В. Е. Корепин, Одевающие уравнения для корреляционных функций, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1985, том 145, 134–139

В.Е.Корепин

ОДЕВАЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ

В настоящей работе обсуждается вычисление корреляционных функций в двумерных вполне интегрируемых моделях квантовой теории поля и статистической физики. Используется подход, развитый в работах [1,2], где были вычислены корреляционные функции одномерного Бозе-газа. Отличительной чертой Бозе-газа является отсутствие связанных состояний. Для других интегрируемых моделей это не так. Например, в XXZ модели Гейзенберга при конечных температурах вакуум заполняется связанными состояниями [3]. Аналогичное явление происходит в нелинейной σ- модели [4] и в модели синус-Гордон при большой константе связи [5]. При вычислении корреляционных функций важнейшую роль играют одевающие уравнения, которые определяют асимптотику коррелятора на больших расстояниях [6]. В настоящей работе выведены одевающие уравнения для корреляционных функций в случае, когда вакуум заполнен связанными состояниями. Квантовый метод обратной задачи [7], позволил существенно продвинуться в исследовании точнорешаемых двумерных моделей. В работе [8] была дана полная классификация всех матриц монодромии сплетающихся R матрицей XXZ модели Гейзенберга. Было доказано, что они параметризуются произвольной функцией $r(\lambda)$. Для XXZ модели Гейзенберга эта функция равна

$$i \ln r(\lambda) = M p(\lambda) \; ; \qquad p(\lambda) = i \ln \frac{sh(\lambda - i\eta)}{sh(\lambda + i\eta)} . \tag{1}$$

Система трансцендентных уравнений (с.т.у), возникающая при диагонализации следа матрицы монодромии имеет вид

$$\varphi_j = 0 \,(mod\; 2\pi) \quad j = 1, \ldots, N . \tag{2}$$

Здесь φ_j это следующие величины:

$$\varphi_j = i \ln r(\lambda_j) + \sum_{n=1}^{N} \Phi(\lambda_j - \lambda_n) ; \quad j = 1, \ldots, N \tag{3}$$

$$\Phi(\lambda) = i \ln \{ sh(\lambda + 2i\eta)/sh(\lambda - 2i\eta) \} . \tag{4}$$

Здесь λ_j это быстрота частицы, а η - константа связи, N -

- полное число частиц. Квадрат нормы собственной функции гамильтониана пропорционален детерминанту матрицы, получающейся при линеаризации системы трансцендентных уравнений в окрестности их решения [9] :

$$\det\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial\lambda_i}\right) = \det\varphi' \quad . \tag{5}$$

Здесь $(\varphi')_{ji} = \partial\varphi_i/\partial\lambda_j$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial\lambda_j} = \delta_j^i\left(Z(\lambda_j) + \sum_{n=1}^{N} K(\lambda_j,\lambda_n)\right) - K(\lambda_i,\lambda_j) \tag{6}$$

$$Z(\lambda_j) = i\,\partial\ln r(\lambda_j)/\partial\lambda_j \tag{7}$$

$$K(\lambda_j\lambda_n) = \frac{\partial}{\partial\lambda_j}\Phi(\lambda_j-\lambda_n) = \frac{\sin 4\eta}{sh(\lambda_j-\lambda_n+2i\eta)sh(\lambda_j-\lambda_n-2i\eta)} . \tag{8}$$

Корреляционные функции в рамках метода, разработанного в [1,2], вычисляются следующим образом. Сначала следует вычислить коррелятор около псевдовакуума (ферромагнитного состояния), а затем применить одевающее преобразование. При этом "голые" плоские волны заменяются на одетые. Величина E описывает вакуумную поляризацию плоской волны. Она определяется следующим образом [2]:

$$E = \frac{1}{\det\limits_N \varphi'} \sum_{\{\lambda\}=\{\lambda^x\}\cup\{\lambda^y\}} \left\{\prod_{j=1}^{n_x} S(\lambda_j^x)\right\} \det\nolimits_{n_x}(\varphi_x')\det\nolimits_{n_y}(\varphi_y') . \tag{9}$$

Здесь суммирование ведется по разбиению набора $\{\lambda_j\}$ (решение с.т.у (2)) на два непересекающихся поднабора $\{\lambda^x\}$ и $\{\lambda^y\}$.

$$card\{\lambda^x\} = n_x \; ; \quad card\{\lambda^y\} = n_y \; ; \quad n_x + n_y = N \; .$$

Матрица φ_x' имеет размерность $n_x \times n_x$:

$$(\varphi_x')_{jn} = \delta_n^j\left\{X(\lambda_j^x) + \sum_{i=1}^{n_x} K(\lambda_j^x,\lambda_i^x)\right\} - K(\lambda_j^x,\lambda_n^x) \tag{10}$$

а матрица (φ_y') размерность $n_y \times n_y$

$$(\varphi_y')_{jn} = \delta_n^j\left\{y(\lambda_i^y) + \sum_{i=1}^{n_y} K(\lambda_j^y\lambda_i^y)\right\} - K(\lambda_j^y,\lambda_n^y) . \tag{11}$$

Здесь $x(\lambda)$ и $y(\lambda)$ две произвольных функции, связанных соотношением:

$$x(\lambda) + y(\lambda) = z(\lambda) \ . \tag{12}$$

В формуле (9) $S(\lambda)$ затравочная (около ферромагнитного состояния) матрица рассеяния на внешнем источнике. Ее явный вид не очень важен, важно, что $|S(\lambda)| = 1$. Более точно

$$S(\lambda) = \prod_j \frac{sh(\lambda - \mu_j^- + 2i\eta)}{sh(\lambda - \mu_j^- - 2i\eta)} \frac{sh(\lambda - \mu_j^+ - 2i\eta)}{sh(\lambda - \mu_j^+ + 2i\eta)} \ .$$

Перейдем теперь к связанным состояниям. В связанном состоянии быстроты частиц располагаются следующим образом:

$$\lambda^a = \Lambda + i\eta(2a - K - 1) , \qquad a = 1, \dots K \ . \tag{13}$$

Связанное состояние иногда называют струной. Число частиц в струне будем обозначать буквами K , ℓ или t . Величину Λ называют быстротой струны, $\mathrm{Im}\,\Lambda$ может принимать два значения 0 или $\pi/2$, это зависит от числа частиц в струне [3] . Набор разрешенных значений K в (13) зависит от константы связи [3] . Полное число разрешенных значений для K будем обозначать буквой L . Для того, чтобы получить с.т.у на центры струн, складывают уравнения (2) для всех частиц, принадлежащих данной струне: окончательно с.т.у для быстрот струн Λ имеет вид:

$$\varphi_j^K = 0 \, (\mathrm{mod}\, 2\pi) \ . \tag{14}$$

Здесь

$$\varphi_j^K = i \ln r_K(\Lambda_j^K) + \sum_{\ell=1}^{L} \sum_i \Phi_{K,\ell}(\Lambda_j^K - \Lambda_i^\ell) - \Phi_{K,K}(0) \tag{15}$$

$$i \ln r_K(\Lambda) = \sum_{a=1}^{K} i \ln r(\lambda^a) \tag{16}$$

$$\Phi_{K,\ell}(\Lambda) = \sum_{a=1}^{K} \sum_{b=1}^{\ell} \Phi(\lambda^a - \lambda^b) \ . \tag{17}$$

В этих формулах у φ и Λ верхний индекс означает число частиц в струне, а нижний различает разные струны одинаковой длины. Число струн данной длины в системе обозначим через N_K . При линеаризации системы (14) в окрестности решения возникает матрица:

$$\frac{\partial \varphi_j^K}{\partial \Lambda_i^\ell} = \delta_\ell^K \delta_i^j \left\{ Z_K(\Lambda_j^K) + \sum_{t=1}^{L} \sum_n K_{Kt}(\Lambda_j^K, \Lambda_n^t) \right\} - K_{K\ell}(\Lambda_j^K, \Lambda_i^\ell) \ . \tag{18}$$

Здесь

$$K_{k\ell}(\Lambda_j,\Lambda_i) = \sum_{a=1}^{k}\sum_{b=1}^{\ell} K(\lambda_j^a,\lambda_i^b) \tag{19}$$

$$Z_k(\Lambda) = \sum_{a=1}^{k} z(\lambda^a) \,. \tag{20}$$

Определитель матрицы (18) назовем струнным определителем (об этом напоминает нижний индекс s):

$$\det(\partial\varphi_j^k/\partial\Lambda_i^\ell) = \det(\varphi_s') \,. \tag{21}$$

Если в выражении для детерминанта (5) быстроты устремить к тем значениям, которые они принимают в связанном состоянии (13), то детерминант устремится к бесконечности (т.к. $K(\lambda^{a+1},\lambda^a)\to\infty$ см. (8)). В работе [10] доказано, что в этом пределе определитель (5) равен произведению соответствующего струнного определителя (21), на произведение всех сингулярных $K(\lambda^{a+1},\lambda^a)$, см (13):

$$\det\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial\lambda_i}\right) \longrightarrow \left[\det\left(\frac{\partial\varphi_j^k}{\partial\Lambda_i^\ell}\right)\right]\left\{\prod_{k,j}\prod_{a=1}^{k-1} K((\lambda_j^k)^{a+1},(\lambda_j^k)^a)\right\} \,. \tag{22}$$

Благодаря этому свойству оказывается, что в выражении для E (9) все частицы, принадлежащие к одной струне, должны попасть одновременно либо в набор $\{\lambda^x\}$, либо в набор $\{\lambda^y\}$. Это позволяет записать величину как сумму по разбиениям набора быстрот струн $\{\Lambda_j^k\}$

$$E = \sum_{\{\Lambda\}=\{\Lambda^x\}\cup\{\Lambda^y\}} \left\{\prod_{\Lambda^x} S(\Lambda^x)\right\} \frac{\det_{n_x}(\varphi'_{s,x})\det_{n_y}(\varphi'_{s,y})}{\det(\varphi'_s)} \,. \tag{23}$$

Здесь все три детерминанта являются струнными (21). Детерминант $\det(\varphi'_{s,x})$ зависит от величин

$$X_k(\Lambda) = \sum_{a=1}^{k} X(\lambda^a) \,. \tag{24}$$

Величины $X_k(\Lambda)$ представляют собой L - независимых функций. Величины S_k равны

$$S_k(\Lambda) = \prod_{a=1}^{k} S(\lambda^a) \,. \tag{25}$$

Рассмотрим теперь термодинамической предел. Возьмем, к примеру, XXZ модель при конечной температуре (1):

$$i\ln r_k(\Lambda) = Mp_k(\Lambda) \,,\quad M\to\infty,\quad N_k\to\infty\,,\quad \frac{N_k}{M} = const \tag{26}$$

$$P_\kappa(\Lambda) = \sum_{a=1}^{\kappa} p(\lambda^a), \qquad \tau_\kappa(\Lambda) = M\rho'_\kappa(\Lambda). \qquad (27)$$

С.т.у (I4) превращается при этом в систему интегральных уравнений [3] :

$$\rho_\kappa(\Lambda^\kappa) - \frac{(-1)^{m_\kappa}}{2\pi} \sum_{\ell=1}^{L} \int d\Lambda_\ell K_{\kappa\ell}(\Lambda^\kappa,\Lambda^\ell)\,\vartheta_\ell(\Lambda^\ell)\rho_\ell(\Lambda^\ell) = \frac{(-1)^{m_\kappa}}{2\pi} p'_\kappa(\Lambda^\kappa). \qquad (28)$$

Здесь $\rho_\kappa(\Lambda)$ это плотность вакансий для струн длины κ , $\vartheta_\kappa(\Lambda)$ – это отношение плотности моря $\rho^\circ_\kappa(\Lambda)$ к плотности вакансий $\rho_\kappa(\Lambda)$ $\vartheta_\kappa(\Lambda) = \rho^\circ_\kappa(\Lambda)/\rho_\kappa(\Lambda)$; $(-1)^{m_\kappa} = \operatorname{sign} p'_\kappa(\Lambda)$ на оси заполнения. Струнный определитель (2I) имеет простой термодинамический предел [I0] :

$$\det(\varphi'_s) = \Big[\prod_j \prod_{\kappa=1}^{L} 2\pi M\rho_\kappa(\Lambda^\kappa_j)(-1)^{m_\kappa}\Big]\cdot \det\Big(1 - \frac{1}{2\pi}\hat{K}\Big). \qquad (29)$$

Последний сомножитель это определитель линейного интегрального оператора, который действует на столбец функций $\rho_\kappa(\Lambda)$ в формуле (28).

В термодинамическом пределе L произвольных функций $\chi_\kappa(\Lambda)$ остаются конечными. Термодинамический предел величины E существует. Величина E оказывается функционалом L -произвольных функций $E = E(\{\chi_\kappa(\Lambda)\})$. Для того, чтобы изучить термодинамический предел функционала E , следует проделать вычисления, являющиеся непосредственным обобщением выкладок, проделанным в работах [I , 2] в случае, когда набор $\{\chi_\kappa(\Lambda)\}$ состоит из одной функции. Таким образом, можно доказать, что E удовлетворяет системе дифференциальных уравнений в вариационных производных:

$$\vartheta_\ell(\tilde\Lambda)E(\{\chi_\kappa(\Lambda)\}) + (-1)^{m_\ell}2\pi\frac{\delta E(\{\chi_\kappa(\Lambda)\})}{\delta\chi_\ell(\tilde\Lambda)} = \qquad (30)$$

$$= s_\ell(\tilde\Lambda)\vartheta_\ell(\tilde\Lambda)E(\{\chi_\kappa(\Lambda) + K_{\kappa\ell}(\Lambda,\tilde\Lambda)\})\,; \quad \ell,\kappa = 1,\dots,L$$

Эту систему можно решить с помощью преобразования Фурье

$$E = \exp\Big\{\sum_{\kappa=1}^{L}(-1)^{m_\kappa}\int d\Lambda_\kappa\,\vartheta_\kappa(\Lambda_\kappa)\,\chi_\kappa(\Lambda_\kappa)P_\kappa(\Lambda_\kappa)\Big\}. \qquad (3I)$$

Причем P_κ удовлетворяет системе нелинейных интегральных уравнений:

$$1 + 2\pi P_\kappa(\tilde\Lambda) = S_\kappa(\tilde\Lambda)\exp\Big\{\sum_{\ell=1}^{L}(-1)^{m_\ell}\int d\Lambda_\ell\,\vartheta(\Lambda_\ell)K_{\kappa\ell}(\tilde\Lambda_\kappa,\Lambda_\ell)P_\ell(\Lambda_\ell)\Big\}$$

$$\kappa = 1,\dots,L.$$

Это и есть система одевающих уравнений для коррелятора в случае вакуума, заполненного связанными состояниями, представляющая основной результат работы. В конце хотелось бы выразить благодарность за дискуссии Л.Д.Фаддееву, А.Г.Изергину и А.Н.Кириллову.

Литература.

1. I z e r g i n A.G., K o r e p i n V.E. - Commun.Math.Phys., 1984, vol.94, p.67-92.
2. K o r e p i n V.E. - Commun.Math.Phys., 1984, vol. 94, p.93-113.
3. T a k a h a s h i M. - Prog.Theor.Phys., 1971, vol.46, N 2, p.401-415.
4. F a d d e e v L.D., T a k h t a j a n L.A. - preprint, LOMI, E-4-83, 1983.
5. Б о г о л ю б о в Н.М., И з е р г и н А.Г. - Теор.Матем. Физика, 1984, т.59, № 2, стр.183-199.
6. Б о г о л ю б о в Н.М., К о р е п и н В.Е. - Теор.Матем. Физика, 1984, т.60, № 2, стр.262-269.
7. Ф а д д е е в Л.Д. В сб.: Труды У международного совещания по нелокальным теориям поля. Дубна, 1979, стр.249-304.
8. К о р е п и н В.Е. ДАН СССР, 1982, т.265, № 6, с.1361-1364.
9. K o r e p i n V.E. - Commun.Math.Phys., 1982, vol. 86, p. 391-418.
10. К и р и л л о в А.Н., К о р е п и н В.Е. - Зап.научн.семин. ЛОМИ, 1984, т.146, с.131-140.