dots p} = A^{p+1\dots n}_{p+1\dots n} & \Longleftrightarrow \quad T \in \mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q) \cup \mathrm{Pin}'_{\uparrow}(p,q), \\ -A^{1\dots p}_{1\dots p} = -A^{p+1\dots n}_{p+1\dots n} & \Longleftrightarrow \quad T \in \mathrm{Pin}'_{\downarrow}(p,q) \cup \mathrm{Spin}'(p,q); \end{cases} \tag{8.5}$$

- *в случае p – нечетное, q – четное*

$$\|T\|^2 = \mathrm{Tr}(T^\dagger T)$$
$$= \begin{cases} A^{1\dots p}_{1\dots p} = A^{p+1\dots n}_{p+1\dots n} & \Longleftrightarrow \quad T \in \mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q) \cup \mathrm{Pin}'_{\downarrow}(p,q), \\ -A^{1\dots p}_{1\dots p} = -A^{p+1\dots n}_{p+1\dots n} & \Longleftrightarrow \quad T \in \mathrm{Pin}'_{\uparrow}(p,q) \cup \mathrm{Spin}'(p,q). \end{cases} \tag{8.6}$$

Доказательство. Доказательство проводится аналогично доказательству предыдущей теоремы и предоставляется читателю. ▷

Таким образом, для гомоморфизма ad, отображающего элемент $T \in \mathrm{Pin}(p,q)$ в матрицу $A \in \mathrm{O}(p,q)$, имеем

- в случае p – четное, q – четное

$$\begin{aligned} A^{1\dots p}_{1\dots p} = A^{p+1\dots n}_{p+1\dots n} > 0 \quad & \Longleftrightarrow \quad T \in \mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q), \\ A^{1\dots p}_{1\dots p} = -A^{p+1\dots n}_{p+1\dots n} > 0 \quad & \Longleftrightarrow \quad T \in \mathrm{Pin}'_{\uparrow}(p,q), \\ -A^{1\dots p}_{1\dots p} = A^{p+1\dots n}_{p+1\dots n} > 0 \quad & \Longleftrightarrow \quad T \in \mathrm{Pin}'_{\downarrow}(p,q), \\ -A^{1\dots p}_{1\dots p} = -A^{p+1\dots n}_{p+1\dots n} > 0 \quad & \Longleftrightarrow \quad T \in \mathrm{Spin}'(p,q); \end{aligned}$$

- в случае p – нечетное, q – нечетное

$$A^{1\dots p}_{1\dots p} = A^{p+1\dots n}_{p+1\dots n} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad T \in \mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q),$$

$$
\begin{aligned}
-A^{1\dots p}_{1\dots p} = A^{p+1\dots n}_{p+1\dots n} > 0 &\quad\Longleftrightarrow\quad T \in \mathrm{Pin}'_{\uparrow}(p,q),\\
A^{1\dots p}_{1\dots p} = -A^{p+1\dots n}_{p+1\dots n} > 0 &\quad\Longleftrightarrow\quad T \in \mathrm{Pin}'_{\downarrow}(p,q),\\
-A^{1\dots p}_{1\dots p} = -A^{p+1\dots n}_{p+1\dots n} > 0 &\quad\Longleftrightarrow\quad T \in \mathrm{Spin}'(p,q);
\end{aligned}
$$

- в случае p – четное, q – нечетное

$$
\begin{aligned}
A^{1\dots p}_{1\dots p} = A^{p+1\dots n}_{p+1\dots n} > 0 &\quad\Longleftrightarrow\quad T \in \mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q) \cup \mathrm{Pin}'_{\uparrow}(p,q),\\
-A^{1\dots p}_{1\dots p} = -A^{p+1\dots n}_{p+1\dots n} > 0 &\quad\Longleftrightarrow\quad T \in \mathrm{Pin}'_{\downarrow}(p,q) \cup \mathrm{Spin}'(p,q);
\end{aligned}
$$

- в случае p – нечетное, q – четное

$$
\begin{aligned}
A^{1\dots p}_{1\dots p} = A^{p+1\dots n}_{p+1\dots n} > 0 &\quad\Longleftrightarrow\quad T \in \mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q) \cup \mathrm{Pin}'_{\downarrow}(p,q),\\
-A^{1\dots p}_{1\dots p} = -A^{p+1\dots n}_{p+1\dots n} > 0 &\quad\Longleftrightarrow\quad T \in \mathrm{Pin}'_{\uparrow}(p,q) \cup \mathrm{Spin}'(p,q).
\end{aligned}
$$

Упражнения

1. Рассмотреть оставшиеся случаи в доказательстве теоремы 8.3.
2. Доказать теорему 8.4.

8.3. Связь спинорных и ортогональных групп

На основе результатов предыдущего параграфа можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 8.5. *Гомоморфизмы*

$$
\begin{aligned}
\overset{\curlywedge}{\mathrm{ad}}\colon &\quad \mathrm{Pin}(p,q) \to \mathrm{O}(p,q),\\
\overset{\curlywedge}{\mathrm{ad}}\colon &\quad \mathrm{Spin}(p,q) \to \mathrm{SO}(p,q),\\
\overset{\curlywedge}{\mathrm{ad}}\colon &\quad \mathrm{Pin}_{\uparrow}(p,q) \to \mathrm{O}_{\uparrow}(p,q),\\
\overset{\curlywedge}{\mathrm{ad}}\colon &\quad \mathrm{Pin}_{\downarrow}(p,q) \to \mathrm{O}_{\downarrow}(p,q),\\
\overset{\curlywedge}{\mathrm{ad}}\colon &\quad \mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q) \to \mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q)
\end{aligned}
$$

сюръективны с ядром $\{\pm 1\}$. *То есть для любой матрицы* P *из соответствующей ортогональной группы существуют ровно два элемента* $\pm T$ *из соответствующей спинорной группы таких, что при действии* $\overset{\curlywedge}{\mathrm{ad}}$ *они переходят в* P.

Обычно это записывают так:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Pin}(p,q)/\{\pm 1\} &\simeq \mathrm{O}(p,q),\\
\mathrm{Spin}(p,q)/\{\pm 1\} &\simeq \mathrm{SO}(p,q),\\
\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)/\{\pm 1\} &\simeq \mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q),\\
\mathrm{Pin}_{\uparrow}(p,q)/\{\pm 1\} &\simeq \mathrm{O}_{\uparrow}(p,q),\\
\mathrm{Pin}_{\downarrow}(p,q)/\{\pm 1\} &\simeq \mathrm{O}_{\downarrow}(p,q).
\end{aligned}
$$

Доказательство. Часть утверждений уже доказана (см. теорему 8.1 (с. 104)). Остальные следуют из рассуждений предыдущего параграфа. $\triangleright$

Более того, верно более сильное утверждение. Данные отображения являются двулистными накрытиями ортогональных групп спинорными (чтобы проверить это, нужно дополнительно исследовать топологические свойства групп, см. параграф 10.1).

Обозначение спинорных групп $\mathrm{Pin}_{\downarrow}(p,q)$, $\mathrm{Pin}_{\uparrow}(p,q)$ было выбрано (см. параграф 8.1) именно таким образом, чтобы образы этих групп при отображении $\overset{\curlywedge}{\mathrm{ad}}$ совпадали с группами $\mathrm{O}_{\downarrow}(p,q)$, $\mathrm{O}_{\uparrow}(p,q)$ соответственно.

Связь спинорных и ортогональных групп явно выражается формулой

$$T^{\curlywedge} e^a T^{-1} = p^a_b e^b,$$

которая сопоставляет каждой матрице $P = \|p^a_b\|$ из соответствующей ортогональной группы

$$\mathrm{O}(p,q),\quad \mathrm{SO}(p,q),\quad \mathrm{O}_{\uparrow}(p,q),\quad \mathrm{O}_{\downarrow}(p,q),\quad \mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$$

пару элементов $\pm T$ из соответствующей спинорной группы

$$\mathrm{Pin}(p,q),\quad \mathrm{Spin}(p,q),\quad \mathrm{Pin}_{\uparrow}(p,q),\quad \mathrm{Pin}_{\downarrow}(p,q),\quad \mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q).$$

Теперь исследуем действие гомоморфизма ad на спинорные группы, которое ведет себя по-разному в зависимости от сигнатуры (p,q) алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$. Все последующие результаты (в том числе сформулированные теоремы) для гомоморфизма ad следуют из утверждений двух предыдущих параграфов.

Сначала рассмотрим случай четной размерности $n = p+q$ алгебры Клиффорда.

Теорема 8.6. *Пусть $n = p + q$ – четное.*

1) *Если p, q – четные, то гомоморфизмы*

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}\colon\ \mathrm{Pin}(p,q) &\to \mathrm{O}(p,q),\\
\mathrm{ad}\colon\ \mathrm{Spin}(p,q) &\to \mathrm{SO}(p,q),\\
\mathrm{ad}\colon\ \mathrm{Pin}_{\uparrow}(p,q) &\to \mathrm{O}_{\uparrow}(p,q),\\
\mathrm{ad}\colon\ \mathrm{Pin}_{\downarrow}(p,q) &\to \mathrm{O}_{\downarrow}(p,q),\\
\mathrm{ad}\colon \mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q) &\to \mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q)
\end{aligned}$$

сюръективны с ядром $\{\pm 1\}$.

2) *Если p, q – нечетные, то гомоморфизмы*

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}\colon\ \mathrm{Pin}(p,q) &\to \mathrm{O}(p,q),\\
\mathrm{ad}\colon\ \mathrm{Spin}(p,q) &\to \mathrm{SO}(p,q),\\
\mathrm{ad}\colon\ \mathrm{Pin}_{\uparrow}(p,q) &\to \mathrm{O}_{\downarrow}(p,q),\\
\mathrm{ad}\colon\ \mathrm{Pin}_{\downarrow}(p,q) &\to \mathrm{O}_{\uparrow}(p,q),\\
\mathrm{ad}\colon \mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q) &\to \mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q)
\end{aligned}$$

сюръективны с ядром $\{\pm 1\}$.

Доказательство. Часть утверждений уже доказана (см. теорему 8.1 (с. 104)). Остальные следуют из рассуждений предыдущего параграфа. ▷

Это отображение задается формулой

$$T e^a T^{-1} = p^a_b e^b,$$

которая сопоставляет каждой матрице $P = \|p^a_b\|$ из соответствующей ортогональной группы пару элементов $\pm T$ из соответствующей спинорной группы.

В случае нечетного n гомоморфизм ad уже не описывает двулистное накрытие ортогональных групп спинорными. Ядро отображения в некоторых случаях состоит из 4 элементов. Например, возьмем произвольный элемент $t \in \mathrm{Pin}(p,q)$. Тогда ему очевидно сопоставляется та же ортогональная матрица, что и элементам $-t$, $e^{1\ldots n}t$, $-e^{1\ldots n}t$ в силу формулы $Te^aT^{-1} = p^a_b e^b$.

Сформулируем теорему для алгебры Клиффорда нечетной размерности $n = p + q$.

Теорема 8.7. *Пусть $n = p + q$ – нечетное.*

1) *Если p – четное, q – нечетное, то следующие гомоморфизмы сюръективны с соответствующим ядром*:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ad}\colon\ & \mathrm{Pin}(p,q)\to\mathrm{SO}(p,q), && \{\pm1,\pm e^{1\ldots n}\},\\
\mathrm{ad}\colon\ & \mathrm{Spin}(p,q)\to\mathrm{SO}(p,q), && \{\pm1\},\\
\mathrm{ad}\colon\ & \mathrm{Pin}_{\uparrow}(p,q)\to\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q), && \{\pm1,\pm e^{1\ldots n}\},\\
\mathrm{ad}\colon\ & \mathrm{Pin}_{\downarrow}(p,q)\to\mathrm{SO}(p,q), && \{\pm1\},\\
\mathrm{ad}\colon\ & \mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)\to\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q), && \{\pm1\}.
\end{aligned}
$$

2) *Если p – нечетное, q – четное, то следующие гомоморфизмы сюръективны с соответствующим ядром*:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ad}\colon\ & \mathrm{Pin}(p,q)\to\mathrm{SO}(p,q), && \{\pm1,\pm e^{1\ldots n}\},\\
\mathrm{ad}\colon\ & \mathrm{Spin}(p,q)\to\mathrm{SO}(p,q), && \{\pm1\},\\
\mathrm{ad}\colon\ & \mathrm{Pin}_{\uparrow}(p,q)\to\mathrm{SO}(p,q), && \{\pm1\},\\
\mathrm{ad}\colon\ & \mathrm{Pin}_{\downarrow}(p,q)\to\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q), && \{\pm1,\pm e^{1\ldots n}\},\\
\mathrm{ad}\colon\ & \mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)\to\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q), && \{\pm1\}.
\end{aligned}
$$

Доказательство. Часть утверждений уже доказана (см. теоремы 8.1 (с. 104) и 8.2 (с. 104)). Остальные следуют из рассуждений предыдущего параграфа. ▷

Следующая таблица отображает образ группы $\mathrm{Pin}(p,q)$ и ее компонент при действии гомоморфизмов ad и $\check{\mathrm{ad}}$ в случае различных сигнатур (p,q) алгебр Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$.

	$\check{\mathrm{ad}}$	ad			
	p, q – любые	p – чет. q – чет.	p – нечет. q – нечет.	p – нечет. q – чет.	p – чет. q – нечет.
$\mathrm{Pin}'_{\uparrow}$	$\mathrm{O}'_{\uparrow}$	$\mathrm{O}'_{\uparrow}$	$\mathrm{O}'_{\downarrow}$	SO'	$\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}$
$\mathrm{Pin}'_{\downarrow}$	$\mathrm{O}'_{\downarrow}$	$\mathrm{O}'_{\downarrow}$	$\mathrm{O}'_{\uparrow}$	$\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}$	SO'
Spin'	SO'	SO'	SO'	SO'	SO'
$\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}$	$\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}$	$\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}$	$\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}$	$\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}$	$\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}$
Pin	O	O	O	SO	SO

Заметим, что для построения общей картины связи спинорных и ортогональных групп удобно пользоваться измененным присоединенным представлением $\check{\mathrm{ad}}$, которое сопоставляет спинорным группам одни и те же соответствующие ортогональные группы для случая всех сигнатур (p,q). Вместе с тем в частных случаях, часто пользуются отображением ad, так как оно устроено проще.

Например, рассмотрим случай сигнатуры $(1,3)$, для которого числа $p=1$ и $q=3$ нечетны. В этом случае часто пользуются именно отображением ad, которое меняет местами накрытия ортохронной и ортохорной групп по сравнению с накрытием $\breve{\mathrm{ad}}$ для данной сигнатуры.

Лекция 9

9.1. Применение теоремы Картана–Дьедонне

В настоящем параграфе рассмотрим, как действует измененное присоединенное действие $\overset{\curlywedge}{\mathrm{ad}}$ на множестве обратимых элементов вещественной алгебры Клиффорда ранга один (см. упражнение 1)

$$\mathcal{C}\ell_1^{\mathbb{R}\times}(p,q) = \{x \in \mathcal{C}\ell_1^{\mathbb{R}}(p,q) \mid x^2 \neq 0\}.$$

Заметим, что антикоммутационные соотношения (1.3) для генераторов с диагональной матрицей η можно интерпретировать следующим образом. На подпространстве $V = \mathcal{C}\ell_1^{\mathbb{R}}(p,q)$ задана симметричная билинейная форма $q(x,y)$ такая, что

$$q(x,y)e = \frac{1}{2}(xy+yx) \qquad \forall x,y \in \mathcal{C}\ell_1^{\mathbb{R}}(p,q).$$

С ней связана квадратичная форма

$$Q(x) = q(x,x), \qquad q(x,y) = \frac{1}{2}(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)).$$

Если $x = x_a e^a$ и $y = y_a e^a$, то

$$q(x,y) = x_1 y_1 + \dots + x_p y_p - x_{p+1} y_{p+1} - \dots - x_n y_n.$$

Предложение 9.1 (см., например, [38]). *Гомоморфизм* $\overset{\curlywedge}{\mathrm{ad}}_s$, $s \in V^\times = \mathcal{C}\ell_1^{\mathbb{R}\times}(p,q)$ *действует на произвольном векторе* $v \in V = \mathcal{C}\ell_1^{\mathbb{R}}(p,q)$ *как отражение вектора* v *относительно гиперплоскости, ортогональной вектору* s, *т.е.*

$$\overset{\curlywedge}{\mathrm{ad}}_s v = s^\curlywedge v s^{-1} = v - 2\,\frac{q(v,s)}{q(s,s)}\,s.$$

Доказательство. Действительно, проведем несложные преобразования

$$\begin{aligned} s^\curlywedge v s^{-1} &= -svs^{-1} = v - (vs+sv)s^{-1} \\ &= v - 2q(v,s)\frac{s^2}{q(s,s)}\,s^{-1} = v - 2\,\frac{q(v,s)}{q(s,s)}\,s. \end{aligned}$$

Последняя формула геометрически в точности означает отражение вектора v относительно гиперплоскости, ортогональной вектору s (как векторная разность вектора v и удвоенной проекции вектора v на вектор s). Билинейная форма $q(x, y)$, введенная на V, играет при этом роль скалярного произведения. $\triangleright$

Предложение 9.2 [39]. *Гомоморфизм* $\overset{\curlywedge}{\mathrm{ad}}_s$, $s \in V^\times = \mathcal{C}\!\ell_1^{\mathbb{R}\times}(p,q)$ *задает псевдоортогональное преобразование произвольного вектора* $v \in V = \mathcal{C}\!\ell_1^{\mathbb{R}}(p,q)$, *т.е.*

$$\overset{\curlywedge}{\mathrm{ad}}\colon \mathcal{C}\!\ell_1^{\mathbb{R}\times}(p,q) \to \mathrm{O}(p,q).$$

Доказательство. Утверждение следует из того, что псевдоортогональная группа есть группа всех линейных преобразований векторного пространства V, сохраняющих невырожденную квадратичную форму на V. В нашем случае имеем $s^\curlywedge = -s$ и

$$Q(\overset{\curlywedge}{\mathrm{ad}}_s v) = (\overset{\curlywedge}{\mathrm{ad}}_s v)^2 = s^\curlywedge v s^{-1} s^\curlywedge v s^{-1} = v^2 = Q(v).$$

$\triangleright$

Сформулируем теорему Картана–Дьедонне.

Теорема 9.1 (Картана–Дьедонне) (см. [38], [39]). *Любое ортогональное преобразование невырожденного (псевдо)евклидова пространства* (V, Q) *размерности* n *с заданной квадратичной формой* Q *является композицией отражений относительно гиперплоскостей, число которых не больше* n.

Доказательство. Существует несколько различных доказательств теоремы Картана–Дьедонне. В частности, есть доказательство с использованием техники алгебры Клиффорда (см. [39]). $\triangleright$

Итак, в случае $V = \mathcal{C}\!\ell_1^{\mathbb{R}\times}(p,q)$ любое ортогональное преобразование $f \in \mathrm{O}(p,q)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} f(x) &= \overset{\curlywedge}{\mathrm{ad}}_{v_1} \circ \cdots \circ \overset{\curlywedge}{\mathrm{ad}}_{v_k}(x) = v_1^\curlywedge \cdots v_k^\curlywedge x v_k^{-1} \cdots v_1^{-1} \\ &= (v_1 \cdots v_k)^\curlywedge x (v_1 \cdots v_k)^{-1} = \overset{\curlywedge}{\mathrm{ad}}_{v_1 \ldots v_k}(x), \end{aligned}$$

где $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathcal{C}\!\ell_1^{\mathbb{R}\times}(p,q)$, $x \in \mathcal{C}\!\ell_1^{\mathbb{R}}(p,q)$.

Упражнения

1. Показать, что

$$(u_1e^1 + u_2e^2 + \dots + u_ne^n)(u_1e^1 + u_2e^2 + \dots + u_ne^n) \\ = \sum_{l=1}^{n} \eta^{ll}(u_l)^2 e$$

и, таким образом, обратимые элементы алгебры Клиффорда ранга 1 это в точности элементы такие, что $U^2 \neq 0$.

2*. Найти в литературе и ознакомиться с доказательством теоремы Картана–Дьедонне.

3. Показать с помощью теоремы Картана–Дьедонне (см. рассуждения после нее), что группу Липшица можно задать как

$$\Gamma^{\pm} = \{v_1v_2\dots v_k \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q) \mid v_1,\dots,v_k \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}\times}_1(p,q)\},$$

т.е. элементы группы Липшица это все элементы вида (где u, u_{ab} – произвольные константы)

$$T = ue\prod_{j=1}^{k}(u_{jl}e^l), \qquad \text{где} \quad u\prod_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{n}\eta^{ll}(u_{jl})^2 \neq 0.$$

4. Показать, что группу Клиффорда можно задать как

$$\Gamma = \big\{Wv_1v_2\dots v_k \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q) \\ \mid v_1,\dots,v_k \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}\times}_1(p,q),\ W \in \mathrm{cen}^{\times}\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)\big\},$$

т.е. элементы группы Клиффорда Γ это все элементы вида

$$T = ue\prod_{j=1}^{k}(u_{jl}e^l), \qquad \text{где} \quad u\prod_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{n}\eta^{ll}(u_{jl})^2 \neq 0$$

в случае четного n и

$$T = (ue + u_{1\dots n}e^{1\dots n})\prod_{j=1}^{k}(u_{jl}e^l),$$

где

$$(u^2 - (u_{1\dots n})^2(-1)^{n(n-1)/2+q})\prod_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{n}\eta^{ll}(u_{jl})^2 \neq 0$$

в случае нечетного n.

5. Показать, что

$$\Gamma^+ = \{v_1 v_2 \dots v_{2k} \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q) \mid v_1, \dots, v_{2k} \in \mathcal{C}\!\ell_1^{\mathbb{R}\times}(p,q)\},$$

т.е. элементы группы Γ^+ – это все элементы вида

$$T = u\prod_{j=1}^{2k}(u_{jl}e^l), \qquad \text{где} \quad u\prod_{j=1}^{2k}\sum_{l=1}^{n}\eta^{ll}(u_{jl})^2 \neq 0.$$

6. Показать, что элементы спинорных групп это в точности все элементы соответствующего вида

$$\begin{aligned}
T \in \mathrm{Pin}(p,q) \quad &\Longleftrightarrow \quad T = \prod_{j=1}^{k}(u_{jl}e^l), \quad \prod_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{n}\eta^{ll}(u_{jl})^2 = \pm 1,\\
T \in \mathrm{Spin}(p,q) \quad &\Longleftrightarrow \quad T = \prod_{j=1}^{2k}(u_{jl}e^l), \quad \prod_{j=1}^{2k}\sum_{l=1}^{n}\eta^{ll}(u_{jl})^2 = \pm 1,\\
T \in \mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q) \quad &\Longleftrightarrow \quad T = \prod_{j=1}^{2k}(u_{jl}e^l), \quad \prod_{j=1}^{2k}\sum_{l=1}^{n}\eta^{ll}(u_{jl})^2 = 1,\\
T \in \mathrm{Pin}_{\downarrow}(p,q) \quad &\Longleftrightarrow \quad T = \prod_{j=1}^{k}(u_{jl}e^l), \quad \prod_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{n}\eta^{ll}(u_{jl})^2 = 1,\\
T \in \mathrm{Pin}_{\uparrow}(p,q) \quad &\Longleftrightarrow \quad T = \prod_{j=1}^{k}(u_{jl}e^l), \quad \prod_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{n}(-\eta^{ll}(u_{jl})^2) = 1.
\end{aligned}$$

7. Показать с помощью явного вида спинорных групп, что в случае вещественной алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$ сигнатуры $(n,0)$ имеем две различные спинорные группы

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pin}(n,0) &= \mathrm{Pin}_{\downarrow}(n,0)\\
&= \{T \in \Gamma^{\pm} \mid T^{\sim}T = e\} = \{T \in \Gamma^{\pm} \mid T^{\sim\curlywedge}T = \pm e\},\\
\mathrm{Spin}(n,0) &= \mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(n,0) = \mathrm{Pin}_{\uparrow}(n,0)\\
&= \{T \in \Gamma^{+} \mid T^{\sim}T = e\} = \{T \in \Gamma^{\pm} \mid T^{\sim\curlywedge}T = e\}.
\end{aligned}$$

В случае вещественной алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$ сигнатуры $(0,n)$ имеем две различные спинорные группы

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pin}(0,n) &= \mathrm{Pin}_{\uparrow}(0,n)\\
&= \{T \in \Gamma^{\pm} \mid T^{\sim}T = \pm e\} = \{T \in \Gamma^{\pm} \mid T^{\sim\curlywedge}T = e\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Spin}(0,n) &= \mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(0,n) = \mathrm{Pin}_{\downarrow}(0,n)\\ &= \{T\in\Gamma^{\pm} \mid T^{\sim}T=e\} = \{T\in\Gamma^{\pm} \mid T^{\sim\curlywedge}T=e\}.\end{aligned}$$

8. Переформулировать теоремы о сюръективных отображениях спинорных групп на ортогональные в случае сигнатур $(n,0)$ и $(0,n)$: следующие гомоморфизмы сюръективны с соответствующим ядром:

$$\begin{array}{llll}
\overset{\curlywedge}{\mathrm{ad}}\colon & \mathrm{Pin}(n)\to \mathrm{O}(n), & \{\pm1\}, & \\
\overset{\curlywedge}{\mathrm{ad}}\colon & \mathrm{Spin}(n)\to \mathrm{SO}(n), & \{\pm1\}, & \\
\mathrm{ad}\colon & \mathrm{Pin}(n)\to \mathrm{O}(n), & \{\pm1\}, & \text{если } n - \text{четно},\\
\mathrm{ad}\colon & \mathrm{Pin}(n)\to \mathrm{SO}(n), & \{\pm1, \pm e^{1\ldots n}\}, & \text{если } n - \text{нечетно},\\
\mathrm{ad}\colon & \mathrm{Spin}(n)\to \mathrm{SO}(n), & \{\pm1\}. &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
\overset{\curlywedge}{\mathrm{ad}}\colon & \mathrm{Pin}(0,n)\to \mathrm{O}(n), & \{\pm1\}, & \\
\overset{\curlywedge}{\mathrm{ad}}\colon & \mathrm{Spin}(0,n)\to \mathrm{SO}(n), & \{\pm1\}, & \\
\mathrm{ad}\colon & \mathrm{Pin}(0,n)\to \mathrm{O}(n), & \{\pm1\}, & \text{если } n - \text{четно},\\
\mathrm{ad}\colon & \mathrm{Pin}(0,n)\to \mathrm{SO}(n), & \{\pm1, \pm e^{1\ldots n}\}, & \text{если } n - \text{нечетно},\\
\mathrm{ad}\colon & \mathrm{Spin}(0,n)\to \mathrm{SO}(n), & \{\pm1\}. &
\end{array}$$

Следующая таблица отображает образы компонент этих групп при действии гомоморфизмов ad и $\overset{\curlywedge}{\mathrm{ad}}$.

	$(n,0)$			$(0,n)$		
	$\overset{\curlywedge}{\mathrm{ad}}$	ad		$\overset{\curlywedge}{\mathrm{ad}}$	ad	
		n – чет.	n – нечет.		n – чет.	n – нечет.
Spin'	SO'	SO'	SO'	SO'	SO'	SO'
Pin	O	O	SO'	O	O	SO'

9. Рассмотрим вещественную алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(n,0)$ сигнатуры $(n,0)$. Пусть H – любой фиксированный нечетный элемент группы $\mathrm{Pin}(n)$, т.е. $H\in\mathrm{Pin}'(n)$. Показать, что

$$\mathrm{Pin}'(n) = H\,\mathrm{Spin}(n),$$

а значит, и

$$\mathrm{Pin}(n) = \mathrm{Spin}(n)\sqcup H\ \mathrm{Spin}(n), \qquad H\in\mathrm{Pin}'(n).$$

Рассмотрим вещественную алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(0,n)$ сигнатуры $(0,n)$. Пусть H – любой фиксированный нечетный элемент группы $\mathrm{Pin}(0,n)$, т.е.

$$H \in \mathrm{Pin}'(0,n).$$

Показать, что

$$\mathrm{Pin}'(0,n) = H\,\mathrm{Spin}(0,n),$$

а значит, и

$$\mathrm{Pin}(0,n) = \mathrm{Spin}(0,n) \sqcup H\ \mathrm{Spin}(0,n), \qquad H \in \mathrm{Pin}'(0,n).$$

Показать, что в качестве элемента H можно взять, например, любой генератор $H = e^a$. В случае нечетной размерности n можно взять $H = e^{1\ldots n}$.

Определены следующие факторгруппы:

$$\frac{\mathrm{Pin}(n)}{\mathrm{Spin}(n)} = \mathbb{Z}_2, \qquad \frac{\mathrm{Pin}(0,n)}{\mathrm{Spin}(0,n)} = \mathbb{Z}_2.$$

Каждая из групп $\mathrm{Pin}(n)$ и $\mathrm{Pin}(0,n)$ является объединением двух смежных классов. Таблицы умножения для групп $\mathrm{Pin}(n)$ и $\mathrm{Pin}(0,n)$ выглядят следующим образом:

	$\mathrm{Spin}(n)$	$\mathrm{Pin}'(n)$
$\mathrm{Spin}(n)$	$\mathrm{Spin}(n)$	$\mathrm{Pin}'(n)$
$\mathrm{Pin}'(n)$	$\mathrm{Pin}'(n)$	$\mathrm{Spin}(n)$

	$\mathrm{Spin}(0,n)$	$\mathrm{Pin}'(0,n)$
$\mathrm{Spin}(0,n)$	$\mathrm{Spin}(0,n)$	$\mathrm{Pin}'(0,n)$
$\mathrm{Pin}'(0,n)$	$\mathrm{Pin}'(0,n)$	$\mathrm{Spin}(0,n)$

9.2. Спинорные группы в случае малых размерностей $n \leqslant 6$

Следующее утверждение говорит о том, что спинорные группы для $n \leqslant 5$ можно задать более простым способом, чем в общем случае, так как условие

$$TvT^{-1} \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_1(p,q) \qquad \forall v \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_1(p,q)$$

для элементов этих групп выполняется автоматически.

Теорема 9.2 (частично см. в [12], [29], [39]). *При $n \leqslant 5$ определения спинорных групп можно дать следующим образом*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Pin}(p,q) &= \{T \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Even}}(p,q) \cup \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Odd}}(p,q) | T^{\sim}T = \pm e\} \\
&= \{T \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Even}}(p,q) \cup \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Odd}}(p,q) \mid T^{\sim\curlywedge}T = \pm e\}, \\
\mathrm{Pin}_{\downarrow}(p,q) &= \{T \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Even}}(p,q) \cup \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Odd}}(p,q) \mid T^{\sim}T = +e\}, \\
\mathrm{Pin}_{\uparrow}(p,q) &= \{T \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Even}}(p,q) \cup \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Odd}}(p,q) \mid T^{\sim\curlywedge}T = +e\}, \\
\mathrm{Spin}(p,q) &= \{T \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Even}}(p,q) \mid T^{\sim}T = \pm e\} \\
&= \{T \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Even}}(p,q) \mid T^{\sim\curlywedge}T = \pm e\}, \\
\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q) &= \{T \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Even}}(p,q) \mid T^{\sim}T = +e\} \\
&= \{T \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Even}}(p,q) \mid T^{\sim\curlywedge}T = +e\}.
\end{aligned} \tag{9.1}
$$

Доказательство. Нужно доказать, что при предположениях

$$
\begin{gathered}
T \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Even}}(p,q) \cup \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Odd}}(p,q), \\
T^{\sim}T = \pm e \quad (\text{или } T^{\sim\curlywedge}T = \pm e), \qquad n \leqslant 5,
\end{gathered}
$$

выполнено

$$T^{-1}vT \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_1(p,q) \qquad \forall v \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_1(p,q).$$

Действительно, так как $T \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Even}}(p,q) \cup \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Odd}}(p,q)$, то

$$T^{-1}vT \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Odd}}(p,q) = \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_1(p,q) \oplus \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_3(p,q) \oplus \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_5(p,q).$$

Если известно, что $T^{\sim}T = \pm e$, то выполнено

$$(T^{-1}vT)^{\sim} = (\pm T^{\sim}vT)^{\sim} = \pm T^{\sim}vT.$$

Так как знак перед выражением сохранился при действии сопряжения $\sim$, то

$$T^{-1}vT \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_1(p,q) \oplus \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_5(p,q).$$

Если известно, что $T^{\sim\curlywedge}T = \pm e$, то выполнено

$$(T^{-1}vT)^{\sim\curlywedge} = (\pm T^{\sim\curlywedge}vT)^{\sim\curlywedge} = \mp T^{\sim\curlywedge}vT.$$

Так как знак перед выражением поменялся на противоположный при действии сопряжения $\sim\curlywedge$, то опять получаем

$$T^{-1}vT \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_1(p,q) \oplus \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_5(p,q).$$

Таким образом, для $n \leqslant 4$ теорема доказана. Рассмотрим случай $n = 5$. Пусть утверждение неверно, т.е.

$$T^{-1}vT = w + \lambda e^{1\ldots 5}, \qquad w \in \mathcal{C}\!\ell_1^{\mathbb{R}}(p,q), \quad \lambda \neq 0.$$

Тогда (здесь мы пользуемся тем, что элементы можно циклически переставлять под знаком следа и тем, что элемент e_{12345} лежит в центре алгебры Клиффорда)

$$\begin{aligned}\lambda &= (T^{-1}vTe_{1\ldots 5} - we_{1\ldots 5})|_{e\to 1} = \mathrm{Tr}(T^{-1}vTe_{1\ldots 5}) \\ &= \mathrm{Tr}(e_{1\ldots 5}vT^{-1}T) = \mathrm{Tr}(e_{1\ldots 5}v) = 0,\end{aligned}$$

т.е. мы пришли к противоречию. Теорема доказана. $\triangleright$

Заметим, что утверждение теоремы будет неверным для алгебры Клиффорда размерности $n = 6$. Например, рассмотрим элемент

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{12} + e^{3456}) \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(6,0).$$

Для него выполнены условия

$$T \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Even}}, \qquad T^{\sim}T = \frac{1}{2}(-e^{12} + e^{3456})(e^{12} + e^{3456}) = e.$$

Но нетрудно убедиться, что

$$Te^1T^{-1} = \frac{1}{2}(e^{12} + e^{3456})e^1(-e^{12} + e^{3456}) = -e^{23456} \notin \mathcal{C}\!\ell_1^{\mathbb{R}}(6,0),$$

т.е. представленный элемент T не принадлежит ни одной из спинорных групп.

Будем рассматривать далее только группу $\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$. Остальные спинорные группы получаются из группы $\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$ домножением на выделенные элементы группы $\mathrm{Pin}(p,q)$ (см. упражнения после параграфа 8.1).

Соберем известные в литературе результаты об изоморфизме группы $\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$ классическим матричным группам и изобразим их в виде таблицы. Определения основных классических матричных групп $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{Sp}(n)$ даны в параграфе 12.2. Под S^k понимается единичная сфера размерности k с центром в нуле

$$S^k = \{x \in \mathbb{R}^{k+1} : |x| = 1\}.$$

Например, S^0 представляет из себя две точки $\{\pm 1\}$, а S^1 можно понимать как окружность в комплексной плоскости. В таблице используются обозначения ${}^2\mathrm{SU}(2) = \mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2)$ и ${}^2\mathrm{SU}(1,1) = \mathrm{SU}(1,1)\times\mathrm{SU}(1,1)$.

(p,q)	0	1	2	3	4	5	6
0	$\mathrm{O}(1)$	$\mathrm{O}(1)$	$\mathrm{U}(1)$	$\mathrm{SU}(2)$	${}^2\mathrm{SU}(2)$	$\mathrm{Sp}(2)$	$\mathrm{SU}(4)$
1	$\mathrm{O}(1)$	$\mathrm{GL}(1,\mathbb{R})$	$\mathrm{SU}(1,1)$	$\mathrm{Sp}(1,\mathbb{C})$	$\mathrm{Sp}(1,1)$	$\mathrm{SL}(2,\mathbb{H})$	
2	$\mathrm{U}(1)$	$\mathrm{SU}(1,1)$	${}^2\mathrm{SU}(1,1)$	$\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$	$\mathrm{SU}(2,2)$		
3	$\mathrm{SU}(2)$	$\mathrm{Sp}(1,\mathbb{C})$	$\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$	$\mathrm{SL}(4,\mathbb{R})$			
4	${}^2\mathrm{SU}(2)$	$\mathrm{Sp}(1,1)$	$\mathrm{SU}(2,2)$				
5	$\mathrm{Sp}(2)$	$\mathrm{SL}(2,\mathbb{H})$					
6	$\mathrm{SU}(4)$						

Отметим, что

$$\mathrm{O}(1) \simeq \{\pm 1\} \simeq \mathbb{Z}_2 \simeq S^0,$$
$$\mathrm{U}(1) \simeq \mathrm{SO}(2) \simeq S^1,$$
$$\mathrm{SU}(2) \simeq \mathrm{Sp}(1) \simeq S^3,$$
$$\mathrm{SU}(1,1) \simeq \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \simeq \mathrm{Sp}(1,\mathbb{R}),$$
$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \simeq \mathrm{Sp}(1,\mathbb{C}).$$

Заметим, что группы $\mathrm{Spin}(7)$ и $\mathrm{Spin}(8)$ не изоморфны никаким классическим матричным группам (см. [29]).

Топологические свойства спинорных групп будут более подробно рассмотрены далее (см. параграф 10.1).

Упражнения

1. Рассмотреть спинорные группы, реализуемые в алгебрах Клиффорда размерности 1:

$$\mathrm{Pin}(1) = \{e, -e, e^1, -e^1\} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,$$
$$\mathrm{Pin}(0,1) = \{e, -e, e^1, -e^1\} \simeq \{1, -1, i, -i\} = \mathbb{Z}_4,$$
$$\mathrm{Spin}(1) = \mathrm{Spin}(0,1) = \{e, -e\} \simeq \mathbb{Z}_2.$$

2. Рассмотреть спинорные группы, реализуемые в алгебрах Клиффорда сигнатур $(2,0)$ и $(0,2)$:

$$\mathrm{Pin}(2) = \{ae + be^{12} \mid a^2 + b^2 = 1\} \sqcup \{ce^1 + de^2 \mid c^2 + d^2 = 1\}$$
$$\simeq \mathrm{U}(1) \sqcup S^1,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Pin}(0,2) &= \{ae + be^{12} \mid a^2 + b^2 = 1\} \sqcup \{ce^1 + de^2 \mid c^2 + d^2 = 1\}\\ &\simeq \{a + bi \mid a^2 + b^2 = 1\} \cup \{cj + dk \mid c^2 + d^2 = 1\},\end{aligned}$$

$$\mathrm{Spin}(2) = \{ae + be^{12} \mid a^2 + b^2 = 1\} \simeq \mathrm{U}(1).$$

3. Рассмотреть, как группа Spin(2) действует на векторы x из $\mathbb{R}^2$ (рассматриваем их как элементы алгебры Клиффорда ранга 1).

$$\begin{aligned}T^{\curlywedge} x T^{-1} &= (\cos\varphi\, e + \sin\varphi\, e^{12})(x_1 e^1 + x_2 e^2)(\cos\varphi\, e - \sin\varphi\, e^{12})\\ &= e^1(\cos 2\varphi\, x_1 - \sin 2\varphi\, x_2) + e^2(\cos 2\varphi\, x_2 + \sin 2\varphi\, x_1).\end{aligned}$$

Таким образом, действие элемента группы Spin(2) на вектор представляет из себя поворот на угол 2φ. В то время как действие элемента группы U(1) на комплексное число (x_1, x_2) представляет из себя поворот на угол φ:

$$\begin{aligned}&(\cos\varphi + \sin\varphi\, i)(x_1 + i x_2)\\ &\quad = (\cos\varphi\, x_1 - \sin\varphi\, x_2) + i(\cos\varphi\, x_2 + \sin\varphi\, x_1).\end{aligned}$$

4. Показать, что группа Pin(1, 1) состоит из четырех компонент

$$\begin{aligned}\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(1,1) &= \{ae + be^{12} \mid a^2 - b^2 = 1\},\\ \mathrm{Spin}'(1,1) &= \{ae + be^{12} \mid a^2 - b^2 = -1\},\\ \mathrm{Pin}'_{\downarrow}(1,1) &= \{ce^1 + de^2 \mid c^2 - d^2 = 1\},\\ \mathrm{Pin}'_{\uparrow}(1,1) &= \{ce^1 + de^2 \mid c^2 - d^2 = -1\}\end{aligned}$$

и является, таким образом, объединением 8 ветвей гипербол. Первая из компонент (и группа) $\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(1,1)$ не является линейно связной. Она состоит из двух ветвей гиперболы, в то время, как группа

$$\mathrm{Spin}(1,1) = \{ae + be^{12} \mid a^2 - b^2 = \pm 1\}$$

имеет четыре связные компоненты.

5. Показать, что группа

$$\mathrm{Spin}(3) = \{ae + be^{12} + ce^{13} + de^{23} \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}$$

изоморфна группе единичных кватернионов

$$\mathrm{SU}(2) \simeq \{a + bi + cj + dk \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}.$$

Также рассмотреть

$$\begin{aligned}\mathrm{Pin}(3) = \mathrm{Spin}(3)&\\ &\sqcup \{ae^1 + be^2 + ce^3 + de^{123} \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\},\\ \mathrm{Pin}(0,3) = \mathrm{Spin}(3)&\\ &\sqcup \{ae^1 + be^2 + ce^3 + de^{123} \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}.\end{aligned}$$

Заметим, что в первом случае величины $(e^1)^2 = (e^2)^2 = (e^3)^2 = 1$, а во втором случае $(e^1)^2 = (e^2)^2 = (e^3)^2 = -1$. Таким образом, топологически группа $\mathrm{Pin}(3)$ представляет из себя объединение двух трехмерных сфер S^3, лежащих в четном и нечетном подпространстве.

6. Сравнить действие группы $\mathrm{Spin}(3)$ на векторы x из $\mathbb{R}^3$ и стандартное действие группы $\mathrm{SU}(2)$ на $\mathbb{R}^3$ (при этом в уме держим соответствие $e^{12} = k$, $e^{13} = -j$, $e^{23} = i$)

$$\begin{aligned}T^{\curlywedge} x T^{-1} &= e_{123} e^{123} T^{\curlywedge} x T^{-1}\\ &= (a + bi + cj + dk)(x_1 e^1 + x_2 e^2 + x_3 e^3)(a - bi - cj - dk)\\ &= e_{123}(a + bi + cj + dk)(x_1 i + x_2 j + x_3 k)(a - bi - cj - dk).\end{aligned}$$

Таким образом, приняв во внимание соответствия $x \to e_{123} x$ и $T \to e_{123} T$, получаем стандартное действие группы единичных кватернионов $\mathrm{SU}(2)$ на $\mathbb{R}^3$.

9.3. Алгебры Ли спинорных групп

Группы

$$\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}\times}(p,q), \quad \Gamma(p,q), \quad \Gamma^{\pm}(p,q),$$

$$\mathrm{Pin}(p,q), \quad \mathrm{Spin}(p,q), \quad \mathrm{Pin}_{\uparrow}(p,q), \quad \mathrm{Pin}_{\downarrow}(p,q), \quad \mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$$

можно рассматривать как группы Ли. Им соответствуют вещественные алгебры Ли, которые могут быть отождествлены с некоторыми подпространствами алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$. Роль скобки Ли играет коммутатор $[A,B] = AB - BA$.

Теорема 9.3 [12]. *Следующие группы Ли имеют соответствующие вещественные алгебры Ли*:

- *группе обратимых элементов алгебры Клиффорда* $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}\times}(p,q)$ *соответствует алгебра Ли*

$$\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$$

(*с операцией взятия коммутатора*);

- *группе Липшица* $\Gamma^{\pm}(p,q)$ *соответствует алгебра Ли*
$$\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_0(p,q)\oplus\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_2(p,q);$$
- *группе* $\Gamma^{+}(p,q)$ *соответствует алгебра Ли*
$$\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_0(p,q)\oplus\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_2(p,q);$$
- *группе Клиффорда* $\Gamma(p,q)$ *соответствует алгебра Ли*
$$\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_0(p,q)\oplus\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_2(p,q)$$
в случае четного $n=p+q$ *и алгебра Ли*
$$\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_0(p,q)\oplus\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_2(p,q)\oplus\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_n(p,q)$$
в случае нечетного n.

Доказательство. Пусть T – элемент группы обратимых элементов алгебры Клиффорда. Если T лежит в окрестности единицы e, то
$$T=e+\varepsilon t, \tag{9.2}$$
где t – элемент соответствующей ей алгебры Ли и ε – малое вещественное число. Следующие на этой странице равенства справедливы с точностью до слагаемых порядка ε^2. Символически будем писать $\varepsilon^2=0$.

Очевидно, что
$$(e+\varepsilon t)(e-\varepsilon t)=e,$$
т.е. элемент T обратим при любом t.

Теперь пусть T – элемент группы Липшица $\Gamma^{\pm}(p,q)$ и имеет вид (9.2). Так как T – либо четный, либо нечетный элемент, то $t\in\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Even}}(p,q)$.

Имеем
$$\begin{aligned}\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_1(p,q)\ni T\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_1(p,q)T^{-1}&=(e+\varepsilon t)\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_1(p,q)(e-\varepsilon t)\\&=\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_1(p,q)+\varepsilon(t\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_1(p,q)-\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_1(p,q)t).\end{aligned}$$

Тогда (см. упражнение 1)
$$[t,\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_1(p,q)]\in\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_1(p,q)\quad\Longrightarrow\quad t\in\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_0(p,q)\oplus\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_2(p,q).$$

Итак, получили, что для группы Липшица $\Gamma^{\pm}(p,q)$ алгеброй Ли является $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_0(p,q)\oplus\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_2(p,q)$.

Для группы Γ^+ все рассуждения проводятся аналогично.

В случае алгебры Клиффорда четной размерности группа Клиффорда совпадает с группой Липшица, а значит ей соответствует та же алгебра Ли. В случае алгебры Клиффорда нечетной размерности n имеем

$$[t, \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_1(p,q)] \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_1(p,q) \quad \Longrightarrow \quad t \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_0(p,q) \oplus \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_2(p,q) \oplus \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_n(p,q).$$

Сравнение размерностей рассматриваемых подпространств завершает доказательство теоремы. $\triangleright$

Теорема 9.4 [12], [29], [39]. *Всем 5 спинорным группам Ли*

$$\mathrm{Pin}(p,q), \quad \mathrm{Spin}(p,q), \quad \mathrm{Pin}_{\uparrow}(p,q), \quad \mathrm{Pin}_{\downarrow}(p,q), \quad \mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$$

соответствует алгебра Ли $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_2(p,q)$ – множество элементов ранга 2 вещественной алгебры Клиффорда.

Доказательство. Действительно, пусть T – элемент одной из спинорных групп. Тогда в окрестности единицы

$$T = e + \varepsilon t, \qquad \varepsilon^2 = 0,$$

где t – элемент соответствующей ей алгебры Ли. Тогда условие

$$e = T^{\sim} T = (e + \varepsilon t^{\sim})(e + \varepsilon t) = e + \varepsilon(t^{\sim} + t)$$

дает $t^{\sim} = -t$, т.е.

$$t \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_2(p,q) \oplus \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_3(p,q) \oplus \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_6(p,q) \oplus \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_7(p,q) \oplus \cdots .$$

Аналогично условие

$$e = T^{\sim\curlywedge} T = (e + \varepsilon t^{\sim\curlywedge})(e + \varepsilon t) = e + \varepsilon(t^{\sim\curlywedge} + t)$$

дает $t^{\sim\curlywedge} = -t$, т.е.

$$t \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_1(p,q) \oplus \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_2(p,q) \oplus \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_5(p,q) \oplus \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_6(p,q) \oplus \cdots .$$

Но $T \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}\times}_{\mathrm{Even}}(p,q) \cup \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}\times}_{\mathrm{Odd}}(p,q)$, а значит, в обоих случаях

$$t \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_2(p,q) \oplus \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_6(p,q) \oplus \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_{10}(p,q) \oplus \cdots .$$

Наконец, из условия

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_1(p,q) \ni T\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_1(p,q)T^{-1} &= (e + \varepsilon t)\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_1(p,q)(e - \varepsilon t) \\ &= \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_1(p,q) + \varepsilon[t, \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_1(p,q)] \end{aligned}$$

в силу

$$[t, \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_1(p,q)] \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_1(p,q)$$

следует, что t – произвольный элемент ранга два

$$t \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_2(p,q).$$

$\triangleright$

Упражнения

1. Докажите, что если для элемента $U \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$ верно

$$[U, e^a] \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_1(p,q) \qquad \forall a = 1,2,\ldots,n,$$

то

$$U \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_0(p,q) \oplus \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_2(p,q)$$

в случае четного n и

$$U \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_0(p,q) \oplus \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_2(p,q) \oplus \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_n(p,q)$$

в случае нечетного n.

Лекция 10

10.1. Двулистные накрытия ортогональных групп спинорными, связность и односвязность спинорных групп

Некоторые сведения по дифференциальной геометрии даны в параграфе 12.3.

Рассмотрим действие группы $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ на группе $\mathrm{Pin}(p, q)$. В силу теоремы 8.5 (с. 111) имеем изоморфизм

$$\mathrm{O}(p, q) \simeq \mathrm{Pin}(p, q)/\mathbb{Z}_2.$$

Аналогичные изоморфизмы можно написать для остальных спинорных и ортогональных групп. Далее в этом параграфе будем рассматривать из 5 спинорных групп только группы $\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p, q)$ и $\mathrm{Pin}(p, q)$.

Имеет место теорема.

Теорема 10.1 (см. [38], [39]). *Группы $\mathrm{Pin}(p, q)$ и $\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p, q)$ дважды накрывают группы $\mathrm{O}(p, q)$ и $\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p, q)$ соответственно для $p \geqslant 0$ и $q \geqslant 0$.*

Доказательство. Требуется проверить, что группа $\mathbb{Z}_2$ действует на группе $\mathrm{Pin}(p, q)$ свободно и собственно разрывно (см. упражнения). Тогда по теореме 12.2 (с. 166) получим утверждение о двулистном накрытии. $\triangleright$

Группы $\mathrm{O}(p, q)$ и $\mathrm{SO}(p, q)$ за исключением случаев вырожденных сигнатур $(n, 0)$ и $(0, n)$ не являются связными, а состоят из 4 и 2 компонент соответственно.

Группа $\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p, q)$ связна, в то время как группа $\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p, q)$ не всегда связна.

Например, следующая группа не является линейно связной и представляет из себя две ветви гиперболы:

$$\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(1, 1) = \{ue + ve^{12} \mid u^2 - v^2 = 1\}.$$

Однако имеет место следующая теорема.

Теорема 10.2 (см. [38], [39]). *Группа* $\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$ *линейно связна при* $p \geqslant 2$ *или* $q \geqslant 2$.

Доказательство. Сначала покажем, что при $p \geqslant 2$ или $q \geqslant 2$ всегда существует путь, лежащий в группе $\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$ и соединяющий точки 1 и -1.

Действительно, так как $p \geqslant 2$ или $q \geqslant 2$, то всегда можно взять два генератора e^1 и e^2 такие, что

$$(e^1)^2 = (e^2)^2 = \pm e, \qquad e^1 e^2 = -e^2 e^1.$$

Теперь возьмем путь (окружность)

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= (\cos(t)e^1 + \sin(t)e^2)(\sin(t)e^2 - \cos(t)e^1)\\ &= \pm\cos(2t)e + \sin(2t)e^{12}, \qquad t \in [0,\pi].\end{aligned}$$

Очевидно, что этот путь соединяет точки 1 и -1 (нужно взять $t=0$ и $t=\pi/2$). Этот путь лежит в группе $\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$, так как

$$\gamma^{\sim}(t) = \gamma^{-1}(t) = \pm\cos(2t)e - \sin(2t)e^{12}$$

и преобразование $\gamma(t)v\gamma^{-1}(t)$ переводит элементы ранга 1 в элементы ранга 1.

Теперь пользуемся тем, что группа $\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$ линейно связна. Возьмем произвольные две точки T_1 и T_2 в $\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$. Пусть p – двулистное накрытие $p\colon \mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q) \to \mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$. Тогда существует путь, соединяющий точки $p(T_1)$ и $p(T_2)$. По теореме о поднятии пути (см. теорема 12.1 (с. 166)) существует путь $\widetilde{\gamma}$ в $\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$ с началом в T_1 и концом в $\widetilde{T}_2$ таким, что $p(T_2) = p(\widetilde{T}_2)$. Но $p^{-1}(p(T_2)) = \{\pm T_2\}$, а значит, $\widetilde{T}_2 = \pm T_2$. Далее, так как T_2 и $-T_2$ связаны некоторым путем, получаем, что есть путь, связывающий T_1 и T_2. ▷

Теорема 10.3 (см. [38], [39]). *Двулистное накрытие группы* $\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$ *группой* $\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$ *нетривиально во всех случаях, кроме случая* $(p,q)=(1,1)$.

Доказательство. Нетривиальность накрытий следует из того факта, что накрывающее пространство связно. ▷

В случае сигнатур $(n,0)$, $(0,n)$, $(n-1,1)$ и $(1,n-1)$ группа $\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$ является не только связной, но и односвязной. Об этом пойдет речь в следующем утверждении.

Отметим, что группы $\mathrm{Spin}(n)$ топологически проще, чем группы $\mathrm{SO}(n)$. Это выражается в том, что $\mathrm{SO}(n)$ не являются односвязными при $n \geqslant 3$.

Заметим, что группа $\mathrm{Pin}(p,q)$ в евклидовых случаях (сигнатуры $(n,0)$ и $(0,n)$, $n \geqslant 3$) состоит из 2, а в лоренцевых случаях (сигнатуры $(n-1,1)$ и $(1,n-1)$, $n \geqslant 4$) из 4 односвязных компонент – копий группы $\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$.

Теорема 10.4 (см. [38], [39]). *Группы*

$$\mathrm{Spin}(n), \qquad n \geqslant 3,$$
$$\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(1,n-1) \simeq \mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(n-1,1), \qquad n \geqslant 4$$

односвязны.

Доказательство. Рассматриваемые группы связны по теореме 10.2 (с. 131). То, что фундаментальная группа рассматриваемых групп тривиальна следует из

$$\pi(\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q)) = \mathbb{Z}_2 = \ker \overset{\curlywedge}{\mathrm{ad}}\,|_{\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)}$$

и некоторых рассуждений из топологии, которые мы опускаем (см. [38] или [39]). ▷

Теорема 10.5 (см. [38], [39]). *Двулистные накрытия группы* $\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$ *группой* $\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$ *в случаях сигнатур*

$$(n,0), \quad (0,n), \qquad n \geqslant 3,$$
$$(n-1,1), \quad (1,n-1), \qquad n \geqslant 4$$

являются универсальными.

Доказательство. Универсальность накрытий в рассматриваемых случаях следует из односвязности накрывающих пространств. ▷

Упражнения

1. Проверить, что группа $\mathbb{Z}_2$ действует на группе $\mathrm{Pin}(p,q)$ свободно и собственно разрывно.

2*. Доказать, что группа $\mathrm{Spin}(n)$ компактна и имеет ту же алгебру Ли, что и группа $\mathrm{SO}(n)$. Группа $\mathrm{Pin}(n)$ также компактна.

10.2. n-мерное уравнение Дирака в матричном формализме

Рассмотрим псевдоевклидово пространство $\mathbb{R}^{p,q}$, $p+q=n$, с декартовыми координатами

$$x^\mu, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, n,$$

и псевдоевклидовой метрикой, которая задается матрицей

$$\eta = \|\eta^{\mu\nu}\| = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1).$$

Первые p координат будем называть временными, последние q координат – пространственными. Частным случаем псевдоевклидова пространства является пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$.

Пусть $m \geqslant 0$ – вещественное число (масса частицы). Через $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ будем обозначать частные производные.

Рассмотрим оператор Клейна–Гордона–Фока $\partial^\mu\partial_\mu + m^2$ и разложим его на два сомножителя:

$$(\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\psi = (\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\psi = \left(\frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}\partial_\mu\partial_\nu + m^2\right)\psi$$
$$= (\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\psi = (-i\gamma^\mu\partial_\mu - m)(i\gamma^\nu\partial_\nu - m)\psi.$$

Матрицы γ^μ удовлетворяют соотношениям

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}\mathbf{1}, \qquad \partial_\mu\gamma^\nu = 0.$$

Теперь обсудим какие возможны реализации квадратных матриц γ^μ, удовлетворяющих данным соотношениям. Обозначим размер матриц через r.

В случае четного n в качестве матриц можем взять матрицы, которыми задается матричное представление комплексной алгебры Клиффорда – комплексные матрицы размера $k = 2^{n/2}$. Возможны также другие реализации (когда соответствующие алгебры матриц изоморфны не комплексной, а вещественной алгебре Клиффорда). А именно, в случае сигнатур $p-q \equiv 0, 2 \bmod 8$ матрицы могут быть вещественные размера $r = 2^{n/2}$, а в случае сигнатур $p-q \equiv 4, 6 \bmod 8$ матрицы могут быть над телом кватернионов размера $r = 2^{(n-2)/2}$.

В случае нечетного n (реализация, когда алгебра матриц изоморфна комплексной алгебре Клиффорда) – матрицы комплексные размера $r = 2^{(n+1)/2}$, причем блочно-диагональные, состоящие из двух блоков размеров $2^{(n-1)/2}$. Вторая реализация (изоморфизм вещественной алгебре Клиффорда): в случае сигнатуры $p - q \equiv 1$ – матрицы вещественные размера $r = 2^{(n+1)/2}$ и блочно-диагональные, в случае сигнатуры $p - q \equiv 5$ – матрицы над телом кватернионов размера $r = 2^{(n-1)/2}$ и блочно-диагональные, в случае сигнатур $p - q \equiv 3, 7$ – матрицы комплексные размера $r = 2^{(n-1)/2}$.

В частности, в случае сигнатуры $(1, 3)$ в качестве матриц γ^μ подойдут стандартные матрицы Дирака (изоморфизм комплексной алгебре Клиффорда)

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В случае сигнатуры $(3, 0)$ подойдут матрицы Паули (изоморфизм вещественной алгебре Клиффорда):

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Уравнение Дирака для электрона в вакууме (при отсутствии внешних полей) выглядит следующим образом:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0.$$

Здесь $\psi = \psi(x) = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r)^T$ – волновая функция электрона (столбец из r комплекснозначных функций).

Уравнение Дирака для электрона, взаимодействующего с внешним магнитным полем, имеет вид

$$i\gamma^\mu(\partial_\mu \psi - i a_\mu \psi) - m\psi = 0. \tag{10.1}$$

Ковектор a_μ называется потенциалом электромагнитного поля.

Будем рассматривать линейные замены координат

$$x^\mu \to x'^\mu = p^\mu_\nu x^\nu,$$

где $P = \|p^\mu_\nu\| \in \mathrm{O}(p,q)$ – ортогональная матрица.

Исследуем уравнение Дирака на ковариантность при таких преобразованиях координат.

Входящие величины преобразуются по следующим правилам

$$\partial_\mu \to \partial'_\mu = q^\nu_\mu \partial_\nu, \qquad a_\mu \to a'_\mu = q^\nu_\mu a_\nu.$$

где $Q = \|q^\nu_\mu\| = P^{-1}$ – матрица, обратная к P.

Для правил преобразования величин γ^μ и ψ имеется две точки зрения (см. [40]).

Пусть

$$\gamma^\mu \to \gamma'^\mu = p^\mu_\nu \gamma^\nu, \qquad \psi \to \psi' = \psi.$$

Тогда уравнение Дирака, очевидно, инвариантно относительно таких преобразований.

Теперь пусть

$$\gamma^\mu \to \gamma'^\mu = \gamma^\mu, \qquad \psi \to \psi' = S\psi,$$

где матрица S удовлетворяет уравнению

$$S^{-1}\gamma^\mu S = p^\mu_\nu \gamma^\nu. \tag{10.2}$$

Инвариантность уравнения Дирака следует из следующих выкладок

$$\begin{aligned} i\gamma'^\mu(\partial'_\mu\psi' - ia'_\mu\psi') - m\psi' &= i\gamma^\mu(q^\nu_\mu\partial_\nu S\psi - iq^\nu_\mu a_\nu S\psi) - mS\psi \\ &= S(iS^{-1}q^\nu_\mu\gamma^\mu S(\partial_\nu\psi - ia_\nu\psi) - m\psi) \\ &= S(i\gamma^\nu(\partial_\nu\psi - ia_\nu\psi) - m\psi). \end{aligned}$$

Заметим, что в случае четного n матрица S является реализацией элемента группы $\mathrm{Pin}(p,q)$ в виде матрицы. Формула (10.2) описывает в этом случае двулистные накрытия ортогональных групп спинорными. По соответствующей теореме о двулистном накрытии ортогональных групп спинорными матрица S определяется однозначно с точностью до знака $\pm S$.

В случае нечетного n уравнение Дирака будет инвариантно только относительно специальных ортогональных преобразований с матрицей $P \in \mathrm{SO}(p,q)$ (см. соответствующие теоремы о сюръективных отображениях спинорных групп на ортогональные, параграф 8.3).

Столбец ψ, преобразующийся при ортогональных преобразованиях по правилу $\psi \to S\psi$, будем называть *спинором Дирака.* В случае сигнатуры $(3,0)$ спиноры Дирака также называют *спинорами Паули*

$$\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2, \qquad \psi_1, \psi_2 \in \mathbb{C}.$$

10.3. n-мерное уравнение Дирака в формализме АК

Спиноры и спинорные пространства. Впервые спиноры были рассмотрены Картаном в 1913 г. [4]. С тех пор было развито много подходов, предложено много различных реализаций спиноров, в том числе в случае произвольных размерностей. Открытие в 1928 г. уравнения Дирака [8] привлекло внимание к изучению спиноров со стороны многих математиков и физиков (см. [9]–[11]). В 1930 г. Жуве [41] и Заутер [42] рассматривали спинор как элемент левого идеала в матричной алгебре. В 1947 г. Рисс [6] впервые интерпретировал спиноры как элементы левого идеала в алгебре Клиффорда. Именно такой подход оказывается наиболее удобным при рассмотрении n-мерных спиноров и изучении их свойств (см., например, [12], [29]).

Рассмотрим вещественную алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$ и примитивный идемпотент (см. параграф 3.3)

$$t^2 = t, \qquad t \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q).$$

Ему соответствует минимальный левый идеал (*спинорное пространство*)

$$I(t) = \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)t,$$

порожденный идемпотентом t. Элементы левого идеала $\psi \in I(t)$ будем называть *спинорами* (*в формализме алгебр Клиффорда*).

Неприводимое представление алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(p,q) \to \mathrm{End}(I)$ инъективно в случае $p-q \neq 1 \mod 4$. В случае $p-q \equiv 1 \mod 4$ алгебра Клиффорда не является простой и представляет из себя прямую сумму двух простых идеалов. В этом случае рассматривается левый идеал (*двойное спинорное пространство*)

$I \oplus \widehat{I}$, построенный по идемпотентам t и $\widehat{t}$. Таким образом, получаем инъективное представление в случае $p - q \equiv 1 \mod 4$. Однако, оно является приводимым и представляет из себя прямую сумму двух неприводимых представлений. Каждое из этих неприводимых представлений называются *полуспинорными*, соответствующие левые идеалы называются *полуспинорными пространствами.*

При рассмотрении комплексной алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(p, q)$ действуют аналогичным образом. В случае четного n рассматривают спинорное представление. Элементы левого идеала называют *спинорами Дирака.* В случае нечетного n рассматривают либо *двойные спиноры*, либо *полуспиноры.* Далее будем рассматривать только комплексные алгебры Клиффорда и приводимые представления.

Уравнение Дирака. Рассмотрим псевдоевклидово пространство $\mathbb{R}^{p,q}$ с декартовыми координатами

$$x^\mu, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, n,$$

и псевдоеклидовой метрикой, которая задается матрицей

$$\eta = \|\eta^{\mu\nu}\| = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1).$$

Первые p координат будем называть временными, последние q координат – пространственными.

Рассмотрим комплексную алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(p, q)$ (или вещественную алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p, q)$) с генераторами

$$e^a, \qquad a = 1, 2, \ldots, n,$$

удовлетворяющими соотношениям

$$e^a e^b + e^b e^a = 2\eta^{ab} e.$$

Пусть $m \geqslant 0$ – вещественное число (масса частицы). Через $\partial_\mu = \partial / \partial x^\mu$ будем обозначать частные производные.

Рассмотрим следующее *уравнение Дирака в формализме алгебр Клиффорда*

$$i e^\mu (\partial_\mu \psi - i a_\mu \psi) - m\psi = 0. \tag{10.3}$$

Ковектор a_μ называется потенциалом электромагнитного поля. В случае уравнения Дирака для электрона в вакууме считаем $a_\mu = 0$.

Здесь $\psi = \psi(x)\colon \mathbb{R}^{p,q} \to I(t)$ – спинор, т.е. отображение из псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{p,q}$ в левый идеал алгебры Клиффорда.

Будем рассматривать линейные замены координат

$$x^\mu \to x'^\mu = p^\mu_\nu x^\nu,$$

где $P = \|p^\mu_\nu\| \in \mathrm{O}(p,q)$ – ортогональная матрица.

Исследуем уравнение Дирака на ковариантность при таких преобразованиях координат.

Входящие величины преобразуются по следующим правилам

$$\partial_\mu \to \partial'_\mu = q^\nu_\mu \partial_\nu, \qquad a_\mu \to a'_\mu = q^\nu_\mu a_\nu.$$

где $Q = \|q^\nu_\mu\| = P^{-1}$ – матрица, обратная к P.

Кроме того

$$e^\mu \to e'^\mu = e^\mu, \qquad \psi \to \psi' = S\psi,$$

где элемент S удовлетворяет уравнению

$$S^{-1} e^\mu S = p^\mu_\nu e^\nu. \tag{10.4}$$

Инвариантность уравнения Дирака следует из следующих выкладок

$$\begin{aligned} ie'^\mu(\partial'_\mu \psi' - ia'_\mu \psi') - m\psi' &= ie^\mu(q^\nu_\mu \partial_\nu S\psi - iq^\nu_\mu a_\nu S\psi) - mS\psi \\ &= S(iS^{-1} q^\nu_\mu e^\mu S(\partial_\nu \psi - ia_\nu \psi) - m\psi) \\ &= S(ie^\nu(\partial_\nu \psi - ia_\nu \psi) - m\psi). \end{aligned}$$

Заметим, что в случае четного n элемент S принадлежит группе $\mathrm{Pin}(p,q)$. Формула (10.4) описывает в этом случае двулистные накрытия ортогональных групп спинорными. По соответствующей теореме о двулистном накрытии ортогональных групп спинорными элемент S определяется однозначно с точностью до знака $\pm S$.

В случае нечетного n уравнение Дирака будет инвариантно только относительно специальных ортогональных преобразований с матрицей $P \in \mathrm{SO}(p,q)$.

В упражнениях предлагается рассмотреть частные случаи спиноров для сигнатур $(1,3)$ и $(0,3)$.

Упражнения

1. Заметим, что спиноры Паули (случай сигнатуры $(3,0)$) можно рассматривать как матрицы с нулевым вторым столбцом

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 \\ \psi_2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \psi_1, \psi_2 \in \mathbb{C}.$$

Показать, что такие матрицы образуют левый идеал I алгебры матриц $\mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})$, так как для $U \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})$ и $\psi \in I$ имеем $U\psi \in I$.

Показать, что идеал можем записать как $I = \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})t$, где t – примитивный идемпотент $t^2 = t$, имеющий вид

$$t = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \sigma^3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Реализовать конструкцию спиноров Паули в алгебре Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(3,0) \simeq \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})$. А именно, имеем

$$\psi \in I = \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(3,0)\, t, \qquad t = \frac{1}{2}(e + e^3).$$

Доказать, что следующие элементы образуют базис левого идеала I:

$$t, \quad t_1 = \frac{1}{2}(e^{23} + e^2), \quad t_2 = \frac{1}{2}(-e^{13} - e^1), \quad t_3 = \frac{1}{2}(e^{12} + e^{123}).$$

Введем правую F-линейную структуру

$$I \times F \to I, \qquad (\psi, \lambda) \to \psi\lambda,$$

где

$$F = t\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(3,0)t \simeq \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad c \in \mathbb{C}$$

– подкольцо с единицей t (т.к. $ta = at, t \in F$). Показать, что оно является кольцом с делением, так как для любого ненулевого $a \in F$ существует единственный $b \in F$ такой, что $ab = t$. Кроме того, имеем изоморфизм $F \simeq \mathbb{C}$.

3. Рассмотреть спиноры Дирака в случае сигнатуры $(1,3)$

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4, \qquad \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4 \in \mathbb{C},$$

и реализовать их как элементы минимального левого идеала $I = \mathrm{Mat}(4, \mathbb{C})t$, порожденного примитивным идемпотентом t:

$$t = \frac{1}{2}(1+\gamma^0)\frac{1}{2}(1+i\gamma^{12}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_2 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_3 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Принимая по внимание изоморфизм $\mathrm{Mat}(4, \mathbb{C}) \simeq \mathcal{C}\!\ell(1,3)$, перейти к технике алгебр Клиффорда и удостовериться, что спинор

$$\psi \in \mathcal{C}\!\ell(1,3)t, \qquad t = \frac{1}{2}(1+e^0)\frac{1}{2}(1+ie^{12})$$

является реализацией спинора Дирака в алгебре Клиффорда (генераторы обозначены через e^0, e^1, e^2 и e^3).

10.4. Спиноры Дирака и Вейля в формализме АК

Рассмотрим множество спиноров, реализуемое в комплексной алгебре Клиффорда (как элементы левого идеала, см. параграф 10.3)

$$E_{\mathrm{Dirac}} = \{\psi \in I(t)\}$$

и назовем его элементы *спинорами Дирака.*

Рассмотрим *киральный оператор* ω (или псевдоскаляр)

$$\omega = \begin{cases} e^{1\ldots n}, & p-q \equiv 0,1 \bmod 4, \\ ie^{1\ldots n}, & p-q \equiv 2,3 \bmod 4. \end{cases} \tag{10.5}$$

Нетрудно проверить, что $\omega^2 = e$ и $(\omega)^\dagger = \omega$. Таким образом, имеем

$$\omega = \omega^{-1} = \omega^\dagger.$$

Кроме того (см. параграф 2.2)

$$\begin{aligned} \{\omega, e^a\} &= 0, \qquad a = 1, \dots, n, \qquad \text{если } n \text{ – четно,} \\ [\omega, e^a] &= 0, \qquad a = 1, \dots, n, \qquad \text{если } n \text{ – нечетно.} \end{aligned} \tag{10.6}$$

Определим два оператора

$$P_L = \frac{e - \omega}{2}, \qquad P_R = \frac{e + \omega}{2}.$$

Они являются ортогональными идемпотентами (проекторами), так как

$$(P_R)^2 = P_R, \qquad (P_L)^2 = P_L, \qquad P_R P_L = P_L P_R = 0.$$

В случае четного n алгебра Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(p,q)$ является центральной простой и изоморфна алгебре матриц над $\mathbb{C}$.

В случае нечетного n алгебра Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(p,q)$ не является центральной простой, так как центру принадлежат не только скаляры λe, а также и псевдоскаляры $\lambda e^{1\dots n}$. В этом случае рассматриваемые операторы P_L и P_R лежат в центре алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(p,q)$ и дают разложение алгебры Клиффорда на прямую сумму двух идеалов

$$\mathcal{C}\!\ell(p,q) = P_R \mathcal{C}\!\ell(p,q) \oplus P_L \mathcal{C}\!\ell(p,q). \tag{10.7}$$

Имеют место следующие изоморфизмы:

$$\begin{aligned} &\mathcal{C}\!\ell(p,q) \simeq \mathrm{Mat}(2^{n/2}, \mathbb{C}), && \text{если } n \text{ – четно,} \\ &\mathcal{C}\!\ell(p,q) \simeq \mathrm{Mat}(2^{(n-1)/2}, \mathbb{C}) \oplus \mathrm{Mat}(2^{(n-1)/2}, \mathbb{C}), && \text{если } n \text{ – нечетно.} \end{aligned}$$

Рассмотрим комплексную алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(p,q)$ четной размерности $n = p+q$. Тогда *левые* и *правые спиноры Вейля* (или, иногда, *киральные спиноры*) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} E^L_{\mathrm{Weyl}} &= \{\psi \in E_{\mathrm{Dirac}} \mid P_L \psi = \psi\}, \\ E^R_{\mathrm{Weyl}} &= \{\psi \in E_{\mathrm{Dirac}} \mid P_R \psi = \psi\}. \end{aligned}$$

Таким образом, спиноры Вейля являются собственными спинорами операторов P_L и P_R. Заметим, что условия на спиноры можно переписать в другом эквивалентном виде:

$$P_L \psi = \psi \iff \omega\psi = -\psi, \qquad P_R \psi = \psi \iff \omega\psi = \psi.$$

Отметим, что

$$E_{\mathrm{Dirac}} = E^{R}_{\mathrm{Weyl}} \oplus E^{L}_{\mathrm{Weyl}},$$

т.е. для любого $\psi \in E_{\mathrm{Dirac}}$ имеем

$$\psi = \psi_L + \psi_R, \qquad \psi_L = P_L \psi, \qquad \psi_R = P_R \psi.$$

Лекция 11

11.1. Согласованность матричных операций и операций в АК

Будем рассматривать матричные представления комплексных алгебр Клиффорда (см. параграф 3.2)

$$
\gamma\colon \mathcal{C}\!\ell(p,q) \to \begin{cases} \mathrm{Mat}(2^{n/2},\mathbb{C}), & \text{если } n \text{ четное},\\ \mathrm{Mat}(2^{(n-1)/2},\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Mat}(2^{(n-1)/2},\mathbb{C}), & \text{если } n \text{ нечетное}. \end{cases}
$$

Рассмотрим конкретное матричное представление γ. В случае нечетного n оно будет блочно-диагональным.

Все остальные матричные представления в случае четного n можно получить из исходного (по теореме Паули) в виде

$$\beta^a = T^{-1}\gamma^a T, \tag{11.1}$$

где матрица T определена с точностью до константы.

В случае нечетного n все матричные представления можно получить из исходного в виде

$$\beta^a = \pm T^{-1}\gamma^a T, \tag{11.2}$$

где T определена с точностью до умножения на обратимый элемент центра $Z = \lambda\mathbf{1} + \mu J$, где $J = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1)$ – диагональная матрица, у которой на диагонали стоит одинаковое число 1 и -1.

Можно выбрать такие матричные представления (см. рекуррентное задание матричных представлений, либо с помощью идемпотента и связанного с ним левого идеала), что $\gamma(e^a) = \gamma^a$ – унитарные:

$$(\gamma^a)^\dagger = (\gamma^a)^{-1} = \eta^{aa}\gamma^a. \tag{11.3}$$

В дальнейшем будем рассматривать только матричные представления, для которых выполнено (11.3) (см. упражнение 1).

Заметим, что (11.3) эквивалентно $(\gamma(e^a))^\dagger = \gamma((e^a)^\dagger)$, а значит, эквивалентно

$$\gamma^\dagger(U) = \gamma(U^\dagger) \qquad \forall U \in \mathcal{C}\!\ell(p,q),$$

т.е. согласованности операции эрмитова сопряжения от матрицы и операции эрмитова сопряжения от элемента алгебры Клиффорда.

Также заметим, что из (11.3) следует, что первые p матриц γ^a являются эрмитовыми, а последние q – антиэрмитовыми.

Будем рассматривать различные операции сопряжения (см. параграф 1.4) от элементов алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(p,q)$

$$U^\sim, \quad U^\curlywedge, \quad \overline{U}, \quad U^\ddagger, \quad ,U^\dagger, \quad U^T, \quad \overleftarrow{U}.$$

Здесь мы вводим две новые операции от элементов алгебры Клиффорда: *операцию транспонирования элемента алгебры Клиффорда* и *операцию взятия комплексного матричного сопряжения от элемента алгебры Клиффорда*

$$U^T = \gamma^{-1}((\gamma(U))^T), \qquad \overleftarrow{U} = \gamma^{-1}(\overleftarrow{\gamma(U)}),$$

которые зависят от выбора матричного представления γ.

Рассмотрим набор из генераторов e^a алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(p,q)$. Отметим, что

$$(e^a)^\sim = e^a, \quad (e^a)^\curlywedge = -e^a, \quad \overline{e^a} = e^a, \quad (e^a)^\ddagger = e^a.$$

Будем рассматривать наборы элементов, полученные из исходного e^a действием одной из операций сопряжения :

$$\beta^a = \pm(e^a)^\dagger, \quad \pm(e^a)^T, \quad \pm\overleftarrow{e^a}. \qquad (11.4)$$

Заметим, что все рассмотренные наборы удовлетворяют определяющим соотношениям алгебры Клиффорда

$$\beta^a\beta^b + \beta^b\beta^a = 2\eta^{ab}e.$$

Рассмотренные наборы β^a являются нечетными элементами $\beta^a \in \mathcal{C}\!\ell_{\mathrm{Odd}}(p,q)$, а значит, будут также генерировать базисы алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(p,q)$ (см. параграф 5.1).

Сформулируем обобщенную теорему Паули для случая комплексной алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(p,q)$ четной или нечетной размерности n для набора e^a и набора нечетных элементов β^a (см. параграфы 6.3 и 6.4).

В случае четного n для рассматриваемых наборов e^a и β^a всегда существует единственный, с точностью до умножения на комплексную константу, элемент T такой, что

$$\beta^a = T^{-1} e^a T, \qquad a = 1, \ldots, n.$$

При этом

$$\begin{aligned} &T \in \mathcal{C}\!\ell_{\mathrm{Even}}(p,q), \qquad &\text{если} \quad \beta^{1\ldots n} = e^{1\ldots n},\\ &T \in \mathcal{C}\!\ell_{\mathrm{Odd}}(p,q) \qquad &\text{если} \quad \beta^{1\ldots n} = -e^{1\ldots n}. \end{aligned}$$

В случае нечетного n для рассматриваемых двух наборов e^a и β^a в случае $\beta^{1\ldots n} = e^{1\ldots n}$ существует единственный, с точностью до умножения на обратимый элемент центра, элемент T такой, что

$$\begin{aligned} &\beta^a = T^{-1} e^a T, \qquad &a = 1, \ldots, n \qquad &(\text{в случае } \beta^{1\ldots n} = e^{1\ldots n}),\\ &\beta^a = -T^{-1} e^a T, \qquad &a = 1, \ldots, n \qquad &(\text{в случае } \beta^{1\ldots n} = -e^{1\ldots n}). \end{aligned}$$

В обоих случаях имеем

$$T \in \mathcal{C}\!\ell_{\mathrm{Even}}(p,q)$$

(либо после умножения на $e^{1\ldots n}$ получаем другой $T \in \mathcal{C}\!\ell_{\mathrm{Odd}}(p,q)$).

Заметим, что можно всегда выбрать (см., к примеру, рекуррентные матричные представления) такие матричные представления γ, для которых помимо условий (11.3) выполнены условия

$$(\gamma^a)^T = \pm\gamma^a, \qquad \overleftarrow{\gamma^a} = \pm\gamma^a, \tag{11.5}$$

т.е. матрицы γ^a являются либо вещественными, либо чисто мнимыми, и при этом симметричными или антисимметричными. Тогда получаем для всех (11.4) $\beta^a = \pm e^a$. Тогда по обобщенной теореме Паули элементы T, о которых говорилось выше, найдутся среди элементов вида $\sum_A \beta^A e^B e_A$, т.е. среди элементов базиса e^B. Кроме того, в данном случае можно указать явные формулы для операций U^T и $\overleftarrow{U}$ (см. упражнение 2).

Далее более подробно рассмотрим действие различных операций сопряжения на генераторах алгебры Клиффорда.

Упражнения

1. Пусть мы имеем матричное представление комплексной алгебры Клиффорда γ такое, что выполняется (11.3). Рассмотрим другое матричное представление β (11.1). Доказать, что для того, чтобы указанное свойство также выполнялось для другого набора матриц β^a (11.1), (11.2), необходимо и достаточно, чтобы

   - в случае четного n: $T^\dagger = \lambda T^{-1}$, где λ – произвольное комплексное число, отличное от нуля,

   - в случае нечетного n: $T^\dagger = Z T^{-1}$, где Z – обратимый элемент центра.

2* Докажите следующее утверждение.

Пусть мы выбрали такое матричное представление γ алгебры Клиффорда, что матрицы γ^a являются либо вещественными, либо чисто мнимыми, и при этом симметричными или антисимметричными. При этом пусть k_γ – количество симметричных матриц среди γ^a, l_γ – количество антисимметричных матриц среди γ^a. Аналогично, r_γ – количество вещественных матриц среди γ^a, s_γ – количество чисто мнимых матриц среди γ^a. Введенные величины зависят от матричного представления γ. Однако далее индекс γ иногда будет опускаться.

Имеем фиксированный набор генераторов алгебры Клиффорда $\{e^1, e^2, \dots, e^n\}$. Пусть часть из них представляются симметричными матрицами (переобозначим индексы таких генераторов в порядке возрастания через $b_1, \dots, b_k$), а другая часть – антисимметричными матрицами (переобозначим их индексы в порядке возрастания через $c_1, \dots, c_l$). Заметим, что $k + l = n$ – размерность алгебры Клиффорда.

Тогда имеем следующие формулы:

$$
\begin{aligned}
U^T &= e_{b_1\dots b_k} U^{\sim} e^{b_1\dots b_k}, && k \text{ – нечетно},\\
U^T &= e_{b_1\dots b_k} U^{\sim\curlywedge} e^{b_1\dots b_k}, && k \text{ – четно},\\
U^T &= e_{c_1\dots c_l} U^{\sim} e^{c_1\dots c_l}, && l \text{ – четно},\\
U^T &= e_{c_1\dots c_l} U^{\sim\curlywedge} e^{c_1\dots c_l}, && l \text{ – нечетно},
\end{aligned}
\tag{11.6}
$$

$$
\begin{aligned}
\overleftarrow{U} &= e_{d_1\dots d_r}\overline{U}e^{d_1\dots d_r}, && r \text{ – нечетно},\\
\overleftarrow{U} &= e_{d_1\dots d_r}\overline{U^{\curlywedge}}e^{d_1\dots d_r}, && r \text{ – четно},\\
\overleftarrow{U} &= e_{f_1\dots f_s}\overline{U}e^{f_1\dots f_s}, && s \text{ – четно},\\
\overleftarrow{U} &= e_{f_1\dots f_s}\overline{U^{\curlywedge}}e^{f_1\dots f_s}, && s \text{ – нечетно}.
\end{aligned}
\tag{11.7}
$$

Заметим, что формулы похожи на формулы для эрмитова сопряжения (см. теорему 2.3), однако теперь явно зависят от матричного представления.

11.2. Дираковское сопряжение

Рассмотрим комплексную алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(p,q)$. Следуя рассуждениям предыдущего параграфа, заключаем следующее. По обобщенной теореме Паули, найдутся элементы $A_\pm$ такие (причем они найдутся среди элементов базиса e^B), что

$$
(e^a)^\dagger = \pm A_\pm^{-1}e^a A_\pm. \tag{11.8}
$$

Причем, в случае четного n всегда существуют оба элемента $A_\pm$, а в случае нечетного n – только один из элементов A_+ и A_- (причем A_+ существует если $(e^1)^\dagger\dots(e^n)^\dagger = e^{1\dots n}$, т.е. когда q – четно, а A_- существует, если $(e^1)^\dagger\dots(e^n)^\dagger = e^{1\dots n}$, т.е. когда q – нечетно).

Эти формулы можно переписать в виде

$$
U^\dagger = A_+^{-1}U^\ddagger A_+, \qquad U^\dagger = A_-^{-1}U^{\ddagger\curlywedge}A_-.
$$

Оказывается, что мы знаем явное выражение для элементов A_+ и A_- (см. (2.8) и (2.9))

$$
A_+ = \begin{cases}
\lambda_1 e^{1\dots p}, & p,\ q \text{ – нечетны},\\
\lambda_2 e^{p+1\dots n}, & p, q \text{ – четны},\\
Z_1 e^{1\dots p} = Z_2 e^{p+1\dots n}, & p \text{ – нечетно},\ q \text{ – четно},
\end{cases}
$$

$$
A_- = \begin{cases}
\lambda_1 e^{p+1\dots n}, & p,\ q \text{ – нечетны},\\
\lambda_2 e^{1\dots p}, & p,\ q \text{ – четны},\\
Z_1 e^{1\dots p} = Z_2 e^{p+1\dots n}, & p \text{ – четно},\ q \text{ – нечетно},
\end{cases}
$$

где λ_i – произвольные комплексные константы, а Z_i – обратимые элементы центра алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(p,q)$.

Теперь заметим, что мы можем подбирать λ_i и Z_i в каждом случае таким образом, чтобы для элементов A_+ и A_- выполнялись соотношения

$$A_+ = A_+^\dagger = A_+^{-1} = A_+^\ddagger, \qquad A_- = A_-^\dagger = A_-^{-1} = A_-^{\ddagger\curlywedge}.$$

А именно, будем выбирать в качестве коэффициентов 1 или i, в зависимости от p и q:

$$\begin{cases} e^{1\ldots p}, & p \equiv 0,1 \bmod 4,\\ ie^{1\ldots p}, & p \equiv 2,3 \bmod 4, \end{cases} \qquad \begin{cases} e^{p+1\ldots n}, & q \equiv 0,3 \bmod 4,\\ ie^{p+1\ldots n}, & q \equiv 1,2 \bmod 4. \end{cases}$$

Для произвольного генератора получаем

$$(e^a)^\dagger = (e^a)^{-1} = (-1)^{p+1} e_{1\ldots p} e^a e^{1\ldots p} = (-1)^q e_{p+1\ldots n} e^a e^{p+1\ldots n}. \tag{11.9}$$

В случаях сигнатур, отличных от p – четное, q – нечетное, можно ввести *дираковское сопряжение* от спинора как

$$\psi^{D_+} = \psi^\dagger (A_+)^{-1} = (A_+)^{-1} \psi^\ddagger.$$

В случаях сигнатур, отличных от p – нечетное, q – четное, можно ввести *дираковское сопряжение* от спинора как

$$\psi^{D_-} = \psi^\dagger (A_-)^{-1} = (A_-)^{-1} \psi^{\ddagger\curlywedge}.$$

К примеру, рассмотрим случай алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(1,3)$ с генераторами e^0, e^1, e^2, e^3. Тогда сопряженным спинором Дирака называют

$$\psi^D = \psi^{D_+} = \psi^\dagger e^0.$$

Упражнения

1*. Рассмотрим следующие величины, называемые *билинейными ковариантами* (*билинейные формы Дирака*)

$$j_\pm^A = \psi^{D_\pm} e^A \psi,$$

где A – произвольный мультииндекс длины от 0 до n. Показать, что билинейные коварианты принадлежат пересечению левого и правого идеала алгебры Клиффорда. В случае минимального левого идеала получаем, что элементы $j_\pm^A$ имеют вид λt, где λ – некоторая константа.

2*. Рассмотрим замены координат

$$x^\mu \to x'^\mu = p^\mu_\nu x^\nu,$$

где $P = \|p^\mu_\nu\| \in \mathrm{O}(p,q)$ – ортогональная матрица. Спинор ψ меняется по правилу $\psi \to S\psi$. Найти по какому правилу меняется сопряженный спинор $\psi^{D\pm}$.

3*. Используя результаты предыдущего упражнения, определить, по какому правилу меняются билинейные ковարианты при ортогональных заменах координат.

4*. Получить два *сопряженных уравнения Дирака*

$$\pm\, i(\partial_\mu \psi^{D\pm} + i a_\mu \psi^{D\pm}) e^\mu + m\psi^{D\pm} = 0. \tag{11.10}$$

Отметим, что в случае четного n можно рассматривать оба сопряженных уравнения Дирака, но они эквивалентны, так как получаются друг из друга умножением на элемент объема $e^{1\ldots n}$. В случае нечетного n определено только одно из сопряжений Дирака, поэтому можно рассматривать только одно из сопряженных уравнений Дирака. Первое в случае p – нечетно, q – четно, второе – в случае p – четно, q – нечетно.

5*. Используя уравнение Дирака и сопряженное уравнение Дирака, получить *уравнение непрерывности*

$$\partial_\mu(\psi^D_+ e^\mu \psi) = \partial_\mu j^\mu_+ = 0. \tag{11.11}$$

6*. Показать, что для любого $\psi \neq 0$ выполняется

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(j_+^{1\ldots p}) > 0, &\quad \text{если } p,\, q \text{ – нечетные; } p \text{ – нечетно, } q \text{ – четно,}\\
\mathrm{Tr}(j_+^{p+1\ldots n}) > 0, &\quad \text{если } p,\, q \text{ – четные; } p \text{ – нечетно, } q \text{ – четно,}\\
\mathrm{Tr}(j_-^{1\ldots p}) > 0, &\quad \text{если } p,\, q \text{ – четные; } p \text{ – четно, } q \text{ – нечетно,}\\
\mathrm{Tr}(j_-^{p+1\ldots n}) > 0, &\quad \text{если } p,\, q \text{ – нечетные; } p \text{ – четно, } q \text{ – нечетно.}
\end{aligned}$$

11.3. Майорановское сопряжение

Рассмотрим комплексную алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(p,q)$. На ней можно задать операцию транспонирования элемента алгебры Клиффорда (см. параграф 11.1). Заметим, что данная операция зависит от выбора матричного представления.

По обобщенной теореме Паули, найдутся элементы $C_\pm$ такие, что

$$(e^a)^T = \pm C_\pm^{-1} e^a C_\pm. \tag{11.12}$$

Причем в случае четного n всегда существуют оба элемента $C_\pm$, а в случае нечетного n – только один из элементов C_+ и C_-.

Также можем переписать формулы в следующем общем виде:

$$U^T = C_+^{-1} U^{\sim} C_+, \qquad U^T = C_-^{-1} U^{\sim\curlywedge} C_-.$$

Заметим, что в случае некоторых матричных представлений мы знаем явный вид элементов $C_\pm$ (см. упражнение 2 после параграфа 11.1).

Получим некоторые соотношения на элементы $C_\pm$ в случае четного n (см. частично в [33], [34]).

В случае четного n из (11.12) получаем

$$e^a = C_\pm^T C_\pm^{-1} e^a C_\pm (C_\pm^{-1})^T, \qquad C_\pm (C_\pm^{-1})^T = \lambda_\pm e,$$

так как полученное выражение коммутирует со всеми элементами. Так как $\mathrm{Det}(C_\pm) = 1$ (под определителем от элемента алгебры Клиффорда понимается определитель от соответствующего матричного представления), получаем

$$(C_\pm)^T = \lambda_\pm C_\pm, \qquad \lambda_\pm = 1, -1.$$

Кроме того

$$C_\pm^\dagger C_\pm = e.$$

Тогда получим

$$\overleftarrow{C}_\pm = (C_\pm^T)^\dagger = (\lambda_\pm C_\pm)^\dagger = \lambda_\pm C_\pm^{-1},$$

т.е.

$$\overleftarrow{C}_\pm C_\pm = \lambda_\pm e.$$

В случае нечетного n можно получить те же формулы, если воспользоваться тем, что $C_\pm$ всегда найдутся среди элементов базиса e^A (см. параграф 11.1).

Далее (продолжаем рассматривать случай четного n), для произвольного упорядоченного мультииндекса A длины k имеем

$$(e^A)^T = (\pm 1)^k (-1)^{k(k-1)/2} C_\pm^{-1} e^A C_\pm.$$

Для элементов $C_\pm e^A$ получим

$$(C_\pm e^A)^T = (\pm 1)^k (-1)^{k(k-1)/2} \lambda_\pm (C_\pm e^A).$$

Заметим, что так как набор e^A образует базис в алгебре Клиффорда, то и набор из симметричных и антисимметричных элементов $C_\pm e^A$ также образует базис. Элементы представляются комплексными квадратными матрицами размера $2^{n/2}$. Тогда среди них антисимметричных должно быть $2^{n/2}(2^{n/2}-1)/2$. С другой стороны их число равно

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1-(\pm 1)^k(-1)^{k(k-1)/2}\lambda_\pm}{2} C_n^k.$$

Приравнивая два выражения, получаем, что

$$\lambda_\pm \sum_{k=0}^{n} (\pm 1)^k(-1)^{k(k-1)/2} C_n^k = 2^{n/2}.$$

Отсюда (используя формулы для сумм биномиальных коэффициентов)

$$\lambda_\pm = \cos\frac{\pi n}{4} \pm \sin\frac{\pi n}{4} = \pm\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}(n \pm 1)\right).$$

Итак, получаем, что

$$\lambda_+ = \begin{cases} +1, & \text{если } n \equiv 0, 2 \bmod 8, \\ -1, & \text{если } n \equiv 4, 6 \bmod 8, \end{cases}$$

$$\lambda_- = \begin{cases} +1, & \text{если } n \equiv 0, 6 \bmod 8, \\ -1, & \text{если } n \equiv 2, 4 \bmod 8. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим случай нечетного n. Если воспользоваться формулами (11.6), можно получить явный вид элементов $C_\pm$ (см. упражнение 1), а значит, и значения $\lambda_\pm$ в зависимости от k и l (см. упражнение 2). Затем несложно показать, что элемент C_+ существует всегда кроме случая $n \equiv 3 \bmod 4$, а элемент C_- существует всегда кроме случая $n \equiv 1 \bmod 4$ (см. упражнение 3).

В случае нечетного n явные формулы для $C_\pm$ дают следующие значения констант

$$\lambda_+ = \begin{cases} +1, & \text{если } n \equiv 1 \bmod 8, \\ -1, & \text{если } n \equiv 5 \bmod 8, \end{cases}$$

$$\lambda_- = \begin{cases} +1, & \text{если } n \equiv 7 \bmod 8, \\ -1, & \text{если } n \equiv 3 \bmod 8. \end{cases}$$

Полученные значения $\lambda_\pm$ в случае четных и нечетных n определяют, являются элементы (и задающие их матрицы) $C_\pm$ симметричными или антисимметричными.

Приведем определение майорановского сопряжения. Оно дается с помощью элементов $C_\pm$.

Майорановским сопряжением от спинора называется одно из следующих сопряжений (каждый раз когда существуют соответствующие $C_\pm$)

$$\begin{aligned} \psi^{M_+} &= \psi^T (C_+)^{-1} = (C_+)^{-1}\psi^{\sim}, \qquad && n \neq 3 \bmod 4, \\ \psi^{M_-} &= \psi^T (C_-)^{-1} = (C_-)^{-1}\psi^{\sim\curlywedge}, \qquad && n \neq 1 \bmod 4. \end{aligned}$$

Рассмотрим, например, случай алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(1,3)$ и стандартное матричное представление с помощью гамма-матриц

$$\gamma^0, \quad \gamma^1, \quad \gamma^3, \quad \gamma^3.$$

Нетрудно проверить, что матрицы γ^0 и γ^2 – симметричны, а матрицы γ^1 и γ^3 – антисимметричны. Таким образом имеем $k = l = 2$. Пользуясь формулами из упражнения 1, получаем выражения

$$C_+ = e^{13}, \qquad C_- = e^{02}$$

и следующие формулы для майорановского сопряжения

$$\psi^{M_+} = -\psi^T e^{13}, \qquad \psi^{M_-} = \psi^T e^{02}.$$

Отметим, что нетрудно проверить также напрямую, что $\lambda_\pm = -1$, так как

$$C_\pm^T = -C_\pm.$$

Упражнения

1*. Выберем такое матричное представление алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(p,q)$, чтобы генераторам сопоставлялись либо симметричные, либо антисимметричные матрицы (см. параграф 11.1). Пусть $k + l = n$, где k – количество симметричных матриц, представляющих генераторы алгебры Клиффорда, а l – количество антисимметричных матриц. Используя формулы (11.6), получить явные формулы для элементов $C_\pm$:

$$C_+ = \begin{cases} \lambda_1 e^{b_1\ldots b_k}, & k,\ l \text{ – нечетны},\\ \lambda_2 e^{c_1\ldots c_l}, & k,\ l \text{ – четны},\\ Z_1 e^{b_l\ldots b_k} = Z_2 e^{c_1\ldots c_l}, & k \text{ – нечетно, } l \text{ – четно}, \end{cases}$$
$$C_- = \begin{cases} \lambda_1 e^{c_1\ldots c_l}, & k,\ l \text{ – нечетны};\\ \lambda_2 e^{b_1\ldots b_k}, & k,\ l \text{ – четны};\\ Z_1 e^{b_l\ldots b_k} = Z_2 e^{c_1\ldots c_l}, & k \text{ – четно, } l \text{ – нечетно}, \end{cases}$$

где λ_i – произвольные комплексные константы, а Z_i – обратимые элементы центра алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(p,q)$.

2*. Воспользовавшись результатами предыдущего упражнения, получить выражения для констант $\lambda_\pm$:

$$\lambda_+ = \begin{cases} (-1)^{k(k-1)/2}, & \text{если } k,\ l \text{ – нечетны},\\ (-1)^{l(l+1)/2}, & \text{если } k,\ l \text{ – четны},\\ (-1)^{k(k-1)/2} = (-1)^{l(l+1)/2}, & \text{если } k \text{ – нечетно, } l \text{ – четно}, \end{cases}$$
$$\lambda_- = \begin{cases} (-1)^{l(l+1)/2}, & \text{если } k,\ l \text{ – нечетны},\\ (-1)^{k(k-1)/2}, & \text{если } k,\ l \text{ – четны},\\ (-1)^{k(k-1)/2} = (-1)^{l(l+1)/2}, & \text{если } k \text{ – четно, } l \text{ – нечетно}. \end{cases}$$

3*. Удостовериться, что для рекуррентного матричного представления (см. параграф 3.2) в случае четного n имеем $k = n/2 - 1$, $l = n/2 + 1$, а в случае нечетного n имеем $k = (n+1)/2$, $l = (n-1)/2$.

Используя эти значения для k и l в случае нечетного n и формулы для $\lambda_\pm$ (см. предыдущее упражнение) показать, что элемент C_+ существует всегда кроме случая $n \equiv 3 \bmod 4$, а элемент C_- существует всегда кроме случая $n \equiv 1 \bmod 4$.

11.4. Зарядовое сопряжение, спиноры Майорана и Майорана–Вейля в формализме АК

Теперь рассмотрим операцию комплексного матричного сопряжения $\overleftarrow{U}$ от элементов алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell(p,q)$. Данная операция зависит от выбора матричного представления. Не будем путать ее с операцией комплексного сопряжения от элементов алгебры Клиффорда $\overline{e^a} = e^a$.

По обобщенной теореме Паули имеем

$$\overleftarrow{e^a} = \pm B_{\pm}^{-1} e^a B_{\pm}. \tag{11.13}$$

Причем в случае четного n всегда существуют оба элемента $B_{\pm}$, а в случае нечетного n – только один из B_+ и B_-.

Можем переписать эти формулы в виде

$$\overleftarrow{U} = B_+^{-1}\overline{U}B_+, \qquad \overleftarrow{U} = B_-^{-1}\overline{U}^{\curlywedge}B_-.$$

Заметим, что в случае некоторых матричных представлений мы знаем явный вид элементов $B_{\pm}$ (см. упражнение 2 после параграфа 11.1).

В случае четного n нетрудно получить

$$\overleftarrow{B}_{\pm}B_{\pm} = \epsilon_{\pm}e, \qquad \epsilon_{\pm} = 1, -1.$$

Действительно,

$$e^a = \pm\overleftarrow{B_{\pm}^{-1}}\overleftarrow{e^a}\overleftarrow{B}_{\pm} = \overleftarrow{B_{\pm}^{-1}}B_{\pm}^{-1}e^aB_{\pm}\overleftarrow{B}_{\pm}, \qquad B_{\pm}\overleftarrow{B}_{\pm} = \epsilon_{\pm}e.$$

Значит, $\epsilon_{\pm} \in \mathbb{R}$. Так как $\mathrm{Det}(B_{\pm}) = 1$, то $\epsilon_{\pm} = 1, -1$.

Кроме того,

$$(B_{\pm})^{\dagger}B_{\pm} = e.$$

Из полученных равенств получаем

$$B_{\pm}^T = (\overleftarrow{B}_{\pm})^{\dagger} = (\epsilon_{\pm}B_{\pm}^{-1})^{\dagger} = \epsilon_{\pm}B_{\pm}.$$

В случае нечетного n можно получить те же формулы, если воспользоваться тем, что $B_{\pm}$ всегда найдутся среди элементов базиса e^A (см. параграф 11.1).

Элементы $B_\pm$ очевидным образом могут быть выражены через элементы $A_\pm$ и $C_\pm$. К примеру, во всех случаях кроме p – четно, q – нечетно, $n \equiv 3 \bmod 4$ из

$$U^\dagger = A_+^{-1} U^\ddagger A_+, \qquad U^T = C_+^{-1} U^\sim C_+$$

получаем

$$\overleftarrow{U} = C_+^{-1}(A_+^{-1} U^\ddagger A_+)^\sim C_+ = C_+^{-1} A_+^\sim \overline{U} (A_+^{-1})^\sim C_+,$$

а значит,

$$B_+ = (A_+^{-1})^\sim C_+.$$

Аналогично можно действовать в других случаях и получить

$$B_+ = (A_-^{-1})^{\sim\curlywedge} C_-, \qquad B_- = (A_-^{-1})^\sim C_+, \qquad B_- = (A_+^{-1})^{\sim\curlywedge} C_-.$$

Теперь получим явный вид для коэффициентов $\epsilon_\pm$. Приведем выкладку в случае, когда существуют A_+ и C_+:

$$\begin{aligned}\epsilon_+ = B_+^T B_+^{-1} &= ((A_+^{-1})^\sim C_+)^T ((A_+^{-1})^\sim C_+)^{-1} = C_+^T (A_+^{-1})^{\sim T} C_+^{-1} A_+^T \\ &= \lambda_+ C_+ C_+^{-1} A_+^{-1} C_+ C_+^{-1} A_+^\sim = \lambda_+ A_+^{-1} A_+^\sim.\end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$\epsilon_+ = \lambda_- A_-^{-1} A_-^{\sim\curlywedge}, \qquad \epsilon_- = \lambda_+ A_-^{-1} A_-^\sim, \qquad \epsilon_- = \lambda_- A_+^{-1} A_+^{\sim\curlywedge}.$$

Зная значения $\lambda_\pm$ (зависящие от n) и значения $A_\pm$ (зависящие от четности p и q), получаем из этих четырех формул (которые покрывают все возможные случаи) значения констант $\epsilon_\pm$ в зависимости от p и q.

В случае четного n имеем

$$\epsilon_+ = \begin{cases} +1, & \text{если } p - q \equiv 0, 2 \bmod 8, \\ -1, & \text{если } p - q \equiv 4, 6 \bmod 8, \end{cases}$$

$$\epsilon_- = \begin{cases} +1, & \text{если } p - q \equiv 0, 6 \bmod 8, \\ -1, & \text{если } p - q \equiv 2, 4 \bmod 8. \end{cases}$$

В случае нечетного n имеем

$$\epsilon_+ = \begin{cases} +1, & \text{если } p - q \equiv 1 \bmod 8, \\ -1, & \text{если } p - q \equiv 5 \bmod 8, \end{cases}$$

$$\epsilon_- = \begin{cases} +1, & \text{если } p-q \equiv 7 \bmod 8, \\ -1, & \text{если } p-q \equiv 3 \bmod 8. \end{cases}$$

Зарядовым сопряжением спинора ψ называется одно из следующих сопряжений

$$\psi^{C_+} = B_+ \overleftarrow{\psi} = \overline{\psi} B_+, \qquad p-q \neq 3 \bmod 4,$$
$$\psi^{C_-} = B_- \overleftarrow{\psi} = \overline{\psi}^{\curlywedge} B_-, \qquad p-q \neq 1 \bmod 4.$$

Оператор зарядового сопряжения сопоставляет каждой частице, описываемой спинором ψ, античастицу, описываемую зарядово-сопряженным спинором.

Учитывая связь элементов $A_\pm$, $B_\pm$ и $C_\pm$, можем дать зарядовому сопряжению другое, эквивалентное определение. А именно, имеем

$$\begin{aligned} \psi^{C_+} &= B_+ \overleftarrow{\psi} = (A_+^{-1})^{\sim} C_+ \overleftarrow{\psi} = C_+ (A_+^{-1})^T C_+^{-1} C_+ \overleftarrow{\psi} \\ &= C_+ (\psi^\dagger A_+^{-1})^T = C_+ (\psi^{D_+})^T. \end{aligned}$$

Аналогично можно получить

$$\psi^{C_+} = C_- (\psi^{D_-})^T, \qquad \psi^{C_-} = C_+ (\psi^{D_-})^T, \qquad \psi^{C_-} = C_- (\psi^{D_+})^T.$$

Рассмотрим в качестве примера алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\ell(1,3)$ и стандартное матричное представление с помощью γ-матриц. Так как

$$\overleftarrow{\gamma}^0 = \gamma^0, \qquad \overleftarrow{\gamma}^1 = \gamma^1, \qquad \overleftarrow{\gamma}^2 = -\gamma^2, \qquad \overleftarrow{\gamma}^3 = \gamma^3,$$

то $r = 3$, $s = 1$, $p - q = 6 \bmod 8$, $\epsilon_+ = -1$, $\epsilon_- = 1$ и (см. упражнение 1)

$$B_+ = e^{013}, \qquad B_- = e^2.$$

Таким образом, для зарядового сопряжения получаем следующие формулы

$$\psi^{C_+} = \overline{\psi} e^{013}, \qquad \psi^{C_-} = \overline{\psi} e^2.$$

Спиноры Майорана определяются следующим образом

$$E_{\text{Majorana}} = \{\psi \in E_{\text{Dirac}} \mid \psi^C = \pm\psi\},$$

где $\psi^C = \psi^{C_+}$ или $\psi^C = \psi^{C_-}$.

В этом случае получаем

$$\psi = \pm B_+ \overleftarrow{\psi}, \qquad \pm B_+^{-1}\psi = \overleftarrow{\psi} = \pm \overleftarrow{B}_+ \psi = \pm\epsilon_+ B_+^{-1}\psi,$$
$$(1-\epsilon_+)\psi = 0,$$

т.е. $\epsilon_+ = 1$. Аналогичные рассуждения приведут к $\epsilon_- = 1$.

Таким образом, спиноры Майорана возможны только в случае $\epsilon_\pm = 1$, т.е. в случае сигнатур $p - q \equiv 0, 1, 2, 6, 7 \bmod 8$. Заметим, что в этих случаях либо $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$, либо $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(q,p)$ изоморфна алгебре вещественных матриц.

Итак, спиноры Майорана возможны в случаях

$$\psi^{C_+} = \pm\psi, \qquad p - q \equiv 0, 1, 2 \bmod 8,$$
$$\psi^{C_-} = \pm\psi, \qquad p - q \equiv 0, 6, 7 \bmod 8.$$

Таким образом, спиноры Майорана математически возможны в случае сигнатуры $(3,1)$, но не участвуют в формулировке стандартной модели.

Левые и правые спиноры Майорана–Вейля определяются следующим образом:

$$E^L_{W-M} = \{\psi \in E^L_{\mathrm{Weyl}} \mid \psi^C = \pm\psi\},$$
$$E^R_{W-M} = \{\psi \in E^R_{\mathrm{Weyl}} \mid \psi^C = \pm\psi\}$$

и возможны только в случае сигнатур $p - q \equiv 0 \bmod 8$.

Спиноры Майорана–Вейля в случае $n = 4$ математически возможны только в случае сигнатуры $(2,2)$, которая не является Евклидовой или Лоренцевой.

Упражнения

1* Выберем такое матричное представление алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell(p,q)$, чтобы генераторам сопоставлялись либо вещественные, либо чисто мнимые матрицы (см. параграф 11.1). Пусть $n = r + s$, где r – количество вещественных матриц, а s – чисто мнимых матриц. Используя формулы (11.7), получить явные формулы для элементов $B_\pm$:

$$B_+ = \begin{cases} \lambda_1 e^{d_1\dots d_r}, & r,\ s \text{ – нечетны},\\ \lambda_2 e^{f_1\dots f_s}, & r,\ s \text{ – четны},\\ Z_1 e^{d_l\dots d_r} = Z_2 e^{f_1\dots f_s}, & r \text{ – нечетно},\ s \text{ – четно}, \end{cases}$$

$$B_- = \begin{cases} \lambda_1 e^{f_1 \dots f_s}, & r,\ s \text{ – нечетны;} \\ \lambda_2 e^{d_1 \dots d_r}, & r,\ s \text{ – четны;} \\ Z_1 e^{d_l \dots d_r} = Z_2 e^{f_1 \dots f_s}, & r \text{ – четно, } s \text{ – нечетно,} \end{cases}$$

где λ_i – произвольные комплексные константы, а Z_i – обратимые элементы центра алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(p,q)$.

Приложение

12.1. Алгебраический минимум: группы, кольца, тела, поля, векторные пространства, алгебры

Группой называется непустое множество G, в котором задана групповая операция $G \times G \to G$ (обычно называемая умножением), сопоставляющая каждой паре элементов $x, y \in G$ единственный элемент $xy = z \in G$. При этом должны выполняться аксиомы:

1) $(xy)z = x(yz)$ для всех $x, y, z \in G$ (ассоциативность);
2) существует *единица* $e \in G$ такая, что $ex = xe = x$ для всех $x \in G$;
3) для каждого $x \in G$ существует *обратный элемент* $x^{-1} \in G$ такой, что $xx^{-1} = x^{-1}x = e$.

Группа G называется *абелевой группой* , если групповая операция удовлетворяет условию коммутативности

$$xy = yx \qquad \text{для всех} \quad x, y \in G.$$

В этом случае групповая операция $G \times G \to G$ обычно называется сложением и обозначается через $+$. Аксиомы перепишутся тогда в следующем виде:

1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ для всех $x, y, z \in G$ (ассоциативность);
2) существует *нулевой элемент* $0 \in G$ такой, что $0 + x = x$ для всех $x \in G$;
3) для каждого $x \in G$ существует *противоположный элемент* $-x \in G$ такой, что $x + (-x) = 0$;
4) $x + y = y + x$ для всех $x, y \in G$ (коммутативность).

Кольцом называется абелева группа R, в которой кроме операции сложения (групповой операции) задана операция умножения $R \times R \to R$, сопоставляющая каждой паре элементов $x, y \in R$ единственный элемент $xy = z \in R$ и такая, что выполняется свойство дистрибутивности:

$$(x + y)z = xz + yz, \quad x(y + z) = xy + xz \qquad \text{для всех} \quad x, y, z \in R.$$

Кольцо может обладать дополнительными свойствами. А именно, свойствами унитальности, ассоциативности и коммутативности:

Кольцо R называется *унитальным*, если в нем существует единичный элемент $e \in R$ такой, что

$$ex = xe = x \qquad \text{для всех} \quad x \in R.$$

Кольцо R называется *ассоциативным*, если выполнено свойство ассоциативности

$$(xy)z = x(yz) \qquad \text{для всех} \quad x, y, z \in R.$$

Кольцо R называется *коммутативным*, если выполнено свойство коммутативности

$$xy = yx \qquad \text{для всех} \quad x, y \in R.$$

Телом (или *кольцом с делением*) называется унитальное кольцо R, в котором $e \neq 0$ и всякий ненулевой элемент имеет обратный, т.е.

$$x^{-1}x = xx^{-1} = e \qquad \text{для всех} \quad x \in R.$$

Рассматривается, например, тело кватернионов $\mathbb{H}$.

Полем называется ассоциативное коммутативное кольцо с делением.

Например, имеем поле вещественных чисел $\mathbb{R}$, поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$, поле p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$.

Векторным (*или линейным*) *пространством* V *над полем* $\mathbb{F}$ называется абелева группа по сложению, в которой задана операция умножения на числа из поля $\mathbb{F}$ так, что выполняются следующие свойства:

1) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ и $x \in V$;
2) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ и $x \in V$;
3) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ для всех $\alpha \in \mathbb{F}$ и $x, y \in V$;
4) $1x = x$ для всех $x \in V$, где 1 - единица из $\mathbb{F}$.

Элементы векторного пространства будем называть *векторами*, а элементы $\mathbb{F}$ – *скалярами*.

Будем рассматривать вещественные и комплексные векторные пространства (над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ соответственно).

Алгеброй A над полем $\mathbb{F}$ называется векторное пространство V, на котором задана операция умножения $A \times A \to A$, сопоставляющая каждой паре элементов $x, y \in A$ единственный элемент $xy = z \in A$, согласованная с линейной структурой и такая, что выполняется свойство дистрибутивности:

$$(\alpha x + \beta y)z = \alpha(xz) + \beta(yz), \quad x(\alpha y + \beta z) = \alpha(xy) + \beta(xz)$$
$$\text{для всех} \quad x, y, z \in R, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{F}.$$

Алгебра может обладать дополнительными свойствами.

Алгебра A называется *унитальной* (или *алгеброй с единицей*), если в ней существует единичный элемент $e \in A$ такой, что

$$ex = xe = x \qquad \text{для всех} \quad x \in A.$$

Алгебра A называется *ассоциативной*, если выполнено свойство ассоциативности

$$(xy)z = x(yz) \qquad \text{для всех} \quad x, y, z \in A.$$

Алгебра A называется *коммутативной*, если выполнено свойство коммутативности

$$xy = yx \qquad \text{для всех} \quad x, y \in A.$$

Алгебра A называется *алгеброй Ли*, если выполнены следующие свойства:

1) $xy + yx = 0$ для всех $x, y \in A$ (антикоммутативность);
2) $x(yz) + y(zx) + z(xy) = 0$ для всех $x, y, z \in A$ (тождество Якоби).

В алгебрах Ли для обозначения операции умножения принято использовать скобку Ли $[x, y]$.

12.2. Классические матричные группы

В настоящем параграфе дадим определения основным классическим матричным группам.

Множество невырожденных квадратных матриц образует следующую группу:

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}) = \{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{F}) \mid \det A \neq 0\},$$

которую будем называть *полной линейной группой*.

Подгруппа полной линейной группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$, состоящая из квадратных матриц с единичным определителем

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{F}) = \{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{F}) \mid \det A = 1\}$$

называется *специальной линейной группой.*

Ортогональной группой называется следующая группа матриц

$$\mathrm{O}(n, \mathbb{F}) = \{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{F}) \mid A^T A = \mathbf{1}\}.$$

В случае поля вещественных чисел $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ будем обозначать ортогональную группу через $\mathrm{O}(n) = \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$.

Также под множеством $\mathrm{O}(n)$ можно понимать группу линейных преобразований n-мерного еклидова пространства $V = \mathbb{R}^n$, сохраняющих фиксированное на V скалярное произведение.

Подгруппа ортогональной группы $\mathrm{O}(n, \mathbb{F})$, состоящая из матриц с единичным определителем

$$\mathrm{SO}(n, \mathbb{F}) = \{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{F}) \mid A^T A = \mathbf{1},\, \det A = 1\}$$

называется *специальной ортогональной группой.*

В случае поля вещественных чисел $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ будем обозначать специальную ортогональную группу через $\mathrm{SO}(n) = \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$.

Будем рассматривать *псевдоортогональную группу*, состоящую из вещественных матриц следующего вида

$$\mathrm{O}(p, q) = \{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid A^T \eta A = \eta\}.$$

Здесь p и q – неотрицательные целые числа такие, что $p + q = n$, $n \geqslant 1$, а η – диагональная матрица размера $n \times n$

$$\eta = \|\eta^{ab}\| = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1),$$

у которой на диагонали стоят p штук $+1$ и q штук -1.

Также под множеством $\mathrm{O}(p, q)$ можно понимать группу всех линейных преобразований псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{p,q}$, сохраняющих фиксированную на $\mathbb{R}^{p,q}$ псевдоевклидову метрику.

Подгруппа группы $\mathrm{O}(p, q)$

$$\mathrm{SO}(p, q) = \{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid A^T \eta A = \eta,\, \det A = 1\}$$

называется *специальной псевдоортогональной группой.*

Более подробно о псевдоортогональной группе $\mathrm{O}(p,q)$ и ее подгруппах см. в параграфе 7.1.

Унитарной группой называется следующая группа матриц над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$

$$\mathrm{U}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C}) \mid A^\dagger A = \mathbf{1}\}.$$

Также под множеством $\mathrm{U}(n)$ можно понимать группу линейных преобразований n-мерного унитарного пространства, сохраняющих фиксированное эрмитово скалярное произведение.

Подгруппа унитарной группы, состоящая из матриц с единичным определителем,

$$\mathrm{SU}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C}) \mid A^\dagger A = \mathbf{1},\, \det A = 1\}$$

называется *специальной унитарной группой.*

Псевдоунитарной группой называется следующая группа матриц

$$\mathrm{U}(p,q) = \{A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C}) \mid A^\dagger \eta A = \eta\}.$$

Также под множеством $\mathrm{U}(p,q)$ можно понимать группу линейных преобразований n-мерного псевдоунитарного пространства сигнатуры (p,q), сохраняющих фиксированную псевдоэрмитову (индефинитную) метрику.

Подгруппа псевдоунитарной группы, состоящая из матриц с единичным определителем,

$$\mathrm{SU}(p,q) = \{A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C}) \mid A^\dagger \eta A = \eta,\, \det A = 1\}$$

называется *специальной псевдоунитарной группой.*

Симплектической группой называется следующая группа

$$\mathrm{Sp}\left(\frac{n}{2},\mathbb{F}\right) = \{A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{F}) \mid A^T \Omega A = \Omega\},$$

где n-четно и Ω – блочная матрица размера $n\times n$ вида

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_{n/2} \\ -\mathbf{1}_{n/2} & 0 \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{1}_{n/2}$ – единичная матрица размера $n/2$.

В качестве поля $\mathbb{F}$ рассматриваются поле вещественных $\mathbb{R}$ или поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Также под множеством $\mathrm{Sp}(n/2,\mathbb{R})$ можно понимать группу линейных преобразований n-мерного симплектического пространства, сохраняющих симплектическую форму.

Симплектической унитарной группой называется следующая группа комплексных матриц

$$\mathrm{SpU}\left(\frac{n}{2}\right)=\mathrm{Sp}\left(\frac{n}{2}\right)=\{A\in\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})\mid A^T\Omega A=\Omega,\ A^\dagger A=\mathbf{1}\},$$

где n – четно и Ω определена выше.

Симплектической псевдоунитарной группой называется следующая группа комплексных матриц

$$\mathrm{SpU}(r,s)=\mathrm{Sp}(r,s)=\{A\in\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})\mid A^T\Omega A=\Omega,\ A^\dagger GA=G\},$$

где n – четно, r и s – неотрицательные целые числа такие, что $r+s=n/2$, $n\geqslant 1$, Ω – блочная матрица, определенная выше, а G – диагональная матрица размера n следующего вида

$$G=\begin{pmatrix}-\mathbf{1}_r & 0 & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{1}_s & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\mathbf{1}_r & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1}_s\end{pmatrix}.$$

Матричные группы, рассмотренные выше, можно рассматривать как группы Ли. Им соответствуют алгебры Ли, обозначения для которых мы введем далее.

Полной линейной группе $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$ соответствует алгебра Ли всех квадратных матриц размера $n\times n$, рассмотренная с операцией коммутатора

$$\mathrm{gl}(n,\mathbb{F}).$$

Специальной линейной группе Ли $\mathrm{SL}(n,\mathbb{F})$ соответствует следующая алгебра Ли

$$\mathrm{sl}(n,\mathbb{F})=\{A\in\mathrm{Mat}(n,\mathbb{F})\mid \mathrm{tr}A=0\}.$$

Группам Ли $\mathrm{O}(n,\mathbb{F})$ и $\mathrm{SO}(n,\mathbb{F})$ соответствует алгебра Ли

$$\mathrm{so}(n,\mathbb{F})=\{A\in\mathrm{Mat}(n,\mathbb{F})\mid A^T=-A\}.$$

Группам Ли $\mathrm{O}(p,q)$ и $\mathrm{SO}(p,q)$ соответствует алгебра Ли

$$\mathrm{so}(p,q)=\{A\in\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})\mid A^T\eta=-\eta A\}.$$

Унитарным группам Ли $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{U}(p,q)$, $\mathrm{SU}(p,q)$ соответствуют следующие алгебры Ли:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{u}(n) &= \{A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C}) \mid A^\dagger = -A\},\\
\mathrm{su}(n) &= \{A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C}) \mid A^\dagger = -A,\ \mathrm{tr}A = 0\},\\
\mathrm{u}(p,q) &= \{A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C}) \mid A^\dagger\eta = -\eta A\},\\
\mathrm{su}(p,q) &= \{A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C}) \mid A^\dagger\eta = -\eta A,\ \mathrm{tr}A = 0\}.
\end{aligned}
$$

Симплектическим группам Ли $\mathrm{Sp}(n/2,\mathbb{F})$, $\mathrm{SpU}(n/2)$, $\mathrm{SpU}(r,s)$ соответствуют следующие алгебры Ли:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{sp}\left(\frac{n}{2},\mathbb{F}\right) &= \{A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{F}) \mid A^T\Omega = -\Omega A\},\\
\mathrm{sp}\left(\frac{n}{2}\right) &= \{A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C}) \mid A^T\Omega = -\Omega A,\ A^\dagger = -A\},\\
\mathrm{sp}(r,s) &= \{A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})\\
&\qquad\qquad \mid A^T\Omega = -\Omega A,\ A^\dagger G = -GA\}, \quad r+s=\frac{n}{2},
\end{aligned}
$$

где n – четно.

Более подробно о рассмотренных группах Ли и алгебрах Ли см., например, в [43].

12.3. Некоторые сведения по геометрии и топологии

Топологическое пространство X *связно*, если оно не может быть представлено в виде объединения двух непересекающихся открытых подмножеств.

Топологическое пространство X *линейно связно*, если для любых двух точек в X существует путь, соединяющий их.

Любое линейно связное топологическое пространство связно. Обратное неверно. Для многообразий понятия связности и линейной связности совпадают.

Топологическое пространство X *односвязно*, если оно линейно связно и его фундаментальная группа $\pi(X)$ тривиальна (состоит только из единицы).

Непрерывное сюръективное отображение топологических пространств $p\colon X \to Y$ называется *накрытием*, если для всех $y \in Y$

найдется открытая окрестность $U_y \subset Y$ такая, что

$$p^{-1}(U_y) = \bigsqcup V_j$$

является дизъюнктным объединением открытых подмножеств $V_j \subset X$, причем ограничение $p|_{V_j} \colon V_j \to U_y$ является гомеоморфизмом для всех j.

При этом Y называется *базой* накрытия, X называется *накрывающим пространством*, множества V_j называются *листами накрытия*. Если их число конечно и равно k, то говорят что накрытие k*-листно*.

Накрытие называют *универсальным*, если X односвязно. Накрытие называется *тривиальным*, если X накрывает само себя (если X является дизъюнктным объединением открытых подмножеств, каждое из которых гомеоморфно Y). В противном случае, накрытие называется *нетривиальным*.

Накрытие тривиально тогда и только тогда, когда X изоморфно произведению $Y \times T$, где T – любое множество с дискретной топологией. Также, если X связно, то накрытие нетривиально.

Теорема 12.1 (о поднятии пути). *Пусть $p \colon X \to Y$ – накрытие. Тогда для любой непрерывной кривой $\gamma \colon [0,1] \to Y$ и точки $x \in X$ такой, что $p(x) = \gamma(0)$, существует единственная кривая $\widetilde{\gamma} \colon [0,1] \to X$ такая, что $x = \widetilde{\gamma}(0)$, и*

$$p \circ \widetilde{\gamma}(t) = \gamma(t), \qquad \forall t \in [0,1].$$

Группа G действует *свободно и собственно разрывно* (evenly = freely + properly discontinuously, см. [44]) на топологическом пространстве X, если для любого $x \in X$ существует открытое подмножество $V \subset X$, содержащее x такое, что gV и hV не пересекаются для любых двух элементов $g, h \in G$.

Теорема 12.2 (см. [44]). *Если группа G действует свободно и собственно разрывно на пространстве X, то проекция $p \colon X \to X/G$ является накрытием.*

Указания к задачам

1.1.1 Воспользуйтесь формулой бинома Ньютона для выражения $(1+1)^n$.

1.3.5 Воспользуйтесь формулой бинома Ньютона для левой части и формулой Муавра для правой части выражения

$$(1+i)^n = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^n.$$

3.1.1 Предлагается рассмотреть генераторы $e^1, \ldots, e^n$ в $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$ и проверить, что элементы

$$(e^i)' = e^i e^n, \qquad i = 1, \ldots, n-1,$$

генерируют базис в $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Even}}(p,q)$.
Во втором случае показать, что

$$(e^i)' = \begin{cases} e^{p+i}e^p, & i = 1, \ldots, q, \\ e^{i-q}e^p, & i = q+1, \ldots, n-1, \end{cases}$$

генерируют базис в $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Even}}(p,q)$.

3.3.2 Для этого предлагается показать с помощью (3.18), что $(UV)\tau_k = \gamma(U)^m_l\gamma(V)^l_k\tau_m$.

4.1.2 Для этого представить произвольную такую функцию в виде суммы четырех функций: четной вещественнозначной, четной мнимой, нечетной вещественнозначной и нечетной мнимой.

4.1.8 Предлагается воспользоваться тем, что

$$U^2 = \frac{1}{2}\{U, U\}$$

и вообще

$$(U)^{m+2} = c_1\{U^m, \{U, U\}\}$$

для некоторой константы c_1 и четного m. Аналогично имеем

$$U^3 = \frac{1}{4}\{\{U, U\}, U\}$$

и для произвольного четного m имеем

$$(U)^{m+1} = c_2\{U^m, U\}.$$

Далее воспользоваться теоремой 4.1.

4.1.9 Очевидно, имеем

$$\overline{\mathbf{01}} = \{U \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q) \mid U^{\sim} = U\},$$
$$\overline{\mathbf{23}} = \{U \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q) \mid U^{\sim} = -U\}.$$

А значит, так как $(UU^{\sim})^{\sim} = UU^{\sim}$, то $UU^{\sim} \in \overline{\mathbf{01}}$.
Теперь пусть $U \in \overline{\mathbf{01}}$ или $U \in \overline{\mathbf{23}}$. Тогда, так как $U^{\sim} = \pm U$, то

$$[U, U^{\sim}] = \pm UU \mp UU = 0.$$

Остальные утверждения доказываются аналогично.

4.1.10 Используйте метод математической индукции.

4.2.1 Поможет рассмотрение следующих выражений

$$[e^{a_1\ldots a_k}, e^{b_1\ldots b_l}]^{\wedge} = (1-(-1)^{kl})e^{a_1\ldots a_k} \wedge e^{b_1\ldots b_l},$$
$$\{e^{a_1\ldots a_k}, e^{b_1\ldots b_l}\}^{\wedge} = (1+(-1)^{kl})e^{a_1\ldots a_k} \wedge e^{b_1\ldots b_l}.$$

6.4.1 Идея доказательства заключается в том, что если домножить какой-нибудь элемент из суммы $\beta^A F \gamma_A$ слева на $\beta^{1\ldots n} = \pm\gamma^{1\ldots n}$, а справа на обратный к нему элемент (они коммутируют со всеми элементами), то получим другой элемент из этой же суммы, причем другой четности.

7.1.3 Действительно, пусть $A, B \in \mathrm{O}_{\uparrow}(p,q)$ и $C = AB$. Тогда, учитывая $a^1_1 > 0$ и $b^1_1 > 0$, имеем

$$\begin{aligned}
&- a^1_2 b^2_1 - a^1_3 b^3_1 - \cdots - a^1_n b^n_1 + 1 \\
&\quad \leqslant \sqrt{(a^1_2)^2 + \cdots + (a^1_n)^2 + 1}\sqrt{(b^2_1)^2 + (b^n_1)^2 + 1} \\
&\quad = |a^1_1||b^1_1| = a^1_1 b^1_1,
\end{aligned}$$

а значит,

$$c^1_1 = (AB)^1_1 = \sum_{k=1}^{n} a^1_k b^k_1 \geqslant 1 > 0.$$

8.1.1 Используйте изоморфизм четных подалгебр алгебр Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Even}}(p,q)$ и $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}_{\mathrm{Even}}(q,p)$ (см.(3.15)).

8.1.2 Для этого достаточно рассмотреть примеры:

$$\mathrm{Pin}(1,0) = \{e, -e, e^1, -e^1\} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,$$
$$\mathrm{Pin}(0,1) = \{e, -e, e^1, -e^1\} \simeq \{1, -1, i, -i\} = \mathbb{Z}_4.$$

8.1.3 Например, проверим, что группа $H = \mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$ является нормальной подгруппой группы $G = \mathrm{Spin}(p,q)$, т.е. $ghg^{-1} \in H$ для любых $g \in G$ и $h \in H$. Действительно,

$$(ghg^{-1})^{\sim}(ghg^{-1}) = (g^{-1})^{\sim}h^{\sim}g^{\sim}ghg^{-1} = (\pm e)e(\pm e) = e$$

для любых $g \in G$ и $h \in H$.

8.1.4 Докажем, например, первое утверждение. Сначала докажем, что множество, записанное справа, принадлежит множеству, записанному слева.

Возьмем произвольный элемент S из $\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$. Тогда, используя равенства

$$T_1^{\sim}T_1 = e, \quad T_1^{\sim\curlywedge}T_1 = -e, \quad S^{\sim}S = e, \quad S^{\sim\curlywedge}S = e,$$

получаем, что

$$\begin{aligned}(T_1S)^{\sim}(T_1S) &= S^{\sim}T_1^{\sim}T_1S = e,\\ (T_1S)^{\sim\curlywedge}(T_1S) &= S^{\sim\curlywedge}T_1^{\sim\curlywedge}T_1S = -e,\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Докажем в обратную сторону. Возьмем произвольный элемент $S_1 \in \mathrm{Pin}'_{\downarrow}(p,q)$. Тогда из соотношений

$$S_1^{\sim}S_1 = e, \quad S_1^{\sim\curlywedge}S_1 = -e, \quad T_1^{\sim}T_1 = e, \quad T_1^{\sim\curlywedge}T_1 = -e$$

получаем для элемента $T = S_1(T_1)^{-1}$

$$\begin{aligned}(S_1T_1^{-1})^{\sim}(S_1T_1^{-1}) &= (T_1^{\sim})^{-1}S_1^{\sim}S_1T_1^{-1}T = e,\\ (S_1T_1^{-1})^{\sim\curlywedge}(S_1T_1^{-1}) &= (T_1^{\sim\curlywedge})^{-1}S_1^{\sim\curlywedge}S_1T_1^{-1}T = e,\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

8.1.5 Например, для нечетных p и q имеем

$$\begin{aligned}(e^{1\ldots p})^{\sim}(e^{1\ldots p}) &= e^p \cdots e^1e^1 \cdots e^p = e,\\ (e^{p+1\ldots n})^{\sim\curlywedge}(e^{p+1\ldots n}) &= (-1)^q e^n \cdots e^{p+1}e^{p+1} \cdots e^n\\ &= (-1)^q(-1)^q e = e,\\ (e^{1\ldots n})^{\sim}(e^{1\ldots n}) &= e^n \cdots e^1e^1 \cdots e^n = (-1)^q e = -e.\end{aligned}$$

9.1.6 Пользуясь соответствующими утверждениями для групп $\Gamma^{\pm}$ и Γ^{+} получаем, что произвольный элемент спинорных групп есть произведение элементов ранга 1, либо произведение четного числа элементов ранга 1 соответственно. Осталось наложить условия, связанные с нормами $T^{\sim}T$ и $T^{\sim\curlywedge}T$.

Проведем доказательство для группы $\mathrm{Pin}(p,q)$. Замечаем, что элемент $T^{\sim}$ есть произведение тех же элементов ранга 1, что и T, но записанное в обратном порядке. Рассмотрим получившееся выражение $T^{\sim}T$, представляющее из себя произведение $2k$ элементов ранга 1 (причем попарно равных). Квадрат любого из таких k элементов будет элементом ранга нуль

$$(u_{j1}e^1 + u_{j2}e^2 + \cdots + u_{jn}e^n)^2 = \sum_{l=1}^{n} \eta^{ll}(u_{jl})^2 e$$

в силу того, что $u_{jl}u_{jm}\{e^l, e^m\} = 0$ для всех различных $l, m = 1, \ldots, n$. Умножая элементы попарно и вынося за скобку получающиеся скаляры, получим

$$T^{\sim}T = \prod_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{n} \eta^{ll}(u_{jl})^2 e,$$

что доказывает утверждение теоремы для этого случая. Для остальных случаев теорема доказывается аналогично.

10.4.1 Пусть выполнено

$$(\gamma^a)^\dagger = \eta^{aa}\gamma^a, \qquad (\beta^a)^\dagger = \eta^{aa}\beta^a.$$

Тогда с одной стороны

$$(\beta^a)^\dagger = (T^{-1}\gamma^a T)^\dagger = T^\dagger(\gamma^a)^\dagger(T^{-1})^\dagger = \eta^{aa}T^\dagger\gamma^a(T^{-1})^\dagger,$$

а с другой стороны

$$(\beta^a)^\dagger = \eta^{aa}\beta^a = \eta^{aa}T^{-1}\gamma^a T.$$

Получаем, что

$$T^{-1}\gamma^a T = T^\dagger\gamma^a(T^{-1})^\dagger$$

или

$$[TT^\dagger, \gamma^a] = 0, \qquad a = 1, 2, \ldots, n,$$

а значит, $TT^\dagger$ лежит в центре алгебры Клиффорда и равняется $TT^\dagger = \lambda\mathbf{1}$ в случае четного n и $TT^\dagger = \lambda\mathbf{1} + \nu J$ в случае нечетного n. В случае нечетного n также надо рассмотреть случай $\beta^a = -T^{-1}\gamma^a T$, но он аналогичен.

В обратную сторону утверждение проверяется напрямую.

11.2.1 Действительно,

$$j_\pm^A = \psi^\dagger (A_\pm)^{-1} e^A \psi = t^\dagger U^\dagger (A_\pm)^{-1} e^A U t = tU^\dagger (A_\pm)^{-1} e^A U t,$$

где $\psi = Ut$ – элемент левого идеала, связанного с эрмитовым идемпотентом $t^\dagger = t$.

11.2.2 Имеем

$$\begin{aligned}\psi^{D_\pm} \to (S\psi)^{D_\pm} &= (S\psi)^\dagger A_\pm^{-1} = \psi^\dagger S^\dagger A_\pm^{-1}\\ &= \psi^\dagger A_\pm^{-1} S^{\ddagger(\curlywedge)} A_\pm A_\pm^{-1}\\ &= \psi^{D_\pm} S^{\ddagger(\curlywedge)} = \psi^{D_\pm} S^{\sim(\curlywedge)},\end{aligned}$$

где операция четностного сопряжения присутствует в случае A_-.

Последнее равенство верно в силу того, что элемент S принадлежит группе $\mathrm{Pin}(p,q)$, а значит, является элементом вещественной алгебры Клиффорда.

Из определения спинорных групп имеем, что если $S \in \mathrm{Pin}_\uparrow(p,q)$, то $S^{\curlywedge\sim} = S^{-1}$. В противном случае $S^{\curlywedge\sim} = -S^{-1}$. Точно также в случае $S \in \mathrm{Pin}_\downarrow(p,q)$ получаем $S^\sim = S^{-1}$, а в противном случае $S^\sim = -S^{-1}$.

Итак, получаем, что

$$\psi^{D_+} \to \begin{cases}\psi^{D_+} S^{-1}, & \text{если } S \in \mathrm{Pin}_\downarrow(p,q),\\ -\psi^{D_+} S^{-1}, & \text{если } S \in \mathrm{Pin}(p,q) \setminus \mathrm{Pin}_\downarrow(p,q),\end{cases}$$

$$\psi^{D_-} \to \begin{cases}\psi^{D_-} S^{-1}, & \text{если } S \in \mathrm{Pin}_\uparrow(p,q),\\ -\psi^{D_-} S^{-1}, & \text{если } S \in \mathrm{Pin}(p,q) \setminus \mathrm{Pin}_\uparrow(p,q).\end{cases}$$

11.2.3 Билинейные коварианты меняются по следующим правилам:

$$\begin{aligned}j_\pm^{\mu_1\ldots\mu_k} \to (j_\pm^{\mu_1\ldots\mu_k})' &= (\psi^{D_\pm} e^{\mu_1\ldots\mu_k}\psi)'\\ &= \pm\psi^{D_\pm} S^{-1} e^{\mu_1\ldots\mu_k} S\psi.\end{aligned}$$

Используя связь между S и P

$$S^{-1}e^{\mu}S = p^{\mu}_{\nu}e^{\nu},$$

получаем

$$\begin{aligned} S^{-1}e^{\mu_1\ldots\mu_k}S &= S^{-1}e^{\mu_1}SS^{-1}e^{\mu_2}SS^{-1}\cdots SS^{-1}e^{\mu_k}S \\ &= p^{\mu_1}_{\nu_1}\cdots p^{\mu_k}_{\nu_k}e^{\nu_1\ldots\nu_k}. \end{aligned}$$

В итоге получаем в случае четных p и q:

$$\begin{array}{ll} (j_+^{\mu_1\ldots\mu_k})' = p^{\mu_1}_{\nu_1}\cdots p^{\mu_k}_{\nu_k}j_+^{\nu_1\ldots\nu_k}, & P\in \mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q), \\ (j_+^{\mu_1\ldots\mu_k})' = -p^{\mu_1}_{\nu_1}\cdots p^{\mu_k}_{\nu_k}j_+^{\nu_1\ldots\nu_k}, & P\in \mathrm{SO}'(p,q), \\ (j_+^{\mu_1\ldots\mu_k})' = p^{\mu_1}_{\nu_1}\cdots p^{\mu_k}_{\nu_k}j_+^{\nu_1\ldots\nu_k}, & P\in \mathrm{O}'_{\downarrow}(p,q), \\ (j_+^{\mu_1\ldots\mu_k})' = -p^{\mu_1}_{\nu_1}\cdots p^{\mu_k}_{\nu_k}j_+^{\nu_1\ldots\nu_k}, & P\in \mathrm{O}'_{\uparrow}(p,q), \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (j_-^{\mu_1\ldots\mu_k})' = p^{\mu_1}_{\nu_1}\cdots p^{\mu_k}_{\nu_k}j_-^{\nu_1\ldots\nu_k}, & P\in \mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q), \\ (j_-^{\mu_1\ldots\mu_k})' = -p^{\mu_1}_{\nu_1}\cdots p^{\mu_k}_{\nu_k}j_-^{\nu_1\ldots\nu_k}, & P\in \mathrm{SO}'(p,q), \\ (j_-^{\mu_1\ldots\mu_k})' = -p^{\mu_1}_{\nu_1}\cdots p^{\mu_k}_{\nu_k}j_-^{\nu_1\ldots\nu_k}, & P\in \mathrm{O}'_{\downarrow}(p,q), \\ (j_-^{\mu_1\ldots\mu_k})' = +p^{\mu_1}_{\nu_1}\cdots p^{\mu_k}_{\nu_k}j_-^{\nu_1\ldots\nu_k}, & P\in \mathrm{O}'_{\uparrow}(p,q). \end{array}$$

В случае нечетных p и q в соответствии с определением спинорных групп и действием отображения ad в формулах надо поменять местами $\mathrm{O}'_{\downarrow}(p,q)$ и $\mathrm{O}'_{\uparrow}(p,q)$. В случае нечетных n имеют смысл только формулы для $\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$ и $\mathrm{SO}'(p,q)$.

Таким образом, билинейные коварианты в некоторых случаях являются тензорами, а в некоторых случаях – нет.

11.2.4 Подействуем на уравнение Дирака

$$ie^{\mu}(\partial_{\mu}\psi - ia_{\mu}\psi) - m\psi = 0$$

операцией эрмитова сопряжения. Имеем

$$-i(\partial_{\mu}\psi^{\dagger} + ia_{\mu}\psi^{\dagger})(e^{\mu})^{\dagger} - m\psi^{\dagger} = 0.$$

Домножим уравнение справа на $A_{\pm}^{-1}$. Учитывая

$$\psi^{D\pm} = \psi^{\dagger}(A_{\pm})^{-1}, \qquad (e^a)^{\dagger} = \pm A_{\pm}^{-1}e^aA_{\pm},$$

получаем

$$\pm i(\partial_{\mu}\psi^{D\pm} + ia_{\mu}\psi^{D\pm})e^{\mu} + m\psi^{D\pm} = 0.$$

11.2.5 Умножим уравнение Дирака (10.3) слева на ψ_+^D, первое из уравнений (11.10) домножим справа на ψ и сложим два получившихся уравнения. В итоге получим

$$i(\psi_+^D e^\mu \partial_\mu \psi + \partial_\mu \psi_+^D e^\mu \psi) = 0$$

или, после преобразований, уравнение

$$\partial_\mu(\psi_+^D e^\mu \psi) = \partial_\mu j_+^\mu = 0.$$

11.2.6 Вспомнив явный вид элементов $A_\pm$, получаем

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(j_+^{1\dots p}) = \mathrm{Tr}(\psi^{D\pm} e^{1\dots p}\psi) = \mathrm{Tr}(\psi^\dagger (A_+)^{-1} e^{1\dots p}\psi)\\ = \mathrm{Tr}(\psi^\dagger\psi) = \|\psi\|^2 \geqslant 0\end{aligned}$$

в случае нечетных p и q, в случае нечетного p и четного q. Остальные утверждения доказываются аналогично.

Список литературы

[1] Clifford, “Applications of Grassmann’s extensive algebra”, *Amer. J. Math.*, **1**:4 (1878), 350–358.

[2] H. Grassmann, *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*, Verlag von Otto Wigand, Leipzig, 1844.

[3] W. R. Hamilton, “On quaternions, or on a new system of imaginaries in algebra”, *Phil. Mag.* (3), **25** (1844), 489–495.

[4] Э. Картан, *Теория спиноров*, ИЛ, М., 1947.

[5] C. Chevalley, *Collected Works.* Vol. 2: *The Algebraic Theory of Spinors and Clifford Algebras*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[6] M. Riesz, *Collected Papers*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[7] I. R. Porteous, *Clifford Algebras and the Classical Groups*, Cambridge Stud. Adv. Math., **50**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[8] P. A. M. Dirac, “The quantum theory of the electron”, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **117** (1928), 610–624.

[9] Б. Л. Ван-дер-Варден, *Метод теории групп в квантовой механике*, Издательский дом “Удмуртский университет”, Ижевск, 1938.

[10] П. К. Рашевский, “Теория спиноров”, *УМН*, **10**:2 (1955), 3–110.

[11] Ю. Б. Румер, *Спинорный анализ*, ОНТИ, М.–Л., 1936.

[12] I. M. Benn, R. W. Tucker, *An introduction to Spinors and Geometry with Applications in Physics*, Adam Hilger, Bristol, 1987.

[13] M. F. Atiyah, R. Bott, A. Shapiro, “Clifford modules”, *Topology*, **3**, suppl. 1 (1964), 3–38.

[14] D. Hestenes, G. Sobczyk, *Clifford Algebra to Geometric Calculus. A Unified Language for Mathematical Physics*, Fundam. Theor. Phys., D. Reidel Publ., Dordrecht, 1984.

[15] Н. Г. Марчук, *Уравнения теории поля и алгебры Клиффорда*, РХД, Ижевск, 2009.

[16] H. B. Lawson, Jr., M.-L. Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton Math. Ser., **38**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1989.

[17] T. Friedrich, *Dirac Operators in Riemannian Geometry*, Grad. Stud. Math., **25**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[18] Г. Казанова, *Векторная алгебра*, Мир, М., 1979.

[19] Д. С. Широков, “Теорема о норме элементов спинорных групп”, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, **1(22)** (2011), 165–171.

[20] D. S. Shirokov, “On some relations between spinor and orthogonal groups”, *p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, **3**:3 (2011), 212–218.

[21] Д. С. Широков, “Обобщение теоремы Паули на случай алгебр Клиффорда”, *ДАН*, **440**:5 (2011), 607–610.

[22] D. S. Shirokov, *Concepts of Trace, Determinant and Inverse of Clifford Algebra Elements*, 2011, arXiv: math-ph/1108.5447.

[23] D. S. Shirokov, "Quaternion types of Clifford algebra elements, basis-free approach", *Proceedings of 9th International Conference on Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics* (ICCA9) (Weimar, Germany, 15–20 July 2011), 2011, arXiv: math-ph/1109.2322.

[24] D. S. Shirokov, "A classification of Lie algebras of pseudo-unitary groups in the techniques of Clifford algebras", *Adv. Appl. Clifford Algebr.*, **20**:2 (2010), 411–425, arXiv: math-ph/0705.3368.

[25] Д. С. Широков, "Классификация элементов алгебр Клиффорда по кватернионным типам", *ДАН*, **427**:6 (2009), 758–760.

[26] N. G. Marchuk, D. S. Shirokov, "Unitary spaces on Clifford algebras", *Adv. Appl. Clifford Algebr.*, **18**:2 (2008), 237–254.

[27] D. S. Shirokov, "Quaternion typification of Clifford algebra elements", *Adv. Appl. Clifford Algebr.*, **22**:1 (2012), 243–256; arXiv: math-ph/0806.4299.

[28] D. S. Shirokov, "Development of the method of quaternion typification of clifford algebra elements", *Adv. Appl. Clifford Algebr.*, **22**:2 (2012), 483–497; arXiv: math-ph/0903.3494.

[29] P. Lounesto, *Clifford Algebras and Spinors*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **239**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[30] J. Snygg, *Clifford Algebra. A Computational Tool for Physicists*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1997.

[31] W. Pauli, "Contributions mathématiques à la théorie des matrices de Dirac", *Ann. Inst. H. Poincaré*, **6**:2 (1936), 109–136.

[32] Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, А. И. Оксак, И. Т. Тодоров, *Общие принципы квантовой теории поля*, Наука, М., 1987.

[33] T. Kugo, P. Townsend, "Supersymmetry and the division algebras", *Nuclear Phys. B*, **221**:2 (1983), 357–380.

[34] F. Gliozzi, J. Scherk, D. Olive, "Supersymmetry, supergravity theories and the dual spinor model", *Nuclear Phys. B*, **122**:2 (1977), 253–290.

[35] В. А. Желнорович, *Теория спиноров и ее примененение в физике и механике*, Наука, М., 1982.

[36] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, ГИТТЛ, М., 1953.

[37] J. A. Lester, "Orthochronous subgroups of $O(p, q)$", *Linear and Multilinear Algebra*, **36**:2 (1993), 111–113.

[38] J. Gallier, *Clifford Algebras, Clifford Groups, and a Generalization of the Quaternions*, 2008, arXiv: math.GM/0805.0311.

[39] D. Lundholm, L. Svensson, *Clifford algebra, geometric algebra, and applications*, 2009, arXiv: math-ph/0907.5356.

[40] А. Зоммерфельд, *Строение атома и спектры*, Т. 2, ГИТТЛ, М., 1956; A. Sommerfeld, *Atombau und Spektrallinien*, Vol. 2, F. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1951.

[41] G. Juvet, "Opérateurs de Dirac et équations de Maxwell", *Comment. Math. Helv.*, **2**:1 (1930), 225–235.

[42] F. Sauter, "Lösung der Diracschen Gleichungen ohne Spezialisierung der Diracschen Operatoren", *Z. Phys.*, **63**:11-12 (1930), 803–814; "Zur Lösung der Diracschen Gleichungen ohne Spezialisierung der Diracschen Operatoren. II", *Z. Phys.*, **64**:5-6 (1930), 295–303.

[43] J. F. Cornwell, *Group Theory in Physics. An Introduction*, Academic Press, San Diego, CA, 1997.

[44] W. Fulton, *Algebraic Topology. A first course*, Grad. Texts in Math., **153**, Springer Verlag, 1995.

Предметный указатель