A. K. Shlepkin, On the periodic part of some Shunkov groups,
Algebra Logika, 1999, Volume 38, Number 1, 96–125

Алгебра и логика, 38, N 1 (1999), 96—125

УДК 512.544

О ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЧАСТИ НЕКОТОРЫХ ГРУПП ШУНКОВА

А. К. ШЛЁПКИН

Говорят, что группа G *насыщена группами из множества* X, если любая конечная подгруппа группы G вложима в G в подгруппу L, изоморфную некоторой группе из X. Множество X будем называть *насыщающим множеством* для группы G.

В данной статье продолжается изучение групп Шункова, насыщенных группами из фиксированного множества конечных простых неабелевых групп [1, 2]. С помощью схемы рассуждений из [3, 4] удается показать существование периодической части в группе Шункова в случаях, когда насыщающее множество для нее совпадает с одним из следующих: $\{L_2(q)\}$, $\{Sz(q)\}$, $\{Re(q)\}$, $\{U_3(2^n)\}$ (теоремы 1.2—1.5).

§ 1. Основные результаты и вспомогательные утверждения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Группа G называется *группой Шункова*, если для любой ее конечной подгруппы H, в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную подгруппу (см. [5]).

Имеют место:

ТЕОРЕМА 1.2. *Группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\{L_2(p^n)\}$, где p — фиксированное число, обладает периодической частью, которая изоморфна простой группе $L_2(P)$, где P — локально конечное поле характеристики p.*

ТЕОРЕМА 1.3. *Группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\{Re(q)\}$, обладает периодической частью, которая изоморфна простой группе Ри $Re(Q)$ над локально конечным полем Q характеристики* 3.

ТЕОРЕМА 1.4. *Группа Шункова G, насыщенная группами из $\{Sz(q)\}$, обладает периодической частью, которая изоморфна простой группе Судзуки $Sz(Q)$ над локально конечным полем Q характеристики* 2.

ТЕОРЕМА 1.5. *Группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\{U_3(2^n)\}$, обладает периодической частью, которая изоморфна простой группе $U_3(Q)$, где Q — локально конечное поле характеристики* 2.

Насыщающие множества из теорем 1.2—1.5 состоят из конечных простых групп Шевалле ранга 1. Приведем несколько хорошо известных результатов о группах Шевалле (см. [6]).

ЛЕММА 1.6. *Пусть G — конечная простая группа Шевалле лиевского ранга* 1 *характеристики p, P — ее силовская p-подгруппа, $B = N_G(P)$ — подгруппа Бореля группы G, H — подгруппа Картана в G, $N = N_G(H)$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $B = P \lambda H$ *и* $N = H \lambda \langle v \rangle$, *где* $v^2 = 1$;

2) $G = BNB$ *и G — дважды транзитивная группа*;

3) H *— циклическая группа, и если* $G \neq U_3(q)$, *то N — группа диэдра*;

4) *все инволюции в G сопряжены.*

Из описания (см. [7]) собственных подгрупп группы $L_2(q)$ легко вытекают следующие

ЛЕММА 1.7. *Пусть $G = L_2(q)$, где $q = p^n > 3$ — нечетное число. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *силовская p-подгруппа P группы G является элементарной абелевой, а $B = N_G(P) = P \lambda H$ — группой Фробениуса с ядром P и циклическим неинвариантным множителем H порядка $\frac{q-1}{2}$*;

2) *силовская 2-подгруппа группы G является группой диэдра*;

3) *если a — инволюция из G, то $C_G(a)$ — группа диэдра*;

4) *группа G порождается любыми двумя централизаторами инволюций.*

ЛЕММА 1.8. *Пусть $G = L_2(q)$, где $q = 2^n > 2$, P — силовская 2-подгруппа группы G, $B = N_G(P)$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *P — элементарная абелева группа и любые две силовские 2-подгруппы группы G имеют тривиальное пересечение. В частности, $C_G(a) = P$ для любой инволюции $a \in P$*;

2) *$B = P\lambda H$ — группа Фробениуса с ядром P и циклическим неинвариантным множителем H порядка $q-1$, действующим транзитивно на множестве $P^{\#}$*;

3) *$N = N_G(H) = H\lambda\langle t\rangle$ — группа диэдра*;

4) *если K — подгруппа в G и K обладает нормальной подгруппой нечетного порядка, то $N_G(K)$ — группа диэдра*;

5) *G порождается любыми двумя силовскими 2-подгруппами.*

ЛЕММА 1.9 (теорема Судзуки, см. [7, 8]). *С точностью до сопряженности группа $Sz(q)$ содержит следующие максимальные подгруппы*:

1) *группа Фробениуса $B = P\lambda H$ порядка $q^2(q-1)$ с ядром P порядка q^2 и циклическим неинвариантным множителем H порядка $q-1$, причем P является силовской 2-подгруппой в $Sz(q)$, B — подгруппой Бореля и H — подгруппой Картана*;

2) *группа диэдра $N = N_G(H) = H\lambda\langle t\rangle$ (нормализатор подгруппы Картана) порядка $2(q-1)$*;

3) *группа Фробениуса $\langle a\rangle\lambda\langle b\rangle$, где $|a| = q + r + 1$, $|b| = 4$, и $r^2 = 2q$*;

4) *группа Фробениуса $\langle a\rangle\lambda\langle b\rangle$, где $|a| = q - r + 1$, $|b| = 4$ и $r^2 = 2q$*;

5) *группа $Sz(s)$, где $s^t = q = 2^{2k+1}$ и t — простой делитель числа $2k+1$.*

ЛЕММА 1.10. *Пусть $G = Sz(q)$, P — силовская 2-подгруппа группы G, $B = P\lambda H$ — подгруппа Бореля, H — подгруппа Картана из B.*

Тогда имеют место следующие утверждения:

1) P — *группа порядка* q^2 *и периода* 4, $P' = Z(P) = \Phi(P) = \Omega_1(P)$;

2) *все инволюции группы сопряжены и* $C_G(a) = P$ *для любой инволюции* $a \in P$;

3) *любые две силовские* 2*-подгруппы в* G *имеют тривиальное пересечение*;

4) H *действует транзитивно на множестве инволюций из* P;

5) G *порождается любой парой своих силовских* 2*-подгрупп.*

Из [6, теорема 3.33] и [9] следует

ЛЕММА 1.11. *Пусть* $G = Re(q)$, *где* $q = 3^{2n+1} > 3$, a — *инволюция из* G, T — *силовская* 2*-подгруппа в* G. *Тогда*

1) T — *элементарная абелева группа порядка* 8, $C_G(T) = T$ *и* $H = N_G(T) = T\lambda(\langle b\rangle\lambda\langle d\rangle)$, *где* $\langle b\rangle\lambda\langle d\rangle$ — *группа Фробениуса порядка* 21;

2) $C_G(a) = \langle a\rangle \times L$, *где* $L \simeq L_2(q)$;

3) $G = \langle S, C_G(a)\rangle$, *где* S — *произвольная силовская* 2*-подгруппа группы* G, *не содержащая* a.

ЛЕММА 1.12 [10]. *Пусть* $G = U_3(2^n)$, P — *силовская* 2*-подгруппа группы* G *и* $B = N_G(P)$. *Тогда*

1) $G = B\langle v\rangle B$, *где* v — *инволюция и* $B \cap B^v = H$ — *подгруппа Картана*;

2) P — *группа периода* 4, *ступени нильпотентности* 2 *и* $P' = Z(P) = \Phi(P) = \Omega_1(P)$;

3) *любые две силовские* 2*-подгруппы группы* G *имеют тривиальное пересечение*;

4) *если* a — *инволюция из* P, *то* $C_G(a) = P\lambda H$, *где* H_1 — *циклическая группа,* $H_1 \leq B$ *и* $Z(P) \leq C_G(H_1)$;

5) $B = P\lambda H$, H — *циклическая группа порядка* $\frac{2^{2n-1}}{d}$, *где* $d = 3$, *если* 3 *делит* $2^n + 1$, *и* $d = 1$ — *в противном случае*;

6) $H = H_0 \times H_1$, *где* H_1 — *подгруппа из утверждения* 3 *леммы,* $|H_0| = 2^n - 1$ *и* $|H_1| = \frac{2^n+1}{d}$, *причем* v *инвертирует* H_0 *и централизует* H_1;

7) $P\lambda H_0$ — *группа Фробениуса с неинвариантным множителем* H_0, *действующим транзитивно на множестве инволюций группы* P;

8) $C_G(H_1) = H_1 \times L$, *где* $L \simeq L_2(2^n)$ *и* $S = L \cap P$ — *силовская* 2-*подгруппа в* L;

9) G *порождается любой парой своих силовских* 2-*подгрупп*;

10) *для любого простого* $2'$-*элемента* $a \in G$ *подгруппа* $N_G(a)$ *имеет четный порядок.*

Из результатов работ [11—14] вытекает

ЛЕММА 1.13. *Пусть локально конечная группа* G *является объединением цепочки* $G_1 < G_2 < G_3 < \ldots$ *конечных простых групп Шевалле лиевского ранга* 1. *Тогда* G — *простая группа Шевалле лиевского ранга* 1 *над локально конечным полем.*

Обозначим через $m_p(G)$ — p-ранг группы G — максимум рангов элементарных абелевых p-подгрупп группы G. Из [15] следует

ЛЕММА 1.14. *Пусть* G — *группа Шункова,* $m_p(G) = 1$ *для всех* $p \in \pi(G)$ *и* G *не содержит группы кватернионов. Тогда* G *обладает периодической частью* T, *причем либо* T — *локально циклическая группа, либо* $T = A\lambda B$, *где* A *и* B — *локально циклические группы.*

ЛЕММА 1.15 (теорема Шункова [16]). *Периодическая группа с почти регулярной инволюцией локально конечна и почти разрешима.*

ЛЕММА 1.16 (теорема Санова [17]). *Произвольная группа периода* 4 *локально конечна.*

ЛЕММА 1.17 (теорема Дицмана [18]). *Если группа содержит конечное число элементов конечного порядка, то она обладает конечной периодической частью.*

В силу теоремы Дицмана достаточно теоремы 1.2—1.5 доказать для случая, когда

группа G *содержит бесконечно много элементов конечного порядка,*

что и будет предполагаться в дальнейшем.

ЛЕММА 1.18 [19]. *Группа Шункова, содержащая бесконечно мно-*

го элементов конечного порядка, содержит бесконечную локально конечную подгруппу.

ЛЕММА 1.19. *Пусть группа Шункова G насыщена конечными неабелевыми простыми группами и H — собственная нормальная подгруппа группы G. Тогда либо H является группой без кручения, либо H содержит все элементы конечного порядка группы G. В частности, если G — периодическая группа, то она проста.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае, когда H не содержит неединичных элементов конечного порядка, утверждение леммы очевидно. Пусть теперь $b \neq 1$ — элемент конечного порядка из H. По условиям леммы $\langle b\rangle \leq L \leq G$, где L — конечная простая неабелева подгруппа группы G. Поскольку $1 \neq L \cap H$ — нормальная подгруппа в L, то $L \leq H$. Следовательно, H содержит некоторую инволюцию t.

Пусть z — произвольная инволюция из G. По условиям леммы $\langle t, z\rangle \leq L \leq G$, где L — конечная простая неабелева подгруппа группы G. Так как L имеет нетривиальное пересечение с H, то $L \leq H$ и, следовательно, $z \in H$. Значит, все инволюции группы G лежат в H.

Пусть теперь b — произвольный элемент конечного порядка из G. По условиям леммы, $\langle b\rangle \leq L \leq G$, где L — конечная простая неабелева подгруппа группы G. Поскольку все инволюции лежат в H, то L имеет нетривиальное пересечение с H, $L \leq H$ и $b \in H$. Значит, H содержит все элементы конечного порядка из G. □

ЛЕММА 1.20. *Пусть группа Шункова G насыщена конечными простыми группами Шевалле ранга* 1. *Тогда все инволюции в G сопряжены.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть z, t — произвольные инволюции из G. Тогда $L = \langle z, t\rangle$ — конечная группа и, по условию леммы, $L \leq M < G$, где M является конечной простой группой Шевалле лиевского ранга 1. По лемме 1.6 все инволюции в M сопряжены. □

§ 2. Доказательство теоремы 1.2

На протяжении данного параграфа предполагается, что выполнены условия теоремы 1.2.

ЛЕММА 2.1. *Силовские p-подгруппы группы G являются элементарными абелевыми и имеют тривиальные пересечения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть P — произвольная силовская p-подгруппа группы G и $1 \neq b \in P$. Элемент b вложим в некоторую конечную подгруппу $L \simeq L_2(p^n)$, поэтому, учитывая леммы 1.7 и 1.8, порядок элемента b равен p. Возьмем два произвольных элемента $a, b \in P^{\#}$ и рассмотрим подгруппу $\langle b, b^a \rangle$. В силу свойств групп Шункова $\langle b, b^a \rangle$ представляет собой конечную p-группу, она вложима в подгруппу, изоморфную $L_2(p^n)$, и, согласно леммам 1.7, 1.8, $\langle b, b^a \rangle$ является элементарной абелевой группой. Элементы a и b из P выбирались произвольно, значит, подгруппа $\left\langle b, b^a, \ldots, b^{a^{p-1}} \right\rangle$ абелева, подгруппа $\left\langle b, b^a, \ldots, b^{a^{p-1}} \right\rangle \lambda \langle a \rangle$ конечна и элементарная абелева (в силу лемм 1.7, 1.8 и условий теоремы). Следовательно, P является элементарной, абелевой группой.

Пусть A, B — две p-подгруппы группы G и $A \cap B = D \neq 1$. Покажем, что $\langle A, B \rangle$ — p-подгруппа. По доказанному выше A и B — элементарные абелевы группы, поэтому достаточно рассмотреть случай, когда A и B конечны. Рассмотрим $N_G(D)$. По условиям теоремы любая конечная подгруппа K, содержащая подгруппу D, вложима в подгруппу, изоморфную $L_2(p^n)$, и является либо элементарной абелевой группой, либо группой Фробениуса, ядро которой представляет собой элементарную абелеву группу (лемма 1.7). Из определения группы Шункова вытекает, что для любых $a \in A \setminus D$, $b \in B \setminus D$ группа $\langle D, b, b^a \rangle$ — элементарная абелева p-группа. Так же, как и выше

$$\langle D, a, b \rangle = \left\langle D, b, b^a, \ldots, b^{a^{p-1}} \right\rangle \lambda \langle a \rangle$$

является элементарной абелевой p-подгруппой. Последнее равносильно тому, что $\langle A, B \rangle$ — элементарная абелева p-группа. □

ЛЕММА 2.2. *Пусть p — нечетное число, a — инволюция из G. Тогда $C = C_G(a)$ обладает периодической частью $Q = A\lambda\langle t\rangle$, где Q — бесконечная локально циклическая группа, t — инволюция и $c^t = c^{-1}$ для любого элемента $c \in A^{\#}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть C содержит конечное число элементов конечного порядка. В этом случае C обладает конечной периодической частью T (лемма 1.17). По условиям теоремы $T \leq K < G$, где K — конечная простая группа, изоморфная $L_2(p^n)$. Следовательно, $T \leq C_K(a)$, с другой стороны — из определения группы T имеем $C_K(a) \leq T$, и, значит, $C_K(a) = T$ и T — группа диэдра (лемма 1.7).

Рассмотрим случай, когда C содержит бесконечно много элементов конечного порядка, а значит, и бесконечную локально конечную подгруппу Q (лемма 1.18). Без ограничения общности можно считать, что $a \in Q$ и Q является максимальной локально конечной подгруппой группы C. Покажем, что Q — нормальная подгруппа в C.

Пусть g — произвольный элемент простого порядка $r \neq 2$ из Q, а x — произвольный элемент из C. Конечная подгруппа $\langle a, g, g^x\rangle$ вложима, по условиям теоремы, в конечную подгруппу K группы G, изоморфную $L_2(p^n)$. Так как $\langle a, g, g^x\rangle \leq C_K(a)$ и последняя является группой диэдра (лемма 1.7), то $\langle g\rangle = \langle g^x\rangle$ (нетрудно убедиться, что в периодической группе диэдра найдется только одна циклическая подгруппа порядка больше 2.

Пусть теперь g — произвольный элемент конечного порядка больше 2 из Q и $\langle d\rangle$ — максимальная нормальная в Q циклическая подгруппа группы $\langle a, g, g^x\rangle$. Из определения подгруппы $\langle d\rangle$ следует, что $a \in \langle d\rangle$. Пусть $\langle d\rangle \neq \langle g\rangle$. Тогда $\langle g\rangle$ содержит элемент b такой, что $b^q \in \langle d\rangle$ для некоторого простого числа q. Группа $\langle d, b, b^x\rangle$ конечна по определению групп Шункова, и по условию теоремы $\langle d, b, b^x\rangle \leq K < G$, где K — конечная простая группа, изоморфная $L_2(p^n)$. Так как $\langle b, b^x\rangle \leq C_K(a)$, то, по лемме 1.7, $\langle b, b^x\rangle$ — циклическая группа и $\langle b\rangle = \langle b^x\rangle$. Поскольку x — произвольный элемент из C, $\langle b\rangle$ будет нормальной подгруппой в C. Получили противоречие с выбором $\langle d\rangle$.

Следовательно, $\langle d\rangle = \langle g\rangle = \langle g^x\rangle$ для любого элемента g конечного

порядка из Q и любого $x \in C$. Значит, все элементы конечного порядка больше 2 вместе с инволюцией a порождают в Q абелеву, нормальную в C подгруппу A и $Q = A\lambda(t)$, где t — инволюция из C, отличная от a. Пусть x — произвольный элемент из C. Так как $\langle t, t^x\rangle = \langle d\rangle\lambda\langle t\rangle$ — конечная группа диэдра из $N_G(A)$, то $\langle d\rangle \leq A$ (в противном случае приходим к противоречию с максимальностью Q), $t^x \in Q$ и Q — нормальная подгруппа группы C. □

ЛЕММА 2.3. *Пусть $p \neq 2$, Q и a такие, как в формулировке леммы 2.2. Тогда G обладает локально конечной простой подгруппой L такой, что $Q < L$ и $L \simeq L_2(P)$, где P — локально конечное поле характеристики p.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как следует из леммы 2.2, Q представима в виде объединения конечных подгрупп диэдра D_i, где

$$D_1 < D_2 < D_3 < \dots . \tag{1}$$

причем без ограничения общности можно считать: $|D_i| > 4$, каждая из подгрупп D_i, совпадает с централизатором инволюции a в некоторой простой подгруппе L_i группы G и $L_i \simeq L_3(p^{n_i})$. Таким образом, цепочке (1) поставлена в соответствие последовательность

$$L_1, L_2, L_3, \dots \tag{2}$$

конечных простых подгрупп $L_i \simeq L_2(p^{n_i})$ группы G.

Далее, без ограничения общности можно считать, что $D_i = C_i\lambda\langle t\rangle$, где t — фиксированная инволюция (лемма 2.2). По лемме 1.6 инволюции a и t сопряжены в L_i, в частности, подгруппа $C_{L_i}(a) = D_i$ сопряжена в L_i с подгруппой $T_i = C_{L_i}(a)$. По лемме 2.2 подгруппа C_i в $C_G(a)$ однозначно определена своим порядком $m_i = |C_i|$; то же самое верно для подгруппы V_i, которая является однозначно определенной (максимальной) циклической подгруппой порядка $m_i > 2$ группы T_i такой, что $T_i = V_i\lambda\langle a\rangle \leq C_G(t)$.

Поскольку инволюции a и t сопряжены в G и циклическая подгруппа V_i в $C_G(t)$ однозначно определена своим порядком m_i (лемма 2.2), то

подгруппы T_i, так же как и подгруппы D_i, составляют цепочку

$$T_1 < T_2 < T_3 \dots . \tag{3}$$

В силу леммы 1.7 имеем $L_i = \langle T_i, D_i \rangle$. Из (1) и (3) следует, что подгруппы L_i составляют цепочку

$$L_1 < L_2 < L_3 < \dots . \tag{4}$$

Предположим, что выполняется равенство $L = \bigcup L_i$. По построению имеем $Q < L$. По лемме 1.13, L — локально конечная простая группа, изоморфная $L_2(P)$, где P — локально конечное поле характеристики p. □

ЛЕММА 2.4. *Пусть $p \neq 2$ и L — подгруппа, как в формулировке леммы* 2.3. *Тогда L является периодической частью группы G.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим обратное. Тогда в силу леммы 1.19 в $G \setminus N_G(L)$ найдется элемент b порядка p. Подгруппа $K = \langle a, b \rangle$ является конечной как группа Шункова, и по условию теоремы выполняется $K \leq M \leq G$, где $M \simeq L_2(p^n)$. Пусть $H = M \cap L$ и t — произвольная инволюция из H.

Предположим, что для некоторого g из M справедливо включение $t^g \in H$. По леммам 1.7 и 2.2, $C_M(t)$ и $C_m(t^g)$ лежат в L, а значит, и в H. Теперь, используя лемму 1.7, видим, что H — сильно вложенная подгруппа в M (теорема 4.31 [6]).

По теореме Бендера (см. теорему 4.24 [6]) M является простой группой Шевалле характеристики 2 лиевского ранга 1. Таким образом, имеет место исключение $M \simeq L_2(5) \simeq L_2(4)$ (см. (2.6) из [6]), в частности, $p = 5$, H совпадает с нормализатором силовской 2-подгруппы группы M и ее порядок равен 12.

Пусть теперь K — произвольная 5-подгруппа из L и $|K| < \infty$. Из строения подгруппы Бореля группы L следует, что $N_L(K)$ содержит инволюцию t, инвертирующую любой элемент из K (лемма 1.7). Если силовская 5-подгруппа группы G, содержащая K, не содержится в L, то в силу леммы 2.1 в разности $N_G(K) \setminus L$ найдется элемент b порядка 5. Подгруппа

$S = \langle K, b, t\rangle$ конечна как группа Шункова, и по условию теоремы выполняется $S < M < G$, где $M \simeq L_2(5^n)$. Так же, как и выше, покажем, что подгруппа $H = M \cap L$ сильно вложена в M, однако в этом случае порядок подгруппы H делится на 10 и отличен от 12. Применяя теорему Бендера (см. теорему 4.24 [6]), получаем противоречие. Следовательно, всякая силовская 5-подгруппа группы G, имеющая нетривиальное пересечение с L, полностью содержится в L.

Пусть P — силовская 5-подгруппа группы G. Учитывая леммы 1.6, 2.1 и наличие вложения произвольной конечной подгруппы группы $N_G(P)$ в простую конечную подгруппу, изоморфную $L_2(5^n)$, в группе B/P все конечные подгруппы являются циклическими. Поскольку G — группа Шункова, согласно условию $5 \notin \pi(N_G(P)/P)$ группой Шункова будет и фактор-группа B/P. Из леммы 1.14 следует, что $N_G(P)/P$ обладает периодической частью $\overline{B}$, которая является локально циклической группой. Порядок подгруппы Картана $|H| = \frac{q-1}{2}$ в $L_2(5^n)$ делится на 2, и значит, $\overline{B}$ содержит инволюцию. Обозначим через B полный прообраз $\overline{B}$ в $N_G(P)$. Тогда $B = P\lambda C_B(a) = P\lambda H$, где a — инволюция из B, инвертирующая все элементы из P. Из лемм 2.1 и 2.3 получаем, что нормализатор всякой нетривиальной конечной 5-подгруппы группы P содержится в B.

Пусть b — элемент порядка 5 из P. В силу леммы 1.19 для некоторого элемента $g \in G \setminus L$ конечная подгруппа $K = \langle b, b^g\rangle$ не содержится в L. По условиям теоремы $K \leq M < G$, где $M \simeq L_2(5^n)$. Далее, в $L_2(5^n)$, т. е. в M, найдется инволюция t, инвертирующая элемент b, а из доказанного ранее следует, что t содержится в подгруппе $H = L \cap M$. Так же, как и выше, докажем, что H — сильно вложенная подгруппа в M, причем ее порядок делится на 10. Снова применяя теорему Бендера, получаем противоречие. Таким образом, предположение $G \neq N_G(L)$ неверно и $G = N_G(L)$. □

Лемма 2.4 завершает доказательство теоремы 1.2 для случая нечетного p, и остается рассмотреть случай $p = 2$.

ЛЕММА 2.5. *Пусть $p = 2$, P — силовская 2-подгруппа группы G. Тогда имеют место следующие утверждения*:

1) *P — элементарная абелева 2-группа и любые две силовские*

2-подгруппы группы G имеют тривиальное пересечение;

2) *$N_G(P)$ обладает периодической частью B, причем $B = P\lambda H$ — группа Фробениуса с ядром P и локально циклическим неинвариантным множителем H, действующим транзитивно на множестве инволюций группы P (в частности, $2 \notin \pi(B \cap B^x)$ для любого $x \in G \setminus N_G(P)$)*;

3) *силовские 2-подгруппы группы G сопряжены.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Это утверждение фактически вытекает из леммы 2.1.

2) Из условий теоремы и из леммы 1.8 следует, что любая конечная подгруппа группы $N_G(P)/P$ будет циклической. Нетрудно показать, что фактор-группа $N_G(P)/P$ является группой Шункова. В силу леммы 1.14 группа $N_G(P)$ обладает периодической частью B и B/P представляет собой локально циклическую группу. Пусть a — элемент простого порядка q из $B \setminus P$. Используя наличие вложения конечных подгрупп вида $V\lambda\langle a\rangle$, где $V < P$, в простые подгруппы $L_2(2^n)$ и строение подгрупп в $L_2(2^n)$, легко показать, что $V\lambda\langle a\rangle$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle a\rangle$ и ядром V. Поэтому $P\lambda\langle a\rangle$ является группой Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle a\rangle$ и ядром P. По лемме Фраттини имеем $B = P\lambda H$, где $H = N_B(\langle a\rangle)$, и $P\lambda H$ — группа Фробениуса. Наконец, в силу леммы 1.20 и первого утверждения леммы группа H действует транзитивно на множестве $P^\#$.

3) В $L_2(2^n)$ централизаторы инволюций являются 2-группами, поэтому из первого утверждения леммы и из леммы 1.20 следует, что силовские 2-подгруппы в G сопряжены. □

ЛЕММА 2.6. *Пусть $p = 2$ и B — подгруппа, как в лемме 2.5. Тогда G обладает локальной конечной простой подгруппой L, содержащей подгруппу B, причем $L \simeq L_2(F)$ для некоторого локально конечного поля F характеристики 2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H, P, B — такие подгруппы, как в лемме 2.5. Зафиксируем инволюцию $i \in P$. По лемме 2.5, H является локально циклической группой, действующей транзитивно на $P^\#$, следовательно, B — счетная группа. Представим H в виде объединения цепочки

циклических подгрупп $H = \bigcap\langle a_m\rangle$, где

$$\langle a_1\rangle < \langle a_2\rangle < \langle a_3\rangle \dots . \tag{5}$$

Из леммы 2.5 следует, что нормализатор любой 2-подгруппы группы P содержится в $N_G(P)$, и если $i^a = i^b$ для некоторых элементов a, $b \in G$, то $Pa = Pb$. Выберем некоторый элемент b простого порядка из $G \setminus B$ такой, что $b^i = b^{-1}$ (его существование легко вытекает из определения подгруппы B и из леммы 2.5). Рассмотрим подгруппы $L_i = \langle b, i, k_j\rangle$, где $k_j = i^{a_j}$, $j = 1, 2, \dots$ и $\langle a_j\rangle$ — подгруппы цепочки (5).

Так как G — группа Шункова и соотношения $k_i^j = k_j$, $b^i = b^{-1}$, $b^{k_j i} = (b^{-1})^{k_j}$ выполнимы, все подгруппы L_j, где $j = 1, 2, \dots$, конечны.

Пусть $B_j = B \cap L_j$. Из леммы 2.5 следует, что B_j — сильно вложенная подгруппа в L_j, причем $P_j = P \cap L_j$ — силовская 2-подгруппа группы L_j ранга не меньше, чем 2. По теореме 4.23 [6] L_j имеет дважды транзитивное представление на сопряженных с B_j подгруппах группы L_j. В частности, $L_j = B_j\langle t_j\rangle B_j$ где t_j — некоторая инволюция из L_j. Используя лемму 2.5, легко убедиться в том, что $B_j = P_j \lambda H_j$ и H_j — циклическая группа, причем $PH_j \geq P\langle a_j\rangle$. По условиям теоремы, L_j содержится в некоторой подгруппе M группы G, изоморфной $L_2(2^n)$. Используя описание подгрупп в $L_2(2^n)$ (см. например, [7]), заключаем, что $L_j \simeq L_2(2^{n_j})$ для подходящего числа n_j.

Из выбора элементов a_j и включений $P\langle a_j\rangle \leq PH_j$ вытекает, что $k_j \in L_{j+1}$ для $j = 1, 2, \dots$, следовательно, подгруппы L_j образуют возрастающую цепочку

$$L_1 < L_2 < L_3 \dots . \tag{6}$$

Объединение L членов этой цепочки будет простой локально конечной группой, изоморфной $L_2(F)$ для некоторого локально конечного поля F характеристики 2 (лемма 1.13).

В силу выбора элементов a_j и включений $P\langle a_j\rangle \leq PH_j$ пересечение $P \cap L$ содержит все инволюции вида i^b, где $b \in \langle a_j\rangle$, $j = 1, 2, \dots$. Это означает, что $P < L$ (лемма 2.5). Кроме того, в L содержатся все подгруппы $P\langle a_j\rangle \leq PH_j$, $j = 1, 2, \dots$, что влечет $B < L$. Лемма доказана. □

ЛЕММА 2.7. *Пусть $p = 2$, L — подгруппа, как в лемме* 2.6, *H — подгруппа Картана группы L. Тогда $N_G(H)$ обладает периодической частью $N = N_L(H) = H\lambda\langle v\rangle$, где v — инволюция из L и для любого неединичного элемента a из H имеет место равенство $N_G(\langle a\rangle) = N_G(H)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство $N = N_L(H) = H\lambda\langle v\rangle$ следует из леммы 1.6. Пусть a — произвольный неединичный элемент из H и b — элемент конечного порядка из $N_G(\langle a\rangle)\setminus N$. Тогда, как нетрудно убедиться, $b \in G \setminus L$. Без ограничения общности можно считать, что $b^q \in H$, где q — простое число. Тогда $|\langle a, b^q\rangle| < \infty$ и $b, v \in N_G(\langle a, b^q\rangle)$. Так как G — группа Шункова, подгруппа $K = \langle a, b, v\rangle$ конечна, и, по условиям теоремы, $K < M < G$, где $M \simeq L_2(2^n)$. Из леммы 1.8 следует, что K является группой диэдра. Очевидно, инволюции v и v^a содержатся в различных силовских 2-подгруппах R и S группы M. Далее, $v, v^a \in L$, а так как по лемме 2.6 группа L содержит всякую силовскую 2-подгруппу группы G, имеющую нетривиальное пересечение с L, то R, S содержатся в L. Группа M порождается подгруппами R и S (лемма 1.8). Отсюда $M < L$, что противоречит выбору элемента b. Значит, все элементы конечного порядка из $N_G(\langle a\rangle)$ лежат в N. □

ЛЕММА 2.8. *Пусть $p = 2$ и L — локально конечная простая подгруппа, как в лемме* 2.6. *Тогда L является периодической частью группы G.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $G \neq N_G(L)$ и a — элемент простого порядка q из подгруппы Картана группы L. По лемме 1.19 для некоторого элемента $g \in G \setminus N(L)$ имеем $a^g \notin L$. Поскольку G — группа Шункова, подгруппа $K = \langle a, a^g\rangle$ конечна. По условиям теоремы $K < M < G$, $M \simeq L_2(2^n)$. Из леммы 1.8 следует, что $N_M(\langle a\rangle) = V\lambda\langle t\rangle$ является группой диэдра. По лемме 2.7, $V\lambda\langle t\rangle < N < L$; в частности, все инволюции из $V\lambda\langle t\rangle$ содержатся в L. Понятно, что все эти инволюции лежат в различных силовских 2-подгруппах группы M. С другой стороны, L содержит любую силовскую 2-подгруппу группы G, которая имеет нетривиальное пересечение с L (леммы 2.5, 2.6). Поэтому L содержит по меньшей мере две различные силовские 2-подгруппы группы M. По

лемме 1.8 группа M порождается любыми двумя различными силовскими 2-подгруппами из M. Таким образом, $M < L$, а это противоречит выбору элемента g. Следовательно, $a^G \subset L$, и в силу леммы 1.19 имеем $G = N_G(L)$. □

Лемма 2.8 завершает доказательство теоремы 1.2 для случая $p = 2$, а значит, теорема 1.2 доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 1.3

На протяжении данного параграфа группа удовлетворяет всем условиям теоремы 1.3.

ЛЕММА 3.1. *Пусть a — инволюция из G. Тогда $C_G(a)$ обладает периодической частью $B = \langle a \rangle \times L$, где L — простая группа, изоморфная $L_2(Q)$, Q — локально конечное поле характеристики 3, не содержащее подполей порядка 9.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что $C = C_G(a)$ содержит бесконечно много элементов конечного порядка, вытекает из лемм 1.11, 1.18, 1.20.

Пусть K — произвольная конечная подгруппа группы C. По условиям теоремы конечная подгруппа $\langle a, K \rangle$ вложима в конечную простую подгруппу M группы G, изоморфную $Re(q)$, где $q = 3^{2n+1}$. Так как централизатор инволюции a в группе M изоморфен прямому произведению $\langle a \rangle \times L_2(q)$ (лемма 1.11), любая конечная подгруппа группы $\overline{C} = C/\langle a \rangle$ вложима в конечную простую подгруппу $\overline{R}$, изоморфную $L_2(q)$, где $q = 3^{2n+1}$. Группа $\overline{C}$, очевидно, является группой Шункова и удовлетворяет всем условиям теоремы 1.2 при $p = 3$. По теореме 1.2, $\overline{C}$ обладает периодической частью $\overline{B} \simeq L_2(Q)$, где Q представляет собой локально конечное поле характеристики 3, причем из вложимости любой конечной подгруппы группы C в простую подгруппу $Re(q)$ группы G следует, что поле Q не содержит подполей порядка 9.

Итак, C обладает периодической частью B, которая будет локально конечной группой; и нам осталось доказать, что $B = \langle a \rangle \times L$, где $L = L_2(Q)$. Если бы центральная инволюция $a \in B$ не выделялась в

B прямым сомножителем, то в B нашлось бы такое конечное множество 3-элементов, что подгруппа, ими порожденная, содержала бы a. Пусть K является такой подгруппой. По условиям теоремы, $K < M < G$, где $M \simeq Re(q)$, и, как вытекает из строения централизаторов инволюций в $Re(q)$ (лемма 1.11), $a \notin K$. Полученное противоречие означает, что для подгруппы L группы C, порожденной всеми 3-элементами из C, имеем $\langle a, L\rangle = \langle a\rangle \times L$. Так как очеидно, что B порождается всеми 3-элементами, получаем $B = \langle a\rangle \times L$, причем $L \simeq L_2(Q)$. □

ЛЕММА 3.2. *Пусть T — силовская 2-подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *T — элементарная абелева группа порядка 8, $C_G(T)$ обладает периодической частью, которая совпадает с T, и все силовские 2-подгруппы группы G сопряжены;*

2) *$N_G(T)$ обладает периодической частью $B = T\lambda(\langle b\rangle\lambda\langle d\rangle)$, где $\langle b\rangle\lambda\langle d\rangle$ является группой Фробениуса порядка 21, $T\lambda\langle b\rangle$ — группой Фробениуса порядка 56 и $|C_T(d)| = 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение леммы вытекает из вложимости любой конечной подгруппы группы $C_G(T)$ в конечную простую подгруппу группы G, изоморфную $Re(q)$, и из лемм 1.11, 1.20.

Из первого утверждения леммы следует, что любая периодическая подгруппа группы $N_G(T)$ вложима в конечную простую подгруппу группы G, изоморфную $Re(q)$. Теперь достаточно воспользоваться леммой 1.11 и тем, что G является группой Шункова. □

ЛЕММА 3.3. *Группа G содержит бесконечную локально конечную простую подгруппу R, изоморфную $Re(Q)$, где Q — локально конечное поле характеристики 3, не содержащее подполей порядка 9, причем для любой инволюции $a \in R$ периодическая часть группы $C_G(a)$ лежит в R.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть инволюция a подгруппы $C_G(a)$, L и поле Q — такие, как в формулировке леммы 3.1. Будучи локально конечным

полем, Q представляет собой объединение цепочки

$$Q_1 < Q_2 < Q_3 < \dots \tag{7}$$

вложенных друг в друга конечных подполей Q_i, а $L \simeq L_2(Q)$ совпадает с объединением цепочки вложенных друг в друга конечных простых подгрупп $L_i \simeq L_2(Q_i)$ (здесь $|Q_1| > 3$):

$$L_1 < L_2 < L_3 \dots . \tag{8}$$

Пусть R_i — конечная простая подгруппа группы G, изоморфная $Re(q)$ и содержащая $\langle a\rangle \times L_i$ (она существует по условиям теоремы), где $i = 1, 2, \dots$. Обозначим через T силовскую 2-подгруппу группы $\langle a\rangle \times L_1$, а через H — подгруппу $T\lambda(\langle b\rangle\lambda\langle d\rangle)$ (см. формулировку леммы 3.2). Очевидно, $T < (\langle a\rangle \times L_i)$ для любого i и, значит, $T < R_i$ для $i = 1, 2, \dots$. Из лемм 1.11 и 3.2 следует, что $H < R_i$, $i = 1, 2, \dots$. В силу теоремы 3 [9] имеет место $R_i \simeq Re(Q_i)$. Из леммы 1.11 следует равенство $R_i = \langle a, H, L_i\rangle$. Значит, подгруппы R_i вложены друг в друга и составляют цепочку

$$R_1 < R_2 < R_3 < \dots . \tag{9}$$

Объединение R членов цепочки (9) будет локально конечной простой группой, изоморфной $Re(Q)$ (лемма 1.13), причем периодическая часть группы $C_G(a)$ лежит в R, и в силу сопряженности инволюций в R (лемма 1.6) периодическая часть группы $C_G(t)$ содержится в R для любой инволюции $t \in R$. □

ЛЕММА 3.4. *Пусть R представляет собой такую подгруппу, как в формулировке леммы* 3.3. *Тогда R — периодическая часть группы G.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $G \neq N_G(R)$. Инволюции в R сопряжены, и из леммы 3.3 легко следует, что $2 \notin \pi(R \cap R^x)$ для любого $x \in G \setminus N_G(R)$. В силу леммы 1.19 в $G \setminus N_G(R)$ найдется инволюция t, и пусть a — инволюция из R. По условиям теоремы $\langle a, t\rangle < M < G$, где M является конечной простой группой, изоморфной $Re(q)$. Тогда $M \cap L$ — сильно вложенная подгруппа в M. Однако это противоречит теореме 4.24

[6], поэтому $G = N_G(R)$. Таким образом, лемма, а вместе с ней и теорема 1.3 доказаны. □

§ 4. Доказательство теоремы 1.4

На протяжении этого параграфа группа удовлетворяет всем условиям теоремы 1.4.

ЛЕММА 4.1. *Пусть P — силовская 2-подгруппа группы G. Тогда имеют место следующие утверждения*:

1) *P — бесконечная локально конечная группа периода 4, ступени нильпотентности 2 и $P' = Z(P) = \Phi(P) = \Omega_1(P)$*;

2) *для любой инволюции $a \in P$ группа $C_G(a)$ обладает периодической частью, которая совпадает с P, и все силовские 2-подгруппы группы G сопряжены*;

3) *любые две силовские 2-подгруппы группы G имеют тривиальное пересечение*;

4) *группа $N_G(P)$ обладает периодической частью B, и $B = P\lambda H$ представляет собой группу Фробениуса с ядром P и локально циклическим неинвариантным множителем H, действующим транзитивно на множестве инволюций группы P.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) По условиям теоремы любая конечная подгруппа S группы P содержится в некоторой конечной подгруппе L группы G, изоморфной $Sz(q)$. По лемме 1.10, P имеет период 4, и, по теореме Санова (лемма 1.16), P является локально конечной группой. Поскольку группа P локально конечна и конечные подгруппы группы P вложимы в силовские 2-подгруппы групп Судзуки, из леммы 1.10 получаем справедливость утверждения 1.

2) Если бы группа P была конечной, то по лемме 1.20 все 2-подгруппы группы G были бы конечными. По леммам 1.10 и 1.18 подгруппа $C_G(a)$, где a — инволюция группы G, содержит бесконечную локально конечную подгруппу. Конечные подгруппы группы $C_G(a)$ вложимы в конечные группы $Sz(q)$, поэтому все конечные подгруппы группы $C_G(a)$ бу-

дут 2-группами (лемма 1.10). Следовательно, P — бесконечная группа, и очевидно, что P является периодической частью группы $C_G(a)$ для любой инволюции $a \in P$. Отсюда и из леммы 1.20 вытекает сопряженность силовских 2-подгрупп группы G.

3) Если силовская 2-подгруппа S группы G имеет с P нетривиальное пересечение T, то в силу доказанного выше $P = S$. Таким образом, различные силовские 2-подгруппы группы G имеют тривиальное пересечение.

4) Очевидно, что $N_G(P)/P$ является $2'$-группой, поэтому $N_G(P)/P$ — группа Шункова. Группа P локально конечна, следовательно, любая конечная подгруппа группы $N_G(P)/P$ содержится в некоторой 2-локальной конечной подгруппе, которая в свою очередь вложима в подгруппу, изоморфную $Sz(q)$. В силу леммы 1.10 все конечные подгруппы в $N_G(P)/P$ является циклическими. По лемме 1.14 фактор-группа $N_G(P)/P$ обладает периодической частью $\overline{B}$, которая является локально циклической группой.

Пусть b — элемент простого порядка $p \neq 2$ из B (B — полный прообраз $\overline{B}$ в G). Тогда из доказанного выше следует, что подгруппа $P\lambda\langle b\rangle$ является нормальной в B и, очевидно, — группой Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle b\rangle$. По лемме Фраттини, $B = P\lambda N_B(\langle b\rangle)$ и $H = N_B(\langle b\rangle) \simeq B/P$ — локально циклическая группа.

Поскольку в силу доказанного выше все инволюции из B сопряжены в B (лемма 1.20 и утверждение 3 настоящей леммы), H действует транзитивно на множестве инволюций группы P. Кроме того, из утверждения 2 леммы следует что $P\lambda H$ — группа Фробениуса. □

ЛЕММА 4.2. *Подгруппа B (см. лемму 4.1) вложима в локально конечную простую подгруппу L группы G, изоморфную $Sz(Q)$, где Q — локально конечное поле характеристики 2, не содержащее подполей порядка 4.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 4.1, $B = P\lambda H$, где H является локально циклической групой, и в силу этого подгруппа H счетна и пред-

ставима в виде объединения цепочки

$$\langle h_1\rangle < \langle h_2\rangle < \langle h_3\rangle < \dots \tag{10}$$

конечных циклических подгрупп. Зафиксируем некоторую инволюцию a из P и примем $a_i = a^{h_i}$, где $i = 1, 2, \dots$. Выберем некоторый элемент b простого порядка $p \neq 2$ из $G \setminus B$ со свойством $B^a = b^{-1}$, существующий в силу лемм 1.19, 4.1. Поскольку G — группа Шункова и имеют место соотношения $a_i^a = a_i$, $b^a = b^{-1}$, все подгруппы $L_i = \langle a, b, a_i\rangle$ являются конечными.

В силу леммы 4.1 подгруппа $B_i = L_i \cap B$ является сильно вложенной в подгруппе L_i, причем из $a_i \in B_i$ вытекает, что 2-ранг подгруппы B_i не меньше 2. По условиям теоремы подгруппа L_i вложима в конечную подгруппу M_i группы G, изоморфную $Sz(Q_i)$, где Q_i — конечное поле характеристики 2 (без подполей порядка 4). Из описания максимальных подгрупп в группах $Sz(Q_i)$ (лемма 1.9), сильной вложенности подгруппы B_i в L_i, а также из теорем 4.23, 4.24 [6] заключаем, что $L_i = M_i \simeq Sz(Q_i)$, $i = 1, 2, \dots$.

Применяя лемму 4.1, получаем, что $B_{i+1} = B \cap L_{i+1}$ — подгруппа Бореля в группе L_{i+1}. Так как a и a_{i+1} сопряжены в B_{i+1} (лемма 1.10), a и a_{i+1} сопряжены в B_{i+1} только с помощью элемента из смежного класса Ph_{i+1} (лемма 4.1), заключаем, что подгруппа B_{i+1} содержит представителя смежного класса Ph_{i+1}. Нетрудно убедиться, что любой представитель из смежного класса Ph_{i+1}, возведенный в подходящую степень, является представителем смежного класса Ph_i. Поэтому подгруппа B_{i+1}, содержит представителя v_i смежного класса Ph_i. Тогда элемент $a_i = a^{h_i} = a^{v_i}$ содержится в подгруппе B_{i+1} и $L_i \leq L_{i+1}$. Таким образом, подгруппы L_i образуют цепочку

$$L_1 \leq L_2 \leq L_3 \leq \dots \tag{11}$$

вложенных друг в друга конечных подгрупп L_i, изоморфных группам Судзуки $Sz(Q_i)$. Объединение L членов этой цепочки будет локально конечной, простой группой, изоморфной группе Судзуки $Sz(Q)$ над локально

конечным полем характеристики 2, не содержащим подполей порядка 4 (лемма 1.13).

По построению группы L подгруппа $B \cap L$ содержит представителей всех смежных классов Ph_i, $i = 1,2,\ldots$, а отсюда $B \cap L$ содержит полную систему представителей множества смежных классов B/P. Теперь из леммы 4.1 следует включение $Z(P) \leq B \cap L$. Воспользовавшись описанием подгруппы Бореля в $Sz(Q)$ (лемма 1.9) и леммой 4.1, получаем, что $B \cap L$ содержит некоторую подгруппу, сопряженную с H. Без ограничения общности можно считать, что $H \leq L$.

Группа $HZ(P)/Z(P)$ действует сопряжениями транзитивно на множестве неединичных элементов группы $P/Z(P)$. Действительно, если $cZ(P)$, $dZ(P)$ — различные неединичные смежные классы из $P/Z(P)$, то по лемме 4.1 группа $K = \langle c,d\rangle$ конечна и по условиям теоремы $K < M < G$, где $M \simeq Sz(q)$. Из леммы 4.1 следует, что $S = M \cap P$ — силовская 2-подгруппа в M и $T = N_M(B)$. Так как по лемме 1.9 $T/Z(S)$ является группой Фробениуса, с ядром порядка q и неинвариантным множителем V порядка $q-1$, то V действует на $S/Z(S)$ транзитивно. Следовательно, $c^hZ(P) = dZ(P)$ для некоторого $h \in B \cap M$ и $HZ(P)/Z(P)$ действует на множестве неединичных элементов фактор-группы $P/Z(P)$ транзитивно. Очевидно, что в $P \cap L$ имеются элементы из $P \setminus Z(P)$ (лемма 4.1). Поскольку $HZ(P) < L$ и $HZ(P)/Z(P)$ действует на $P/Z(P)$ транзитивно, выполняется $P < L$. □

ЛЕММА 4.3. *Пусть L — группа, как в лемме* 4.2, *H — ее подгруппа Картана, a — произвольный неединичный элемент из H. Тогда $N_G(\langle a\rangle) = N_G(H)$ обладает периодической частью N и $N = N_L(H) = H\lambda\langle t\rangle$, где t — инволюция и $a^t = a^{-1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из лемм 1.9, 1.10 и 4.1 следует, что $N = N_L(H) = H\lambda\langle t\rangle$, $t^2 = 1$ и $h^t = h^{-1}$ для любого $h \in H$. По тем же леммам $N_L(\langle a\rangle) = N$. Пусть b — элемент конечного порядка из $N_G(\langle a\rangle)\setminus L$. Без ограничения общности можно считать, что $b^p \in N$, где p является простым числом. Если b — инволюция и t — инволюция из N, то $bt \notin L$ и $bt \in C_G(a)$, причем bt не является элементом четного порядка (лемма 4.1).

Таким образом, элемент b можно подобрать так, что $b^2 \neq 1$.

Все силовские 2-подгруппы группы L сопряжены (как централизаторы инволюций). Поэтому из леммы 4.1 следует важное для нас свойство группы L:

если 2-подгруппа S группы G имеет нетривиальное пересечение с L, то $S < L$. (*)

Из свойства (*), в частности, вытекает, что b является элементом нечетного порядка и $b^p \in H$. Так как G — группа Шункова и H — локально циклическая группа, то подгруппа $K = \langle a, b, t\rangle$ конечна, здесь t — инволюция из $N \setminus H$. По условиям теоремы $K < M < G$ и $M \simeq Sz(q)$. Так как t, $t^a \in M \cap L$, по свойству (*) группа L содержит по меньшей мере две различные силовские 2-подгруппы группы M. Тогда, по лемме 1.10, $M < L$ вопреки выбору элемента b. Это противоречие означает, что все элементы конечных порядков из $N_G(\langle a\rangle)$ содержатся в N" и N — периодическая часть в $N_G(\langle a\rangle) = N_G(H)$. □

ЛЕММА 4.4. *Пусть L — подгруппа, как в лемме* 4.2. *Тогда* $G = N_G(L)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что лемма неверна и $G \neq N_G(L)$. По лемме 1.19, $G \setminus N_G(L)$ содержит инволюции, и пусть v — одна из них. Пусть a — элемент простого порядка из подгруппы Картана H группы L. Поскольку группа G сопряженно бипримитивно конечна, подгруппа $K = \langle a, v\rangle$ конечна и, по условиям теоремы, $K < M < G$, где M — конечная группа, изоморфная группе $Sz(q)$ для подходящего q. Так как порядок элемента a нечетен, $T = N_L(\langle a\rangle)$ содержит инволюции (лемма 1.9). По лемме 4.3, $T < L$ и по свойству (*) в L содержатся по меньшей мере две различные силовские 2-подгруппы группы M. Тогда, по лемме 1.10, $M < L$, что противоречит выбору элемента v. Значит, $G = L$. Лемма, а вместе с ней и теорема 1.4 доказаны. □

§ 5. Доказательство теоремы 1.5

На протяжении этого параграфа группа удовлетворяет всем условиям теоремы 1.5.

ЛЕММА 5.1. *Пусть P — силовская 2-подгруппа группы G. Тогда имеют место следующие утверждения*:

1) *P — бесконечная локально конечная группа периода 4, ступени нильпотентности 2 и $P' = Z(P) = \Phi(P) = \Omega_1(P)$;*

2) *любые две силовские 2-подгруппы группы G имеют тривиальное пересечение;*

3) *если a является инволюцией из P, то $C_G(a)$ обладает периодической частью D и $D = P\lambda H_1$, где H_1 — локально циклическая группа, причем $H_1 \leq N_G(P)$ и $Z(P) \leq C_G(H_1)$;*

4) *все силовские 2-подгруппы группы G сопряжены;*

5) *группа $N_G(P)$ обладает периодической частью B и $B = P\lambda H$, где H — локально циклическая группа, $H = H_0 \times H_1$, где H_1 — подгруппа из утверждения 3 леммы, и $B_0 = P\lambda H_0$ — группа Фробениуса с ядром P и локально циклическим неинвариантным множителем H_0, действующим транзитивно на множестве инволюций группы P.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условиям теоремы любая конечная подгруппа S группы P содержится в некоторой конечной подгруппе L группы G, изоморфной $U_3(q)$, где $q = 2^n$. По лемме 1.12, P имеет период 4, и согласно теореме Санова (лемма 1.16) является локально конечной группой. Группа P локально конечна, и конечные подгруппы из P вложимы в силовские 2-подгруппы групп $U_3(2^n)$, поэтому ступень нильпотентности группы P равна 2, все инволюции из P содержатся в $Z(P)$ и порождают его, $P' = \Phi(P) = Z(P)$ (так как все эти перечисленные свойства справедливы для силовских 2-подгрупп $U_3(2^n)$, см. лемму 1.12).

Пусть S — другая силовская 2-подгруппа из G. Предположим, что $T = S \cap P \neq 1$. Очевидно, все доказанное выше для группы P справедливо и для группы S, в частности, S нильпотентна ступени 2. Используя нормализаторное условие в группах P и S, а также тот факт, что цепочка

последовательных нормализаторов в группе P через 2 шага достигает P, выберем группу S таким образом, чтобы для подгруппы $V = \langle N_P(T), N_S(T)\rangle$ имело место равенство $O_2(V) = T$. В фактор-группе V/T найдется конечная подгруппа $\overline{L}$, порожденная 2-элементами и не являющаяся 2-группой.

Полный прообраз L группы $\overline{L}$, по теореме Шмидта (см. [20]), представляет собой локально конечную группу, и, очевидно, в этой группе найдется конечная подгруппа M, которая порождается 2-элементами, не является 2-группой и в которой силовские 2-подгруппы имеют нетривиальные пересечения (например, $O_2(M) \neq 1$). По условиям теоремы, $M < U < G$, где $U \simeq U_3(2^n)$. Однако последнее противоречит строению групп $U_3(2^n)$ (лемма 1.12). Это противоречие означает, что $S \cap P = 1$, и утверждение 2 леммы доказано.

Докажем третье утверждение леммы. Пусть a — инволюция из P. По доказанному выше $a \in Z(P)$ и, значит, $P \leq C_G(a)$. Из утверждения 2 леммы следует, что P нормальна в $C_G(a)$. Поскольку группа P локально конечна и любая конечная подгруппа из $C_G(a)$ вложима в 2-локальную подгруппу из $U_3(2^n)$ для подходящего n, все конечные подгруппы из $C_G(a)/P = \overline{C}$ представляют собой циклические группы. Так как P является локально конечной 2-группой, а $\overline{C}$ — 2-группой, то фактор-группа $\overline{C}$ будет группой Шункова. Из леммы 1.14 теперь вытекает, что $\overline{C}$ обладает периодической частью $\overline{D}$, которая является локально циклической группой. Обозначим через D полный прообраз $\overline{D}$ в $C_G(a)$. Очевидно, D — периодическая часть в $C_G(a)$ и, по теореме Шмидта (см. [20]), D — локально конечная группа.

Снова используя вложимость конечных подгрупп из $C_G(a)$ в 2-локальные подгруппы $U_3(2^n)$ и строение 2-локальных подгрупп в $U_3(2^n)$, приходим к выводу, что $D/Z(P)$ — группа Фробениуса с ядром $P/Z(P)$ и локально циклическим множителем $\overline{H}_1$, а полный прообраз подгруппы H_1 является абелевой группой и имеет строение $H_1 \times Z(P)$, где H_1 — локально циклическая $2'$-группа. Из доказанного также следует, что группа P бесконечна, поскольку $C_G(a)$ содержит бесконечно много элементов конеч-

ного порядка согласно лемме 1.18. Первое и третье утверждения леммы полностью доказаны.

Четвертое утверждение леммы вытекает из леммы 1.20 и второго утверждения леммы.

Докажем пятое утверждение. Так же, как и в доказательстве третьего утверждения, легко показать, что $N_G(P)/P$ обладает периодической частью $\overline{B}$ и $\overline{B}$ является локально циклической $2'$-группой, причем $B/Z(P)$ — группа Фробениуса с локально циклической неинвариантным множителем $\overline{T}$ (B — полный прообраз $\overline{B}$ в $N_G(P)$). Пусть T — полный прообраз подгруппы $\overline{T}$ в B. Используя лемму 1.12, легко показать, что фактор-группа T/H_1 является группой Фробениуса с локально циклическим неинвариантным множителем $\overline{H}$. Полный прообраз H группы $\overline{H}$ будет, очевидно, локально циклической группой, причем по понятным соображениям $H = H_1 \times H_0$ и $P\lambda H_0$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем H_0 и ядром P. Из сопряженности всех инволюций в B вытекает транзитивность действия H_0 на $Z(P)$. Кроме того, H действует регулярно и неприводимо на $P/Z(P)$. □

ЛЕММА 5.2. *Подгруппа $Z(P)\lambda H_0$ (см. лемму 2.1) вложима в локально конечную простую подгруппу L группы G, изоморфную $U_3(Q)$, где Q — локально конечное поле характеристики 2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 5.1, H_0 — локально циклическая группа, а в силу этого подгруппа H_0 счетна и представима в виде объединения цепочки

$$\langle h_1\rangle < \langle h_2\rangle < \langle h_3\rangle < \dots \tag{12}$$

конечных циклических подгрупп. Зафиксируем некоторую инволюцию a из P и примем $a_i = a^{h_i}$, где $i = 1, 2, \dots$. Выберем некоторый элемент b простого порядка $p \neq 2$ из $G \setminus B$ со свойством $b^a = b^{-1}$, который существует в силу лемм 1.12 и 5.1. В силу соотношений $a_i^a = a_i$, $b^a = b^{-1}$ все подгруппы $L_i = \langle a, b, a_i\rangle$ конечны (G — группа Шункова).

Из леммы 5.1 легко следует, что подгруппа $B_i = L_i \cap B$ сильно вложена в подгруппе L_i, причем из a, $a_i \in B_i$ вытекает, что 2-ранг подгруппы

B_i не меньше 2. По условиям теоремы группа L_i вложима в конечную подгруппу M_i группы G, изоморфную $U_3(Q_i)$, где Q_i — конечное поле характеристики 2. Из описания максимальных подгрупп в группах $U_3(Q_i)$ (лемма 1.12), сильной вложенности подгруппы B_i в группу L_i, а также из теорем 4.23, 4.24 [6] заключаем, что $L_i \simeq U_3(q_i)$, $i = 1, 2, \ldots$.

Согласно лемме 5.1, $B_{i+1} = B \cap L_{i+1}$ представляет собой подгруппу Бореля в группе L_{i+1}. Поскольку a, a_{i+1} сопряжены в B_{i+1} (лемма 1.6) и a, a_{i+1} сопряжены в B только с помощью элемента из смежного класса Ph_{i+1} (лемма 5.1), то подгруппа B_{i+1} содержит представителя смежного класса Ph_{i+1}. Нетрудно убедиться, что любой представитель смежного класса Ph_{i+1}, возведенный в подходящую степень, является представителем смежного класса Ph_i. Поэтому подгруппа B_{i+1} содержит представителя v_i смежного класса Ph_i. Тогда элемент $a_i = a^{h_i} = a^{v_i}$ содержится в подгруппе B_{i+1} и $L_i \leq L_{i+1}$. Таким образом, подгруппы L_i образуют цепочку

$$L_1 \leq L_2 \leq L_3 \leq \ldots \tag{13}$$

вложенных друг в друга конечных подгрупп L_i, изоморфных группам $U_3(q_i)$. Объединение L членов этой цепочки будет локально конечной, простой группой, изоморфной группе $U_3(Q)$ над локально конечным полем характеристики 2 (лемма 1.13). По построению группы L подгруппа $B \cap L$ содержит представителей всех смежных классов Ph_i, $i = 1, 2, \ldots$, а следовательно, $B \cap L$ содержит полную систему представителей множества смежных классов PH_0/P. Теперь из леммы 5.1 следует включение $Z(P) \leq B \cap L$. Из описания подгруппы Бореля $U_3(Q)$ (лемма 1.12) и леммы 5.1 заключаем, что $B \cap L$ содержит некоторую подгруппу, сопряженную с H_0. Без ограничения общности можно считать, что $H_0 \leq L$. □

ЛЕММА 5.3. *Подгруппа L содержит подгруппу B.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как вытекает из лемм 1.12 и 5.1, $\pi(H_0) \cap \cap \pi(H_1) = \varnothing$. Однако порядки элементов из H_1 и H_0 связаны между собой. Действительно, пусть b — элемент порядка m из H_1 и a — произвольная инволюция из $Z(P)$. По лемме 5.1, $ab = ba$ и по условиям теоремы

$\langle a, b\rangle < M$, где $M \simeq U_3(q)$, $q = 2^n$. В силу лемм 1.12 и 5.1, $M \cap B$ является подгруппой Бореля группы M, в которой подгруппой Картана будет $T = T_0 \times T_1$, причем подгруппа T_0 сопряжена в B с подгруппой группы H_0, а T_1 — с подгруппой группы H_1. Действительно, элементы из H_1 характеризуются свойством: они и только они являются $2'$-элементами, перестановочными с некоторыми инволюциями группы G (и группы M). В частности, $b \in T_1$, порядок которой $|T_1| = \frac{q+1}{d}$, а $|T_0| = q - 1$ (лемма 1.12). Кроме того, для любого элемента $b \in H_1$ порядка m в H_0 существует циклическая подгруппа такого порядка $2^n - 1$, что m делит $2^n + 1$.

Пусть (локально) конечное поле Q характеристики p содержит мультипликативную подгруппу S порядка $p^n - 1$. Тогда $X = S \cup \{0\}$ — подполе в Q. Действительно, поскольку мультипликативная группа поля G локально циклична, множество всех решений уравнения $x^{p^n} - x = 0$ из Q совпадает с X и, очевидно, является подполем в Q.

Пусть b — произвольный элемент порядка m из H_1. Как показано выше, в H_0 найдется подгруппа S такого порядка $q - 1 = 2^n - 1$, что m делит $q + 1$. По лемме 5.2, H_0 содержится в подгруппе Картана $T < B \cap L$, $L \simeq U_3(Q)$. Тогда поле Q содержит подполе из q элементов, а группа L — подгруппу M, изоморфную $U_3(q)$ и пересекающуюся с B по своей подгруппе Бореля. Значит, $B \cap L$ содержит некоторый элемент порядка m. Поскольку b — произвольный элемент из H_1, группа H_1 локально циклична и имеет место равенство $\pi(H_1) \cap \pi(H_0) = \varnothing$ (леммы 1.12, 5.1), то подгруппа Бореля $B \cap L$ группы L содержит полный набор представителей смежных классов PH_1/P. Кроме того, $H_0 < B \cap L$ и, значит, $B \cap L$ содержит полный набор представителей смежных классов B/P.

Покажем, что H действует на $V = P/Z(P)$ неприводимо. Предположим противное, и пусть W — собственная H-допустимая подгруппа группы V, а K — конечная подгруппа группы B достаточно большого порядка, накрывающая нетривиальные подгруппы групп W, V/W и H. Тогда $K < M$, где $M \simeq U_3(q)$. Таким образом, мы свели задачу к конечной группе M, так как, по лемме 5.1, $B \cap M$ — подгруппа Бореля группы M, и поэтому можно считать, что B является подгруппой Бореля группы

M. По теореме Машке, $V = W \times Z$ и Z — H-допустима. Из леммы 1.12 заключаем, что $\frac{q^2+2}{4} \leqslant |W|$, $\frac{q^2+2}{3} \leqslant |Z|$ и $\frac{q^4+4q^2+4}{9} \leqslant |V| = q^2$. Учитывая, что q — сколь угодно большое число, получаем противоречие. Значит, H действует на $P/Z(P)$ неприводимо.

По доказанному выше подгруппа $B \cap L$ накрывает фактор-группу B/P. В силу неприводимости действия B/P на $P/Z(P)$, включения $Z(P) < B \cap L$ и $L \cap (P \setminus Z(P)) \neq \varnothing$ заключаем, что $P < L$. Из последнего со всей очевидностью вытекает, что $B < L$. □

ЛЕММА 5.4. *Имеет место равенство* $G = N_G(L)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть a — произвольный неединичный элемент из H_0. Покажем, что $N_G(\langle a\rangle)$ обладает периодической частью N и $N = N_G(H) = N_L(H) = H\lambda\langle t\rangle$, где t — инволюция и $a^t = a^{-1}$. Из лемм 1.12, 5.1, 5.2 и 5.3 следует, что $N = N_L(H) = N_L(H_0) = H\lambda\langle t\rangle$, $t^2 = 1$ и $h^t = h^{-1}$ для любого $h \in H$. По тем же леммам $N_L(\langle a\rangle) = N$. Пусть $b \in N_G(\langle a\rangle) \setminus L$. Без ограничения общности можно считать, что $b^r \in N$, где r — простое число. Если $r = 2$ и t — инволюция из N, то $bt \notin L$ и $bt \in C_G(a)$, причем bt не является элементом четного порядка (лемма 5.1). Следовательно, элемент b можно подобрать таким образом, что $r \neq 2$.

Все силовские 2-подгруппы грууппы L сопряжены. Поэтому из лемм 5.1, 5.2 и 5.3 следует важное для нас свойство группы L:

если 2-подгруппа S группы G имеет нетривиальное пересечение с L, то $S < L$. (**)

Так как G является группой Шункова, а H — локально циклической группой, то подгруппа $K = \langle a, b, t\rangle$ конечна, здесь t — инволюция из $N \setminus H$. По условиям теоремы $K < M < G$ и $M \simeq U_3(q)$. Из $t, t^a \in M \cap L$ и свойства (**) заключаем, что L содержит по меньшей мере две различные силовские 2-подгруппы группы M. Тогда $M < L$, вопреки выбору элемента b. Полученное противоречие означает, что $N_G(\langle a\rangle)$ обладает периодической частью, которая совпадает с N.

Предположим, что лемма неверна и $G \neq N_G(L)$. По лемме 1.16, $G \setminus N_G(L)$ содержит инволюции, и пусть v — одна из них. Пусть a — произвольная инволюция из $Z(P)$. По условиям теоремы $D = \langle a, v\rangle < K$,

где $K \simeq U_3(2^n)$. В силу свойства (**) и леммы 1.12 заключаем, что $K \cap L = B \cap K$ и $D \cap L = \langle a \rangle$. В частности, можно считать, что $b = av$ — элемент простого порядка $r \neq 2$. Повторив все рассуждения леммы 5.2, проделанные при построении подгруппы L, построим бесконечную локально конечную подгруппу $M \simeq U_3(Q)$ с теми же свойствами. Очевидно, для M справедливы и лемма 5.3, и доказанное выше. В частности, $N_G(H_0)$ обладает периодической частью N, $N \leq M \cap L$ и, по свойству (**), L содержит бесконечное множество силовских 2-подгрупп группы M. Тогда $L = M$ (лемма 1.12) и $b \in L$, что противоречит выбору элемента v. Значит, $G = N_G(L)$, и лемма, а вместе с ней и теорема 1.5 доказаны. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. К. Шлёпкин*, Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы, Третья межд. конф. по алгебре, 23—28 августа 1993, Сб. тез., Красноярск, 1993, 369.
2. *А. К. Шлёпкин*, О сопряженно бипримитивно конечных группах, насыщенных некоторыми конечными простыми неабелевыми группами, Тез. докл. межд. конф. по алгебре, Львов, 1996, 35.
3. *А. К. Шлёпкин*, О сопряженно бипримитивно конечных группах, насыщенных конечными простыми неабелевыми группами, Алгебра и логика, 37, N 2 (1998), 224—245.
4. *А. К. Шлёпкин*, О сопряженно бипримитивно конечных группах, насыщенных конечными простыми группами $U_3(2^n)$, Алгебра и логика, 37, N 5 (1998), 606—615.
5. *А. И. Созутов*, О группах Шункова без элементарных абелевых подгрупп ранга 2, Межд. алгебр. конф. памяти А. К. Фаддеева, Сб. тез., СПб., 1997, 286—287.
6. *Д. Горенстейн*, Конечные простые группы, М., Мир, 1985.
7. *В. М. Бусаркин, Ю. М. Горчаков*, Конечные расщепляемые группы, М., Наука, 1968.
8. *M. Suzuki*, A new type of simple groups of finite order, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 46 (1960), 868—870.

9. *Я. Н. Нужин*, О строении групп лиева типа ранга 1, Матем. заметки, **36**, 2 (1984), 149—150.

10. *R. W. Hartley*, Determination of the ternary collineation groups whose coefficients lie in $GF(2^n)$, Ann. Math., 27 (1926), 140—158.

11. *S. Thomas*, The classification of the simple periodic linear groups, Arch. Math., **41** (1983), 103—116.

12. *А. В. Боровик*, Вложения конечных групп Шевалле в периодические линейные группы, Сиб. матем. ж., **24**, N 6 (1983), 26—35.

13. *В. В. Беляев*, Локально конечные группы Шевалле, в сб. "Исследования по теории групп", Свердловск, УНЦ АН СССР, 1984, 39—50.

14. *B. Hartley, G. Shute*, Monomorphisms and direct limits of finite groups of Lie type, Q. J. Math., Oxf. II Ser., **35** N 2 (1984), 49—71.

15. *А. И. Созутов*, О строении неинвариантного множителя в некоторых группах Фробениуса, Сиб. матем. ж., **35**, N 4 (1994), 893—901.

16. *В. П. Шунков*, О периодических группах с почти регулярной инволюцией, Алгебра и логика, **11**, N 4 (1972), 470—494.

17. *И. Н. Санов*, Решение проблемы Бернсайда для показателя 4, Учен. записки ЛГУ, Сер. матем., **10** (1940), 166—170.

18. *А. П. Дицман*, О центре p-групп, в сб. "Труды семинара по теории групп", М., 1938, 30—34.

19. *А. К. Шлёпкин*, О сопряженно бипримитивно конечных группах с условием примарной минимальности, Алгебра и логика, **22**, N 2 (1983), 226—231.

20. *М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков*, Основы теории групп, М., Наука, 1977.

Адрес автора:

ШЛЁПКИН Анатолий Константинович,
РОССИЯ,
660074, Красноярск,
ул. Киренского, д. 11б, кв. 116 (а/я 16844).
тел. (3912) 49-71-30

Поступило 24 июня 1997 г.