Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

S. M. Ermakov, A. A. Zhiglyavskii, A generalization of the "maximal cross section method" for distribution sampling, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 1978, Volume 18, Number 3, 757–761

https://www.mathnet.ru/eng/zvmmf5828

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.83
June 16, 2025, 21:37:54

УДК 518 : 519.2

ОБОБЩЕНИЕ «МЕТОДА МАКСИМАЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ» ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

С. М. ЕРМАКОВ, А. А. ЖИГЛЯВСКИЙ

(Ленинград)

Показано, что случайный вектор, распределение которого удовлетворяет некоторому интегральному уравнению, может быть реализован путем моделирования однородной цепи Маркова. Приводятся примеры, подтверждающие общность и эффективность предлагаемого метода моделирования.

Цель данной заметки – обратить внимание на простой, но общий метод, который может упростить моделирование весьма сложных распределений. Последние могут задаваться явно аналитическими выражениями или неявно, как решения линейных интегральных или дифференциальных уравнений.

Метод является прямым обобщением «метода максимального сечения», который широко используется в задачах теории переноса излучения и может быть полезен в задачах массового обслуживания при моделировании пуассоновского потока заявок с переменной во времени интенсивностью. Предлагаемое обобщение основано на известной связи между интегральными уравнениями и процессами Маркова с дискретным временем (например, [1]). Его формулировка потребует, однако, некоторого видоизменения известных результатов, которые составляют содержание следующей далее теоремы.

Пусть D – область в R^n, $P_0(dx)$ – распределение вероятностей на D, $P(y, dx)$ – мера на D при фиксированном $y \in D$, для которой

$$\int_D P(y, dx) = 1 - g(y), \qquad 0 < g < 1$$

(все соотношения здесь и далее выполняются почти всюду по мерам P_0 и $P(y, \cdot)$ при любом $y \in D$).

Определим

$$K(dx, y) = \frac{g(x)}{g(y)} P(y, dx), \qquad \Psi(dx) = g(x) P_0(dx). \tag{1}$$

Теорема. *Если однородная цепь Маркова с начальным распределением $P_0(dx)$ и переходной вероятностью $P(y, dx)$ останавливается почти наверное за конечное число шагов, $\zeta_0, \ldots, \zeta_{j_0}$ – случайные векторы, связанные в эту цепь (j_0 – номер шага, на котором произошел обрыв), то минимальное положительное решение интегрального уравнения*

$$F(dx) = \int_D K(dx, y) F(dy) + \Psi(dx) \tag{2}$$

является распределением случайного вектора ζ_{j_0}.

Эта теорема позволяет моделировать распределения, являющиеся решениями интегрального уравнения (2). Алгоритм моделирования состоит в следующем.

Пусть ζ_0 – реализация случайного вектора, распределение которого $P_0(d\zeta_0)$, ζ_i, $i=1, 2, \ldots,$ – реализация случайного вектора с распределением $P(\zeta_{i-1}, d\zeta_i)/[1-g(\zeta_{i-1})]$. На каждом шаге проверяется выполнение неравенства $g(\zeta_j) \geqslant \alpha_j$, где α_j, $j=0, 1, \ldots,$ – независимые реализации равномерно распределенной в $[0, 1]$ случайной величины. Положим $j_0 = \min\{j : g(\zeta_i) \geqslant \alpha_j\}$, тогда ζ_{j_0} – реализация случайного вектора, распределение которого $F(dx)$.

Доказательство теоремы. Пусть A – любое измеримое подмножество множества D. Тогда имеет место

$$P\{\zeta_{j_0}\in A\}=\sum_{k=0}^{\infty}P\{\alpha_0>g(\zeta_0),\ldots,\alpha_{k-1}>g(\zeta_{k-1}),\alpha_k\leqslant g(\zeta_k),\zeta_k\in A\}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{D^{k+1}}\int\limits_{g(\zeta_0)}^{1}d\alpha_0\ldots\int\limits_{g(\zeta_{k-1})}^{1}d\alpha_{k-1}\int\limits_{0}^{g(\zeta_k)}d\alpha_k P_0(d\zeta_0)\frac{P(\zeta_0,d\zeta_1)}{1-g(\zeta_0)}\ldots\frac{P(\zeta_{k-1},d\zeta_k)}{1-g(\zeta_{k-1})}1_A(\zeta_k)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{D^{k+1}}P_0(d\zeta_0)P(\zeta_0,d\zeta_1)\ldots P(\zeta_{k-1},d\zeta_k)g(\zeta_k)1_A(\zeta_k)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{D^{k+1}}\Psi(d\zeta_0)K(d\zeta_1,\zeta_0)\ldots K(d\zeta_k,\zeta_{k-1})1_A(\zeta_k)=\int\limits_{D}1_A(x)F(dx),$$

так как

$$F(dx)=\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{D^k}\Psi(d\zeta_0)K(d\zeta_1,\zeta_0)\ldots K(dx,\zeta_{k-1}). \tag{3}$$

Следовательно,

$$P\{\zeta_{j_0}\in A\}=F(A). \tag{4}$$

Из (4) получаем, что $F(D)=1$, так как процесс почти наверное останавливается за конечное число шагов. Из (3) видно, что F – мера, следовательно, F – распределение вероятностей, и из (4) следует, что ζ_{j_0} – реализация случайного вектора с распределением $F(dx)$.

Замечание 1. Теорему можно обобщить на случай, когда моделируемое распределение является решением системы интегральных уравнений. Обозначения и алгоритм моделирования в этом случае аналогичны изложенным в [1], стр. 258.

Замечание 2. Некоторые из известных методов моделирования являются частными случаями описанного, например метод «максимального сечения» с постоянной (пример 3) и переменной (пример 4) мажорантой (см. [2], стр. 87 и 95) и обобщенный метод Неймана (см [1], стр. 55), если положить $P(y,dx)=[1-g(y)]P_0(dx)$.

Пример 1. $D=R^n$, $P(y,dx)=[1-g(y)]p_1(x-y)\mu_n(dy)$, μ_n — мера Лебега, p_1 – плотность.

Применяя к обеим частям уравнения (2) преобразование Фурье или Лапласа, нетрудно показать, что если $f=\lambda f_0/[1-(1-\lambda)f_1]$, где $0<\lambda<1$, f, f_0, f_1 – характеристические функции или преобразования Лапласа распределений $F(dx)$, $P_0(dx)$, $P_1(dx)=p_1(x)\mu_n(dx)$, то распределение $F(dx)$ моделируется описанным методом с $g(x)=\lambda$. Например, если $D=R^1$, $P_0(dx)=e^{-x}dx$, $x\geqslant 0$, $p_1(x)=xe^{-x}$, $x\geqslant 0$, то $F(dx)=\lambda e^{-x}\operatorname{ch}[(1-\lambda)^{1/2}]dx$, $x\geqslant 0$. Впрочем, в этом конкретном случае для моделирования распределения $F(dx)$ существует и более простой метод (см. [2], стр. 25).

Далее предполагается, что $D=[a,b]$, $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$, $F(dx)=\varphi(x)dx$, $P(y,dx)=p(y,x)dx$, $P_0(dx)=p_0(x)dx$.

Исходя из известной связи между краевыми задачами для обыкновенных дифференциальных уравнений и интегральными уравнениями (например, [3]), теорему можно применять и в том случае, когда плотность распределения является решением некоторой краевой задачи.

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$Lu(x)=h(x),\quad V_k(u)=\gamma_k,\quad k=1,2,\ldots,m, \tag{5}$$

где

$$Lu(x)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\,u^{(k)}x,$$

$f_k(x)$ – непрерывные на $[a, b]$ функции,

$$V_k(u)=\sum_{i=0}^{m-1}[\alpha_k{}^i u^i(a)+\beta_k{}^i u^{(i)}(b)].$$

Предположим, что при решении этой краевой задачи можно построить функцию Грина $G(x, y)$ (см. [3]), т. е.

$$u(x)=\int_a^b G(x, y)\,h(y)\,dy.$$

Если $G(x, y)$ не меняет знак, то справедливо следующее

Следствие 1. Если функция $r(x)=\varphi(x)/g(x)$, $0<g(x)<1$, является единственным решением краевой задачи

$$k(x)Lr(x)-[1-g(x)]\,r(x)=p(x), \qquad V_k(r)=\gamma_k, \qquad k=1, 2, \ldots, m,$$

где

$$k(x)=\int_a^b G(y, x)\,dy,$$

$G(x, y)$ – функция Грина для (5), $p(x)$ – плотность распределения на $[a, b]$, то распределение с плотностью $\varphi(x)$ моделируется методом, описанным в теореме, с

$$p_0(x)=\int_a^b \frac{G(x, y)}{k(y)}\,p(y)\,dy, \qquad p(y, x)=\frac{G(x, y)}{k(y)}\,[1-g(y)].$$

Пример 2. $a=0$, $b=1$, (5) имеет вид $u'(x)=h(x)$, $u(0)=0$. В этом случае $G(x, y)=1_{[0, x]}(y)$, $k(x)=1-x$,

$$\varphi(x)=\frac{g(x)}{1-x}\exp\left[-\int_0^x \frac{g(t)}{1-t}\,dt\right]\int_0^x p(z)\exp\left[\int_0^z \frac{g(t)}{1-t}\,dt\right]dz,$$

Если $g(x)=\lambda$, $0<\lambda<1$, то

$$\varphi(x)=\frac{\lambda}{(1-x)^{1-\lambda}}\int_0^x \frac{p(z)}{(1-z)^{\lambda}}\,dz.$$

Пример 3. $a=0$, $b=+\infty$, $\int_0^\infty g(x)\,dx=+\infty$, $A>0$, (5) имеет вид $u'(x)+Au(x)=$ $=h(x)$, $u(0)=0$. В этом случае

$$G(x, y)=1_{[0,x]}(y)\,e^{-A(x-y)}, \qquad k(x)=\frac{1}{A}, \qquad q(x)=Ag(x),$$

$$\varphi(x)=q(x)\exp\left[-\int_0^x q(t)\,dt\right]\int_0^x p(z)\exp\left[\int_0^z q(t)\,dt\right]dz.$$

Если $p(x)=\delta(x)$, т. е. $p(x)$ сосредоточено в 0, то получаем метод «максимального сечения» с постоянной мажорантой A. Если

$$p(x)=q(x)\exp\left[-\int_0^x q(t)\,dt\right],$$

то

$$\varphi(x)=q(x)\int_0^x q(t)\,dt\exp\left[-\int_0^x q(t)\,dt\right].$$

Например,

$$\varphi(x)=\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}\quad\text{при}\quad g(x)=\frac{1}{1+x},\quad A=1.$$

Далее предположим, что

$$p(y,x)=1_{[a,x]}(y)\,p_0(x)\,(1-g(y))\left[\int_y^b p_0(z)\,dz\right]^{-1} \tag{6}$$

и

$$p_0(x)=h(x)\exp\left[-\int_a^x h(y)\,dy\right], \tag{7}$$

где

$$h(x)>0,\qquad \int_a^b h(x)\,dx=+\infty \tag{8}$$

и такая, что p_0 легко моделируется по формуле обращения (см. [1], стр. 50). В этом случае нетрудно доказать

Следствие 2. Если для произвольной плотности $\varphi>0$ выполнено

$$\frac{\varphi(x)}{1-\Phi(x)}<h(x), \tag{9}$$

где

$$\Phi(x)=\int_a^x \varphi(t)\,dt,$$

то распределение с этой плотностью можно моделировать описанным в теореме методом с

$$g(x)=\frac{\varphi(x)}{[1-\Phi(x)]\,h(x)}$$

и с $p_0(x)$, $p(y,x)$, определяемыми по (6) и (7).

Пример 4. $a=0$, $b=+\infty$, $f(x)>0$, $\int_0^\infty f(x)\,dx=+\infty$. Функция

$$\varphi(x)=f(x)\exp\left[-\int_0^x f(y)\,dy\right]$$

и плохо моделируется по формуле обращения. Учитывая, что $\varphi(x)/[1-\Phi(x)]=f(x)$ и выполнено (9), получаем метод «максимального сечения» с переменной мажорантой (см. [2], стр. 95).

Теперь рассмотрим

$$p(y, x)=1_{[a,y]}(x)\,p_0(x)\,[1-g(y)]\left[\int_a^y p_0(z)\,dz\right]^{-1},$$

(10)

$$p_0(x)=h(x)\exp\left[-\int_x^b h(y)\,dy\right],$$

где выполняется (8), p_0 легко моделируется по формуле обращения.

Следствие 3. Если для произвольной плотности $\varphi>0$ выполнено $\varphi(x)/\Phi(x)<h(x)$, то распределение с этой плотностью можно моделировать описанным в теореме методом с $g(x)=\varphi(x)/[\Phi(x)h(x)]$ и $p_0(x)$, $p(y, x)$, определяемыми по (10).

Пример 5. $a=0$, $b=1$, $p_0(x)=px^{p-1}$, $p>1$, $q>1$,

$$p(y, x)=1_{[0,y]}(x)\,px^{p-1}[1-g(y)]\,y^{-p},$$

$$g(x)=x^p(1-x)^{q-1}\left[p\int_0^x y^{p-1}(1-y)^{q-1}\,dy\right]^{-1}.$$

В результате моделирования определенной таким образом цепи Маркова получим B-распределение с плотностью

$$\varphi(x)=\frac{1}{\mathrm{B}(p, q)}\,x^{p-1}(1-x)^{q-1}.$$

Заметим, наконец, что если задано собственное распределение вероятностей $F(dx)$, для которого имеет место (3), то из (4) при $A=D$ вытекает, что соответствующая цепь Маркова с вероятностью 1 останавливается за конечное число шагов (см. [1], стр. 275). Кроме того, в примерах 2–5 (в примере 1 рассматриваемый вопрос тривиален) интегральное уравнение (2) – уравнение Вольтерра II рода, из чего ясно, что норма соответствующего оператора перехода за N шагов при достаточно большом N меньше 1 и, таким образом, среднее число шагов конечно.

Поступила в редакцию 18.01.1977
Переработанный вариант 25.04.1977

Цитированная литература

1. *С. М. Ермаков.* Метод Монте-Карло и смежные вопросы. Изд. 2-е. М., «Наука», 1975.
2. *Г. А. Михайлов.* Некоторые вопросы теории методов Монте-Карло. Новосибирск, «Наука», 1974.
3. *Э. Камке.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., «Наука», 1971.